ویژه خرداد ۱۴۰۲

فیلم تحلیل سوالات امتحانات پایان ترم

برای دیدن **فیلم حل نمونه سوالات** بزن رو لینک زیر

تحلیل نمونه سوالات هندسه یازدهم ریاضی	مشاهده فیلم ها

نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: هندسه یازدهم

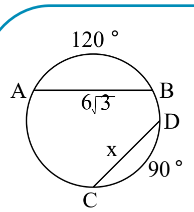
تاریخ آزمون: ۱۴۰۱/۱۱/۱۰

زمان برگزاری: ۱۱۷۶۰ دقیقه

شرکت توسعه انتشارات

پرش_م۱۱

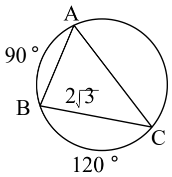
۱) در شکل مقابل، طول وتر CD چقدر است؟



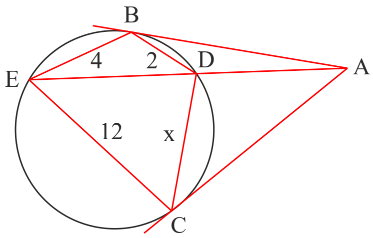
۲) در مثلث ABC ثابت کنید:

$$S_{\overset{\triangle}{ABC}} = ۲R^{۲} \sin A \sin B \sin C$$

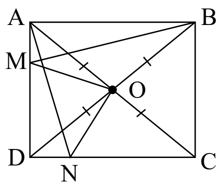
۳) در شکل مقابل، طول ضلع AB چقدر است؟



۴) در شکل مقابل B و C نقاط تماس هستند. مقدار x چقدر است؟

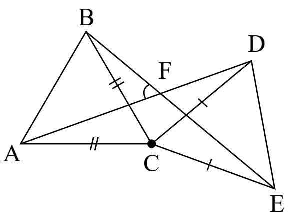


۵) در مربع $ABCD$، O مرکز مربع و $AM = DN$. ثابت کنید با دوران به مرکز O و زاویهٔ ۹۰°، مثلث $\overset{\triangle}{ABM}$ بر مثلث $\overset{\triangle}{ADN}$ تصویر می‌شود.

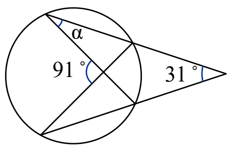


۶) در شکل روبه‌رو، مثلث‌های $\overset{\triangle}{ABC}$ و $\overset{\triangle}{DEC}$ متساوی‌الاضلاع هستند. الف) با کدام تبدیل و به چه صورت نقطهٔ A بر B و نقطهٔ D بر E تصویر می‌شود؟

ب) با استفاده از ویژگی‌های تبدیل قسمت (الف)، ثابت کنید که: $AD = BE$ و $A\hat{F}B = ۶۰^\circ$.

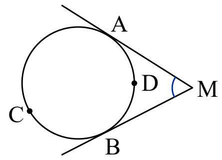


۷) در شکل مقابل اندازهٔ زاویهٔ α را به دست آورید.

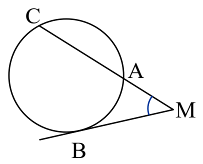


۸ در شکل‌های زیر ثابت کنید:

(راهنمایی: از نقطهٔ تماس ضلع زاویه بر دایره، خطی موازی ضلع دیگر زاویه رسم کنید.)

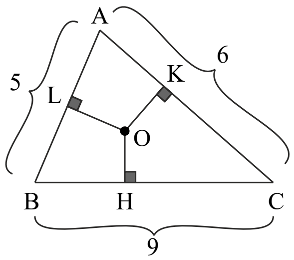


الف) $\hat{M} = \dfrac{\overset{\frown}{ACB} - \overset{\frown}{ADB}}{۲}$

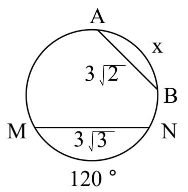


ب) $\hat{M} = \dfrac{\overset{\frown}{CB} - \overset{\frown}{AB}}{۲}$

۹ در شکل مقابل داریم: $OK = \sqrt{۲}$, $OH = \dfrac{۲\sqrt{۲}}{۳}$. طول OL چقدر است؟



۱۰ در شکل مقابل، اندازهٔ کمان x چقدر است؟



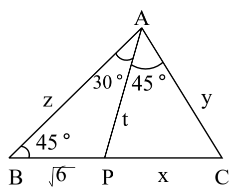
۱۱ در هر مثلث ثابت کنید:

$$\frac{a+b+c}{\sin\hat{A}+\sin\hat{B}+\sin\hat{C}} = ۲R$$

۱۲ در مثلث ABC، H محل همرسی ارتفاع‌هاست.

ثابت کنید شعاع دایره محیطی مثلث‌های AHB و BHC و AHC با شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC برابر است.

۱۳ در شکل مقابل، طول x و y و z و t را حساب کنید.

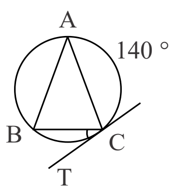


۱۴ در مثلث ABC، $b = \sqrt{۲}a$ و $\hat{A} = ۳۰^\circ$. اندازهٔ زاویهٔ $\hat{C}$ چقدر است؟

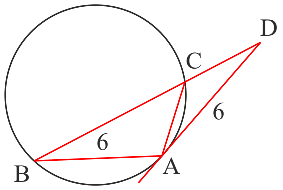
۱۵ واژه‌های زیر را تعریف کنید.

الف) ایزومتری　　ب) دو خط متنافر　　ج) صفحهٔ عمودمنصف یک پاره‌خط

۱۶ در شکل روبه‌رو، $AB = AC$ و $\overset{\frown}{AC} = ۱۴۰^\circ$ است. اگر CT مماس بر دایره در نقطهٔ C باشد، اندازهٔ زاویهٔ BCT را بیابید.

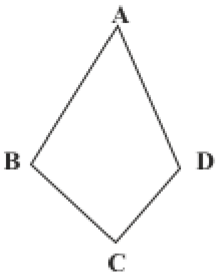


۱۷ در شکل مقابل AD بر دایره مماس بوده و $AB = AD = ۶$ است. اگر محیط مثلث ABC برابر با ۱۶ باشد، اندازهٔ BC چقدر است؟

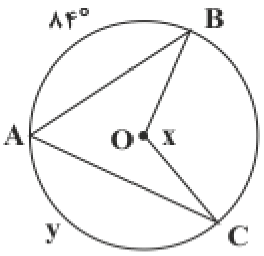


۱۸ دو زاویهٔ مجاور یک چهارضلعی محاطی ۸۰° و ۱۲۰° است، قدرمطلق تفاضل دو زاویهٔ دیگر چقدر است؟

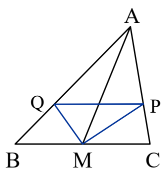
۱۹ در چهارضلعی $ABCD$، $AB + CD = AD + BC$ است. ثابت کنید که این چهارضلعی محیطی است.



۲۰ الف) اگر $\widehat{y} = ۱۴۰^\circ$، آنگاه اندازهٔ زاویهٔ x را به دست آورید.ب) اگر $\hat{x} = ۱۶۵^\circ$، آنگاه اندازهٔ کمان $\widehat{y}$ را به دست آورید.



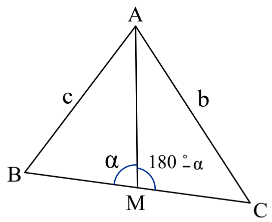
۲۱ در مثلث ABC، M وسط BC و MP و MQ نیمسازهای زوایای AMC و AMB؛ هستند؛ ثابت کنید: $PQ \parallel BC$



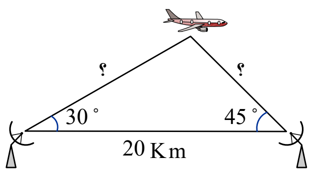
۲۲ در مثلث ABC، میانهٔ AM را رسم کرده‌ایم $(MB = MC = \frac{a}{۲})$. با نوشتن قضیهٔ کسینوس‌ها در دومثلث AMB و AMC، $b^۲$ و $c^۲$ را محاسبه، و با جمع کردن دو تساوی حاصل، درستی تساوی زیر را ثابت کنید:

(قضیهٔ میانه‌ها) $$b^۲ + c^۲ = ۲AM^۲ + \frac{a^۲}{۲}$$

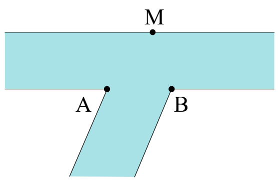
در حالت خاص $AB = ۴$ و $AC = ۶$ و $BC = ۸$، طول میانه AM را به‌دست آورید.



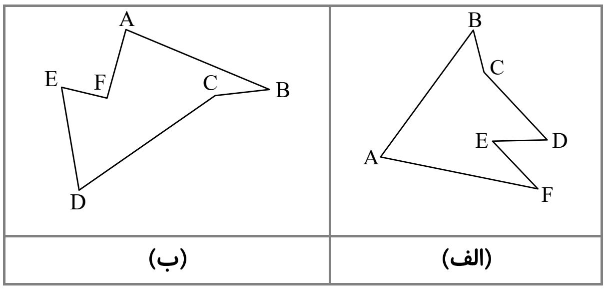
۲۳ دو ایستگاه رادار که در فاصلهٔ ۲۰ کیلومتری ازهم واقع هستند، هواپیمایی را با زاویه‌های ۳۰ و ۴۵ درجه رصد کرده‌اند. فاصلهٔ هواپیما از دو ایستگاه را به‌دست آورید.



۲۴ می‌خواهیم کنار رودخانه‌ها، ۳ اسکله بسازیم. جای ۲ اسکلهٔ A و B مطابق شکل مشخص است. اسکلهٔ M را در چه نقطه‌ای از ساحل بسازیم که قایق‌ها هنگام طی مسیر $MABM$ کوتاه‌ترین مسیر را طی کنند؟



۲۵ دور زمین‌هایی مطابق شکل، حصارکشی شده است. چطور می‌توان بدون کم و زیاد کردن حصارها، مساحت زمین را افزایش داد؟



۲۶ در حالتی که پاره خط AB در راستای عمود بر خط بازتاب قرار دارد، ثابت کنید که اگر $A'B'$ بازتاب AB باشد، AB و $A'B'$ هم‌اندازه‌اند.

۲۷ شش‌ضلعی منتظم $ABCDEF$ مفروض است. با امتداد دادن اضلاع شش‌ضلعی، مطابق شکل، مثلث MNP را ساخته‌ایم.

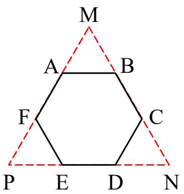
الف) نشان دهید MNP متساوی‌الاضلاع است.

ب) نشان دهید مساحت شش‌ضلعی، دو سوم مساحت مثلث MNP است.

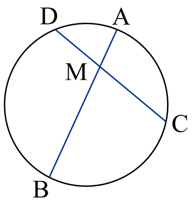
پ) از نقطهٔ دلخواه T درون شش‌ضلعی عمودهای TH، TH' و TH'' را به‌ترتیب بر BC، ED و AF رسم کنید. با توجه به آنچه از هندسهٔ پایهٔ ۱ می‌دانید، مجموع طول‌های این سه عمود با کدام جزء از مثلث MNP برابر است؟

ت) مجموع مساحت‌های مثلث‌های TBC، TDE و TAF چه کسری از مساحت مثلث MNP است؟ نشان دهید:

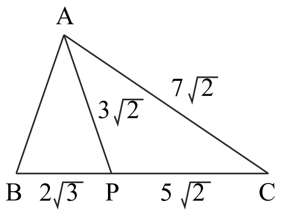
$$S_{TBC} + S_{TDE} + S_{TAF} = S_{TAB} + S_{TEF} + S_{TCD}$$



۲۸ در دایرهٔ $C(O,R)$ وتر AB، وتر CD به طول ۹ سانتی‌متر را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم کرده است. اگر $AB = 11cm$، آنگاه وتر CD وتر AB را به چه نسبتی قطع می‌کند؟

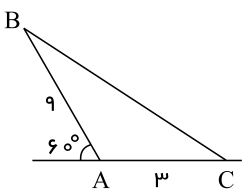


۲۹ در شکل مقابل، مساحت مثلث APB چقدر است؟



۳۰ قطر مستطیلی ۱۲ و زاویهٔ بین قطرها ۶۰° است. مساحت مستطیل چقدر است؟

۳۱ مساحت مثلث ABC را حساب کنید.

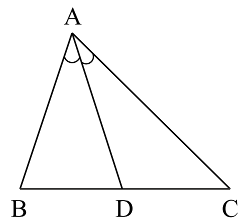


۳۲ طول سه ارتفاع یک مثلث ۳، ۴ و ۶ هستند. مساحت مثلث را حساب کنید.

۳۳ مساحت مثلث با دو ضلع به اندازه‌های ۱۶ و ۹ واحد برابر با $۲۴\sqrt{۵}$ واحد مربع است. طول بزرگ‌ترین ضلع این مثلث چقدر است؟

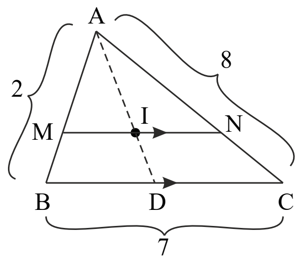
۳۴ ارتفاع‌های مثلثی با مقادیر $\sqrt{۳}$، $\sqrt{۶}$ و $\sqrt{۲}$ متناسب هستند. نوع مثلث و زوایای آن را مشخّص کنید.

۳۵) در شکل مقابل، ثابت کنید: $\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}$. ($AD$: $\hat{A}$ نیمساز داخلی)



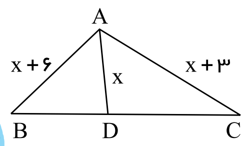
۳۶) در مثلث ABC رابطهٔ $\hat{A}=۲\hat{B}$ برقرار است. ثابت کنید: $a^۲-b^۲=bc$.

۳۷) در شکل مقابل، I محل همرسی نیمسازهاست. حاصل $\frac{S_{MNCB}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}$ چقدر است؟ $(MN \parallel BC)$

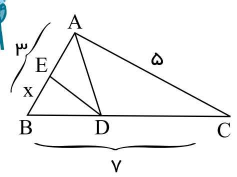


۳۸) در مثلث ABC، $AB=۸$ و $AC=۶$ و $\hat{A}=۲\hat{C}$ است. اندازهٔ ضلع BC را حساب کنید.

۳۹) در شکل مقابل، $\hat{A}=۱۲۰^\circ$ و AD نیمساز داخلی $\hat{A}$ است. مقدار x را حساب کنید.



۴۰) در شکل مقابل، AD و DE نیمسازند. x چقدر است؟



۴۱) در مثلث ABC، ثابت کنید:

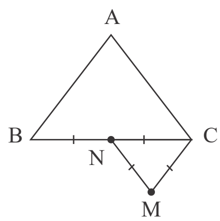
$$d_a=\frac{۲bc\cdot\cos\frac{\hat{A}}{۲}}{b+c}$$ (d_a نیمساز داخلی زاویهٔ A)

۴۲) در متوازی‌الاضلاع به طول اضلاع ۳ و ۴، حاصل مجموع مربعات قطرها چقدر است؟

۴۳) در مثلث ABC، $AB=۳$ و $AC=۴$ و $BC=x-۱$ و $A>۹۰^\circ$ است. حدود x را مشخّص کنید.

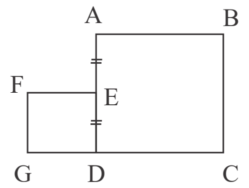
۴۴) خط d را نسبت به خط Δ بازتاب می‌کنیم تا خط d' به‌دست آید. d' را تحت زاویهٔ α و به مرکز O دوران می‌دهیم تا خط d'' به‌دست آید. اگر زاویهٔ بین d و d' برابر β باشد، زاویهٔ بین d و d'' کدام است؟ (دوران در جهت ساعتگرد است)

۴۵) مطابق شکل با ترکیب کدام تبدیل‌ها مثلث متساوی‌الاضلاع ABC تصویر مثلث متساوی‌الاضلاع MNC است؟

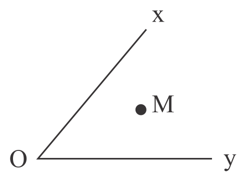


۴۶) نقطهٔ M درون زاویهٔ xOy قرار دارد. می‌خواهیم A و B را بر Ox و Oy بیابیم که محیط $M\overset{\Delta}{A}B$ کمترین مقدار ممکن باشد. کدام تبدیل استفاده می‌شود؟

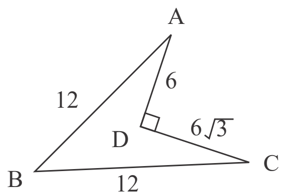
۴۷) مطابق شکل $ABCD$ و $EFGD$ مربع هستند و E وسط AD است. با ترکیب کدام تبدیل‌ها، $ABCD$ تصویر $EFGD$ است؟



۴۸) مطابق شکل، با استفاده از کدام تبدیل می‌توان خطی از M گذراند تا Ox و Oy را در A و B قطع کند طوری که $MA = MB$ باشد؟



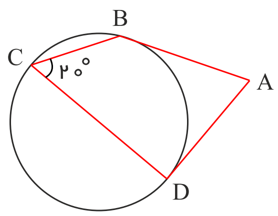
۴۹) مطابق شکل اگر بخواهیم بدون تغییر محیط، مساحت چهارضلعی را افزایش دهیم، مقدار افزایش مساحت جدید چقدر است؟



۵۰) تصویر یک خط تحت یک تبدیل بر همان خط منطبق است. این تبدیل چه تبدیل‌هایی می‌تواند باشد؟

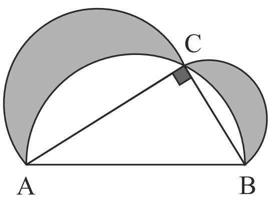
۵۱) مثلث $A'B'C'$ مجانس مستقیم مثلث ABC به مرکز تجانس O می‌باشد. اگر $\frac{OA'}{AA'} = ۳$ و نوع تجانس انقباضی باشد، مساحت مثلث ABC چند برابر مساحت مثلث $A'B'C'$ است؟

۵۲) در شکل مقابل AB و AD بر دایره مماس است. اگر $\hat{C} = ۲۰^\circ$ باشد، اندازهٔ زاویهٔ $\hat{A}$ چقدر است؟

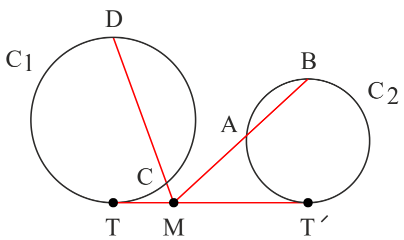


۵۳) در یک مثلث مختلف‌الاضلاع اوساط اضلاع و پای یک ارتفاع رئوس یک چهارضلعی هستند. نوع این چهارضلعی چیست؟

۵۴) در شکل مقابل بر اضلاع قائمهٔ مثلث قائم‌الزاویه ABC، دو نیم‌دایره قرار دارد. نسبت مجموع دو ناحیهٔ هاشورخورده به مساحت مثلث ABC چقدر است؟

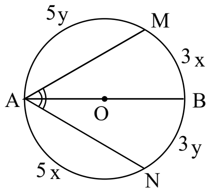


۵۵) در شکل مقابل T و T' نقاط تماس هستند. اگر $TM = \frac{۱}{۳}MT'$ باشد حاصل $\frac{MA \cdot MB}{MC \cdot MD}$ چقدر است؟



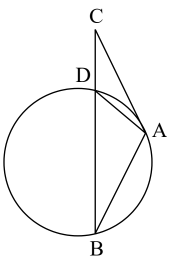
۵۶) در مثلث ABC، نیمسازهای زاویه‌های خارجی B و C، یکدیگر را در نقطهٔ M قطع می‌کنند. اگر O محل همرسی نیمسازهای داخلی باشد، نوع چهارضلعی $BOCM$ چیست؟

۵۷) در شکل مقابل AB قطر دایره است. اندازهٔ زاویهٔ MAN چند درجه است؟

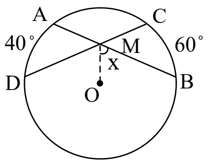


۵۸) در یک شش‌ضلعی منتظم به محیط $۱۲\sqrt{۳}$ فاصلهٔ مرکز دایره محیطی آن تا یکی از اضلاع شش‌ضلعی چقدر است؟

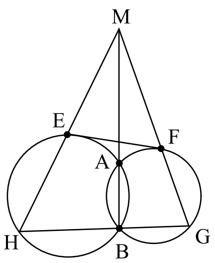
۵۹) در شکل مقابل AC در نقطهٔ A بر دایره مماس بوده و $AC = AB$ است. ثابت کنید: $AD = DC$



۶۰) در شکل مقابل دو وتر AB و CD مساوی‌اند. اگر O مرکز دایره باشد، زاویهٔ x کدام است؟

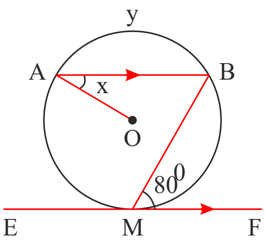


۶۱) در شکل زیر، دو دایره در نقاط A و B متقاطع‌اند و M نقطه‌ای بر امتداد پاره‌خط AB است. اگر دو قاطع دلخواه MH و MG را رسم کنیم، چهارضلعی $EFGH$همواره:



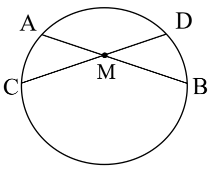
۶۲) در شکل مقابل $AB||EF$ و پاره‌خط EF در نقطهٔ M بر دایره مماس است.

مقادیر مجهول x و y را حساب کنید.

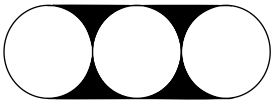


۶۳) دو دایرهٔ C و C' به مرکزهای O و O' به شعاع‌های ۳ و ۵ و طول خط‌المرکزین $OO' =$ ۱۱ مفروض است. چند خط می‌توان رسم کرد که از O و O' به‌ترتیب به فاصله‌های ۳ و ۵ باشد؟

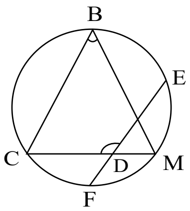
۶۴) در دایرهٔ مقابل، دو وتر AB و CD در نقطهٔ M متقاطع هستند. اگر $MA = ۶$ و $MB = ۳$ و $MD = ۲/۵$ ، طول MC چقدر است؟



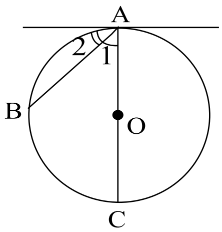
۶۵ سه دایرهٔ مساوی به شعاع R مطابق شکل بر هم مماس‌اند و مراکز آنها روی یک خط راست، قرار دارد. مساحت نواحی رنگ‌شده چقدر است؟



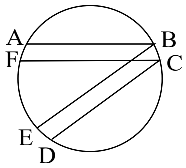
۶۶ در شکل مقابل M وسط کمان $\overset{\frown}{EF}$ است و $\overset{\frown}{BC} = ۵۰^\circ$، اندازهٔ $\hat{B} + \hat{D}$ چند درجه است؟



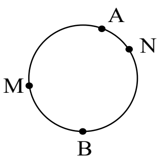
۶۷ در شکل مقابل اندازهٔ زاویهٔ ظلّی $A_۲$ برابر ۵۰° است. اندازهٔ کمان $\overset{\frown}{BC}$ برحسب درجه چقدر است؟



۶۸ در شکل مقابل اگر $FC \parallel AB$ و $BE \parallel CD$ و $\overset{\frown}{AB} = ۶۰^\circ$ و $\overset{\frown}{CD} = ۴۰^\circ$ و $\overset{\frown}{EF} = ۱۱۰^\circ$ باشد، آنگاه اندازهٔ زاویهٔ $F\hat{C}D$ را بیابید.



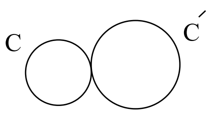
۶۹ در دایرهٔ مقابل داریم: $A\overset{\frown}{M}B = ۴A\overset{\frown}{N}B$، کمان $A\overset{\frown}{N}B$ چه کسری از محیط دایره است؟



۷۰ شکل زیر نشان‌دهندهٔ دو دایرهٔ مماس برون است.

الف) این شکل دارای چند مماس مشترک خارجی و چند مماس مشترک داخلی است؟

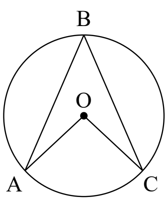
ب) اگر $R = ۴$ و $R' = ۹$ آنگاه اندازهٔ مماس مشترک خارجی آنها را به دست آورید.



۷۱ مقدار a را چنان بیابید که اندازهٔ مماس مشترک خارجی دو دایره به شعاع‌های ۸ و ۳ و خط‌المرکزین $d = ۱۳$ برابر $۵a - ۳$ باشد.

۷۲ مقدار x را چنان بیابید که اندازهٔ مماس مشترک داخلی دو دایره به شعاع‌های ۲ و ۳ و خط‌المرکزین $d = ۱۳$ برابر $۵x - ۸$ باشد.

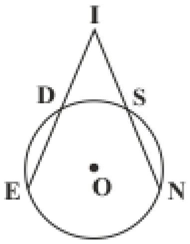
۷۳ در دایرهٔ به مرکز O، اگر $A\hat{O}C = (۳\alpha + ۱۲)^\circ$ و $A\hat{B}C = (\alpha + ۱۶)^\circ$ باشد، مقدار α و اندازهٔ زاویهٔ مرکزی AOC و محاطی ABC را محاسبه کنید.



۷۴ در مورد همرسی مماس مشترک‌های خارجی دو دایره و خط المرکزین آنها چه می توان گفت؟

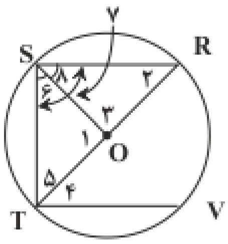
هندسه یازدهم

۷۵ در شکل زیر دو قاطع IN, IE با هم برابرند، ثابت کنید: $IS = ID$

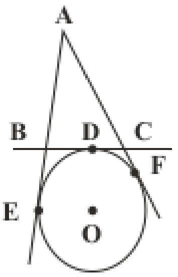


۷۶ با استفاده از تعریف زاویهٔ محاطی، نشان دهید مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث ۱۸۰° است.

۷۷ در دایره‌ای به مرکز O، $VT \parallel RS$، $\overset{\frown}{TS} = ۷۰^\circ$ و RT قطر دایره است. اندازهٔ زاویه‌های ۱ تا ۸ را به دست آورید.

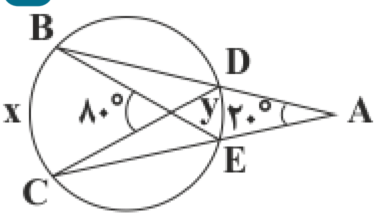


۷۸ خط‌های BC, AF, AE به‌ترتیب در نقطه‌های E و F و D بر دایرهٔ (O) مماس هستند. مماس BC، خط‌های AF, AE را به‌ترتیب در نقطه‌های C, B قطع کرده است. ثابت کنید با تغییر مکان نقطهٔ D روی دایره بین دو نقطه ی ثابت F, E ، محیط مثلث ABC ثابت می‌ماند.

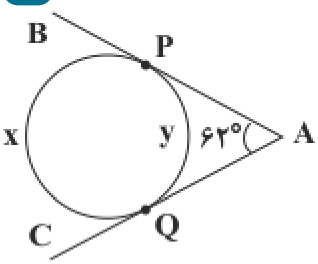


۷۹ در هر کدام از شکل‌های زیر y و x را بیابید.

الف

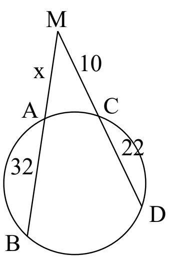


ب



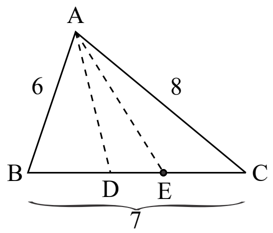
۸۰ در هریک از شکل‌های زیر x و y را بیابید.

الف در دایرهٔ زیر، مقدار مجهول x را به دست آورید.



هندسه یازدهم

۸۱ در مثلث ABC، اضلاع $AB = ۶$ و $AC = ۸$ و $BC = ۷$ هستند. نیمساز AD را رسم می‌کنیم.



الف طول BD و CD را حساب کنید.

ب طول نیمساز AD را حساب کنید.

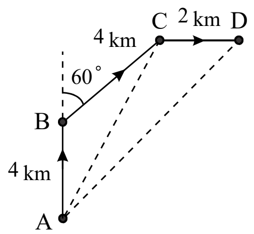
پ اگر AE نیمساز زاویهٔ $D\hat{A}C$ باشد، طول AE را حساب کنید.

۸۲ در n ضلعی منتظم، کوچک‌ترین قطر $\sqrt{۲+\sqrt{۲}}$ برابر طول ضلع آن است. n چقدر است؟

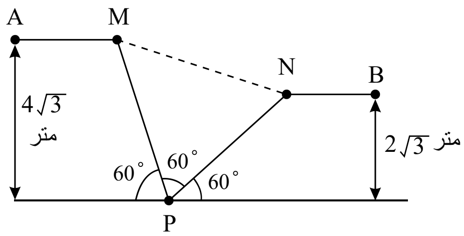
۸۳ اگر در مثلثی اضلاع AB و AC و زاویهٔ A معلوم باشند، مساحت مثلث از رابطهٔ .... به‌دست می‌آید.

۸۴ یک پیک موتوری در مسیر رساندن مرسولات به مقصد، ابتدا ۴ کیلومتر به‌سمت شمال حرکت می‌کند و سپس مسیرش را ۶۰° به‌سمت شرق منحرف نموده و ۴ کیلومتر دیگر حرکت می‌کند و در انتها ۲ کیلومتر مستقیم به‌سمت شرق حرکت می‌کند تا به مقصد می‌رسد. فاصلهٔ مبدأ تا مقصد (AD) چقدر است؟

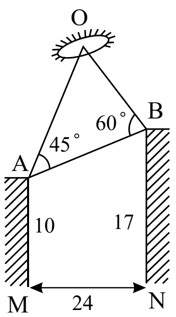
(راهنمایی: ابتدا در مثلث ABC، طول AC را حساب کنید، سپس در مثلث ACD، زاویهٔ $A\hat{C}D$ را یافته و طول AD را محاسبه کنید)



۸۵ مطابق شکل، دونده‌ای از نقطهٔ A به‌سمت نقطهٔ B شروع به دویدن می‌کند. مسافتی را که این دونده روی پل MN طی می‌کند، حساب کنید.



۸۶ دو نفر (B, A) به‌طور هم‌زمان از بالای دو ساختمان به ارتفاع‌های ۱۷ و ۱۰ متر، یک شیء نورانی را مطابق شکل با زاویهٔ دید ۴۵° و ۶۰° (نسبت به پاره‌خط AB) رؤیت کرده‌اند. اگر فاصلهٔ دو ساختمان از یکدیگر ۲۴ متر باشد، فاصلهٔ شیء نورانی از دو نفر را حساب کنید. (OA و OB را حساب کنید.) ($\sin ۷۵^\circ \sim ۰/۹$)



۸۷ در هر مثلث، اگر یک زاویه منفرجه باشد، مرکز دایرهٔ محیطی .... مثلث قرار می‌گیرد.

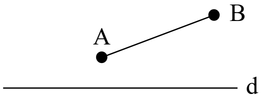
۸۸ در هر مثلث قائم‌الزاویه، حاصل $\frac{۱}{c^۲}+\frac{۱}{b^۲}$ برابر با .... است. ($\hat{A}=۹۰^\circ$)

۸۹ الف. آیا با داشتن دو وتر موازی از دایره‌ای، می‌توان مرکز دایره را پیدا کرد؟ چرا؟

ب. آیا در حالتی که دو وتر ناموازی از دایره‌ای را داشته باشیم، می‌توان مرکز آن دایره را یافت؟ چرا؟

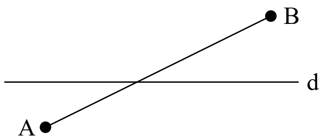
۹۰ ثابت کنید بازتاب محوری یک تبدیل طولپا است. (مسئله را در دو حالت زیر بررسی کنید)

الف



d محور بازتاب است.

ب



d محور بازتاب است.

پاسخ‌نامه تشریحی

۱ از نقطهٔ دلخواه M روی محیط دایره به A و B وصل می‌کنیم.
داریم:

$$\text{محاطی } A\hat{M}B = \frac{۱۲۰^\circ}{۲} = ۶۰^\circ \Rightarrow ۲R = \frac{۶\sqrt{۳}}{\sin ۶۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۲}} = ۱۲$$

$$\Rightarrow R = ۶ \quad (\text{شعاع دایرهٔ محیطی } \overset{\triangle}{MAB} \text{ و شعاع دایره})$$

حال اگر از نقطهٔ دلخواه N روی محیط دایره به C و D وصل کنیم، داریم:

$$\text{محاطی } C\hat{N}D = \frac{۹۰^\circ}{۲} = ۴۵^\circ \Rightarrow ۲R = \frac{x}{\sin ۴۵^\circ}$$

$$\Rightarrow ۱۲ = \frac{x}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}} \Rightarrow x = ۶\sqrt{۲}$$

۲ می‌دانیم که:

$$S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{۱}{۲} bc \sin \hat{A}$$

$$\begin{cases} b = ۲R \times \sin \hat{B} \\ c = ۲R \times \sin \hat{C} \end{cases} \Rightarrow S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{۱}{۲} \times ۲R \times \sin \hat{B} \times ۲R \times \sin \hat{C} \times \sin \hat{A}$$

$$\Rightarrow S_{\overset{\triangle}{ABC}} = ۲R^۲ \sin \hat{A} \sin \hat{B} \sin \hat{C}$$

۳

$$\text{محاطی } \hat{A} = \frac{۱۲۰^\circ}{۲} = ۶۰^\circ \quad , \quad \text{محاطی } \hat{C} = \frac{۹۰^\circ}{۲} = ۴۵^\circ$$

$$\frac{AB}{\sin \hat{C}} = \frac{BC}{\sin \hat{A}} \Rightarrow \frac{AB}{\sin ۴۵^\circ} = \frac{۲\sqrt{۳}}{\sin ۶۰^\circ} \Rightarrow \frac{AB}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}} = \frac{۲\sqrt{۳}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}} \Rightarrow AB = ۲\sqrt{۲}$$

۴

$$\begin{cases} \overset{\triangle}{AB}D \sim \overset{\triangle}{AB}E \Rightarrow \frac{BD}{BE} = \frac{AB}{AE} \\ \overset{\triangle}{AD}C \sim \overset{\triangle}{AC}E \Rightarrow \frac{CD}{CE} = \frac{AC}{AE} \end{cases} \quad , \quad AB = AC \ \text{مماس‌های رسم‌شده بر دایره}$$

$$\Rightarrow \frac{BD}{BE} = \frac{CD}{CE} \Rightarrow \frac{۲}{۴} = \frac{x}{۱۲} \Rightarrow x = ۶$$

۵ ابتدا ثابت می‌کنیم که دو مثلث $\overset{\triangle}{AOM}$ و $\overset{\triangle}{DON}$ هم‌نهشت هستند:

$$\begin{cases} OA = OD \\ AM = DN \\ O\hat{A}M = O\hat{D}N = ۴۵^\circ \end{cases} \Rightarrow \underset{(\text{ض ز ض})}{\overset{\triangle}{AOM} \cong \overset{\triangle}{DON}} \Rightarrow \begin{cases} OM = ON & (۱) \\ A\hat{O}M = D\hat{O}N & (۲) \end{cases}$$

از رابطهٔ (۲) داریم:

$$A\hat{O}M = D\hat{O}N \Rightarrow A\hat{O}M + M\hat{O}D = D\hat{O}N + M\hat{O}D \Rightarrow A\hat{O}D = M\hat{O}N \ , \ A\hat{O}D = ۹۰^\circ \Rightarrow \begin{cases} M\hat{O}N = ۹۰^\circ \\ (۱) : OM = ON \end{cases}$$

بنابراین نقطهٔ M با دوران به مرکز O و زاویهٔ ۹۰° بر N تصویر می‌شود. از دوران به مرکز O و زاویهٔ ۹۰°، A بر D تصویر می‌شود و به همین ترتیب، B بر A تصویر می‌شود.

به این ترتیب، رأس‌های مثلث $\overset{\triangle}{ABM}$ بر رأس‌های مثلث $\overset{\triangle}{ADN}$ تصویرمی‌شوند. پس دوران‌یافتهٔ $\overset{\triangle}{ABM}$ به مرکز O و زاویهٔ ۹۰°، بر مثلث $\overset{\triangle}{ADN}$ منطبق می‌شود.

۶

$$\overset{\triangle}{ABC} \ \text{متساوی‌الاضلاع} \Rightarrow A\hat{C}B = ۶۰^\circ \quad , \quad AC = CB$$

الف) پس می‌توان گفت که نقطهٔ B دوران‌یافتهٔ A به مرکز C و زاویهٔ -۶۰° است. به همین ترتیب:

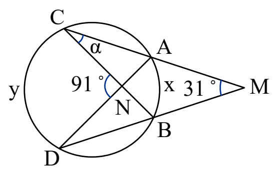
$C\overset{\triangle}{D}E$ متساوی‌الاضلاع $\Rightarrow D\hat{C}E = ۶۰^\circ \quad , \quad CD = CE$

نتیجه می‌گیریم که نقطهٔ E دوران‌یافتهٔ D به مرکز C و زاویهٔ -۶۰° است.

ب) با استفاده از قسمت (الف)، نتیجه می‌گیریم که AD تحت دوران به مرکز C و زاویهٔ -۶۰° روی BE تصویر می‌شود. دوران طولپا است، پس $AD = BE$. همچنین می‌دانیم که زاویهٔ بین خط و دوران‌یافتهٔ آن به اندازهٔ دوران است، پس: $A\hat{F}B = ۶۰^\circ$.

$$\begin{cases} T(A) = B \\ T(D) = E \end{cases} \to T(AD) = BE$$

۷ با توجه به نام‌گذاری‌های روی شکل داریم:



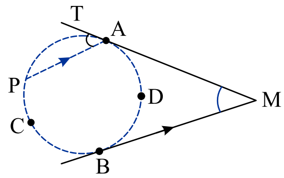
$$\frac{x+y}{۲} = ۹۱^\circ, \frac{y-x}{۲} = ۳۱^\circ$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y = ۱۸۲^\circ \\ y-x = ۶۲^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = ۶۰^\circ \\ y = ۱۲۲^\circ \end{cases}$$

$$\alpha = \frac{x}{۲} = \frac{۶۰^\circ}{۲} = ۳۰^\circ$$

۸

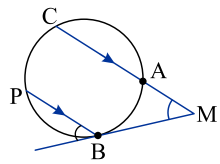
الف)



$$\begin{cases} AP \parallel MB \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = P\overset{\frown}{C}B \quad , \hat{M} = P\hat{A}T \\ \text{ظلّی}\ P\hat{A}T = \frac{\overset{\frown}{PA}}{۲} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \hat{M} = \frac{\overset{\frown}{PA}}{۲} = \frac{A\overset{\frown}{C}B - P\overset{\frown}{C}B}{۲} = \frac{A\overset{\frown}{C}B - A\overset{\frown}{D}B}{۲}$$

ب)



$$\begin{cases} PB \parallel MC \Rightarrow \hat{M} = \hat{B}\ ,\ \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{PC} \\ (\text{ضلّی})\ \hat{B} = \frac{PB}{۲} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \hat{M} = \frac{\overset{\frown}{PB}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{BPC} - \overset{\frown}{CP}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{BC} - \overset{\frown}{AB}}{۲}$$

۹ از O به A، B و C وصل می‌کنیم، داریم:

$$S_{A\overset{\triangle}{O}B} + S_{A\overset{\triangle}{O}C} + S_{B\overset{\triangle}{O}C} = S_{A\overset{\triangle}{B}C}$$

$$\frac{۱}{۲} \times OL \times ۵ + \frac{۱}{۲} \times OK \times ۶ + \frac{۱}{۲} \times OH \times ۹ = S_{A\overset{\triangle}{B}C}$$

$$\frac{۵}{۲}OL + \frac{۱}{۲} \times \sqrt{۲} \times ۶ + \frac{۱}{۲} \times \frac{۲\sqrt{۲}}{۳} \times ۹ = S_{A\overset{\triangle}{B}C}$$

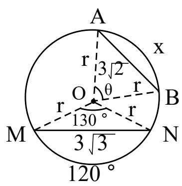
$$\frac{۵}{۲}OL + ۳\sqrt{۲} + ۳\sqrt{۲} = S_{A\overset{\triangle}{B}C} \qquad (۱)$$

برای محاسبهٔ مساحت مثلث ABC داریم:

دستور هرون : $P = \frac{۵+۶+۹}{۲} = ۱۰ \Rightarrow S = \sqrt{۱۰ \times ۵ \times ۱ \times ۴} = ۱۰\sqrt{۲}$

$$(۱):\ \frac{۵}{۲}OL + ۶\sqrt{۲} = ۱۰\sqrt{۲} \Rightarrow \frac{۵}{۲}OL = ۴\sqrt{۲} \Rightarrow OL = \frac{۸\sqrt{۲}}{۵}$$

۱۰



قضیهٔ کسینوس‌ها در $M\overset{\triangle}{O}N$: $(۳\sqrt{۳})^۲ = r^۲ + r^۲ - ۲r \times r \times \underbrace{\cos ۱۲۰^\circ}_{\frac{-۱}{۲}} \Rightarrow ۲۷ = ۳r^۲ \Rightarrow r = ۳$

$$O\overset{\triangle}{A}B : (۳\sqrt{۲})^۲ = ۳^۲ + ۳^۲ - ۲ \times ۳ \times ۳ \times \cos\theta$$

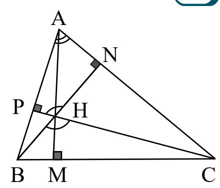
$۱۸ = ۹ + ۹ - ۱۸\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = ۰ \Rightarrow \theta = ۹۰^\circ \Rightarrow x = ۹۰^\circ$

(۱۱) طبق قضیهٔ سینوس‌ها داریم:

$$a = ۲R\sin\hat{A} \quad , \quad b = ۲R\sin\hat{B} \quad , \quad c = ۲R\sin\hat{C} \Rightarrow \frac{a+b+c}{\sin\hat{A}+\sin\hat{B}+\sin\hat{C}}$$

$$= \frac{۲R(\sin\hat{A}+\sin\hat{B}+\sin\hat{C})}{\sin\hat{A}+\sin\hat{B}+\sin\hat{C}} = ۲R$$

(۱۲)



$$APHN : \hat{P} + \hat{N} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{A} + P\hat{H}N = ۱۸۰^\circ$$

$$\Rightarrow P\hat{H}N = ۱۸۰^\circ - \hat{A} = B\hat{H}C$$

$$\begin{cases} ۲R_{\overset{\triangle}{BHC}} = \dfrac{BC}{\sin B\hat{H}C} = \dfrac{BC}{\sin(۱۸۰^\circ - \hat{A})} = \dfrac{BC}{\sin\hat{A}} (۱) \\ ۲R_{\overset{\triangle}{ABC}} = \dfrac{BC}{\sin\hat{A}} (۲) \end{cases}$$

$$(۱), (۲) \Rightarrow ۲R_{\overset{\triangle}{BHC}} = ۲R_{\overset{\triangle}{ABC}} \Rightarrow R_{\overset{\triangle}{BHC}} = R_{\overset{\triangle}{ABC}}$$

به همین‌ترتیب، چون $A\hat{H}B = ۱۸۰^\circ - \hat{C}$ و $A\hat{H}C = ۱۸۰^\circ - \hat{B}$، بنابراین: $R_{\overset{\triangle}{AHC}} = R_{\overset{\triangle}{BHC}} = R_{\overset{\triangle}{AHB}} = R_{\overset{\triangle}{ABC}}$.

(۱۳)

$\overset{\triangle}{APB}$ قانون سینوس‌ها در : $\dfrac{\sqrt{۶}}{\sin ۳۰^\circ} = \dfrac{AP}{\sin ۴۵^\circ} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{۶}}{\frac{۱}{۲}} = \dfrac{AP}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}} \Rightarrow AP = t = ۲\sqrt{۳}$

$$\hat{C} = ۱۸۰^\circ - (۴۵^\circ + ۳۰^\circ + ۴۵^\circ) = ۶۰^\circ$$

$\overset{\triangle}{APC}$ قانون سینوس‌ها در : $\dfrac{AP}{\sin ۶۰^\circ} = \dfrac{x}{\sin ۴۵^\circ} \Rightarrow \dfrac{۲\sqrt{۳}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}} = \dfrac{x}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}} \Rightarrow x = ۲\sqrt{۲}$

$$\overset{\triangle}{APC} \sim \overset{\triangle}{ABC} \Rightarrow y^۲ = x \times BC$$

$$\Rightarrow y^۲ = ۲\sqrt{۲}(۲\sqrt{۲} + \sqrt{۶}) = ۸ + ۴\sqrt{۳} \Rightarrow y = ۲\sqrt{۲+\sqrt{۳}}$$

$$\overset{\triangle}{ABC} : \frac{z}{\sin ۶۰^\circ} = \frac{y}{\sin ۴۵^\circ} \Rightarrow \frac{z}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}} = \frac{۲\sqrt{۲+\sqrt{۳}}}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}} \Rightarrow z = \sqrt{۱۲ + ۶\sqrt{۳}}$$

(۱۴)

قانون سینوس‌ها: $b = \sqrt{۲}a \Rightarrow ۲R \times \sin\hat{B} = \sqrt{۲} \times ۲R \times \sin\hat{A}$

$$\sin\hat{B} = \sqrt{۲} \times \sin ۳۰^\circ = \sqrt{۲} \times \frac{۱}{۲} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow \sin\hat{B} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow \hat{B} = ۴۵^\circ \text{ یا } ۱۳۵^\circ \Rightarrow \begin{cases} \hat{C} = ۱۸۰^\circ - (۳۰^\circ + ۴۵^\circ) = ۱۰۵^\circ \\ \hat{C} = ۱۸۰^\circ - (۳۰^\circ + ۱۳۵^\circ) = ۱۵^\circ \end{cases}$$

(۱۵) الف) تبدیلی که فاصلهٔ بین نقطه‌ها (طول پاره‌خط‌ها) را حفظ کند، ایزومتری نامیده می‌شود.

ب) دو خط در فضا را که در یک صفحه قرار نمی‌گیرند، دو خط متنافر می‌نامیم.

ج) صفحه‌ای را که در وسط یک پاره‌خط بر آن عمود باشد، صفحهٔ عمودمنصف آن پاره‌خط می‌نامیم.

(۱۶)

$$AB = AC \Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{AC} = ۱۴۰^\circ \Rightarrow \widehat{BC} = ۳۶۰^\circ - ۲ \times ۱۴۰^\circ = ۸۰^\circ \Rightarrow B\hat{C}T = ۴۰^\circ$$

(۱۷)

$$AB = AD \Rightarrow \hat{B} = \hat{D} \quad , \quad (\text{محاطی})\ \hat{B} = \frac{\widehat{AC}}{۲} \quad , \quad (\text{ظلی}) \quad \hat{A} = \frac{\widehat{AC}}{۲}$$

$$\Rightarrow \hat{A} = \hat{D} = \frac{\widehat{AC}}{۲} \Rightarrow AC = CD$$

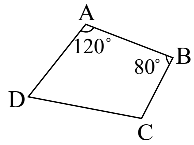
$\overset{\triangle}{ABC}$ محیط $= ۱۶ = AB + AC + BC = ۶ + AC + BC \Rightarrow AC + BC = ۱۰$

$CD = AC \Rightarrow BD = BC + CD = BC + AC = ۱۰ \Rightarrow BD = ۱۰$

$AD^۲ = CD \times BD \Rightarrow ۳۶ = CD \times ۱۰ \Rightarrow CD = ۳/۶$

$\Rightarrow BC = BD - CD = ۱۰ - ۳/۶ = ۶/۴$

۱۸ طبق شکل داریم:

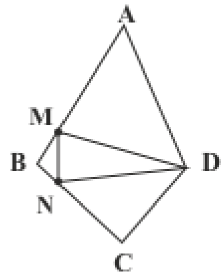


$$\begin{cases} \hat{A} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{C} = ۶۰^\circ \\ \hat{B} + \hat{D} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{D} = ۱۰۰^\circ \Rightarrow \hat{D} - \hat{C} = ۴۰^\circ \end{cases}$$

۱۹ اگر روی ضلع AB نقطهٔ M را طوری انتخاب کنیم که $AM = AD$ و اگر روی ضلع BC نقطه N را طوری انتخاب کنیم که $DC = CN$ باشد در این صورت مثلث‌های ADM, DCN متساوی‌الساقین هستند.

ضمناً با توجه به فرض مسأله داریم:

$$AB + CD = AD + BC \Rightarrow AM + MB + CD = AD + BN + CN$$



چون $AM = AD$, $DC = CN$ می‌باشد پس $MB = BN$ می‌باشد.

بنابراین مثلث BMN نیز متساوی‌الساقین است.

اگر عمودمنصف‌های مثلث DMN را رسم کنیم همدیگر را در نقطه‌ای مانند I قطع می‌کنند از طرفی عمودمنصف‌های اضلاع DM , MN , DN نقش نیمسازهای زوایای $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ را نیز دارند پس طبق ویژگی مکان هندسی نیمساز، فاصلهٔ نقطهٔ I از همهٔ اضلاع AD , AB , BC , DC مساوی است. بنابراین نقطه I مرکز دایره محاطی این چهارضلعی است پس این چهارضلعی محیطی است.

۲۰ الف) با توجه به شکل داریم:

$۸۴^\circ + y + \overset{\frown}{BC} = ۳۶۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{BC} = ۳۶۰^\circ - ۸۴^\circ - ۱۴۰^\circ = ۱۳۶^\circ$

$\hat{x} = \overset{\frown}{BC} = ۱۳۶$

ب)

$\hat{x} = ۱۶۵^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{BC} = ۱۶۵^\circ \Rightarrow ۸۴^\circ + ۱۶۵^\circ + y = ۳۶۰^\circ \Rightarrow \hat{y} = ۱۱۱^\circ$

۲۱

$\overset{\triangle}{AMB} : MQ$ نیمساز $: \dfrac{AQ}{BQ} = \dfrac{AM}{BM}$, $BM = MC$

$\overset{\triangle}{AMC} : MP$ نیمساز $: \dfrac{AP}{CP} = \dfrac{AM}{MC}$

$\Rightarrow \dfrac{AQ}{BQ} = \dfrac{AP}{CP} \xrightarrow{\text{عکس تالس}} PQ \parallel BC$

۲۲

$\overset{\triangle}{AMB} : c^۲ = AM^۲ + BM^۲ - ۲AM \cdot BM \cdot \cos\alpha$, $BM = CM = \dfrac{a}{۲}$

$\Rightarrow c^۲ = m_a^۲ + \dfrac{a^۲}{۴} - ۲m_a \cdot \dfrac{a}{۲} \cdot \cos\alpha$

$\overset{\triangle}{AMC} : b^۲ = AM^۲ + CM^۲ - ۲AM \cdot CM \cdot \cos(۱۸۰^\circ - \alpha)$, $\cos(۱۸۰^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$

$\Rightarrow b^۲ = m_a^۲ + \dfrac{a^۲}{۴} - ۲m_a \cdot \dfrac{a}{۲} \times (-\cos\alpha) = m_a^۲ + \dfrac{a^۲}{۴} + ۲m_a \cdot \dfrac{a}{۲} \cdot \cos\alpha$

$\Rightarrow b^۲ + c^۲ = ۲m_a^۲ + \dfrac{a^۲}{۲}$

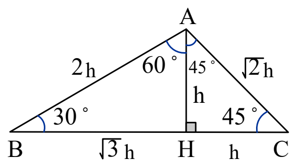
برای بقیهٔ میانه‌ها هم به همین ترتیب، اثبات می‌شود:

$a^۲ + c^۲ = ۲m_b^۲ + \dfrac{b^۲}{۲}$, $a^۲ + b^۲ = ۲m_c^۲ + \dfrac{c^۲}{۲}$

$$\begin{cases} b^۲ + c^۲ = ۲AM^۲ + \dfrac{a^۲}{۲} \Rightarrow ۶^۲ + ۴^۲ = ۲AM^۲ + \dfrac{۸^۲}{۲} \\ b = ۶, c = ۴, a = ۸ \end{cases}$$

$$\Rightarrow ۳۶ + ۱۶ = ۲AM^۲ + ۳۲ \Rightarrow ۲AM^۲ = ۲۰ \Rightarrow AM = \sqrt{۱۰}$$

۲۳ با فرض $AH = h$ داریم:



$$\overset{\Delta}{AHC} : \hat{C} = \widehat{HAC} = ۴۵^\circ \Rightarrow AC = \sqrt{۲}h \ , \ CH = h$$

$$\overset{\Delta}{ABH} : \hat{B} = ۳۰^\circ \ , \sin ۳۰^\circ = \frac{AH}{AB} = \frac{h}{AB} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow AB = ۲h$$

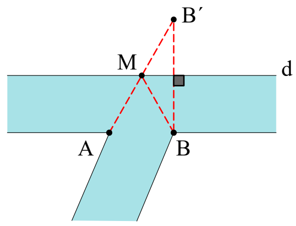
$$H\hat{A}B = ۶۰^\circ \ , \sin ۶۰^\circ = \frac{BH}{AB} \Rightarrow \ BH = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \times ۲h = \sqrt{۳}h$$

$$BC = ۲۰ = h + \sqrt{۳}h = h(۱ + \sqrt{۳}) \Rightarrow h = \frac{۲۰}{\sqrt{۳} + ۱} \times \frac{\sqrt{۳} - ۱}{\sqrt{۳} - ۱} = ۱۰(\sqrt{۳} - ۱)$$

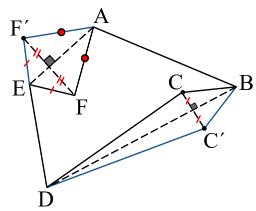
$$AB = ۲h = ۲۰(\sqrt{۳} - ۱) \quad , \quad AC = ۱۰\sqrt{۲}(\sqrt{۳} - ۱)$$

۲۴

این مسأله به این معناست که روی خط d، نقطهٔ M را طوری بیابیم که مسیر AMB کوتاه‌ترین باشد. برای این کار، بازتاب B نسبت به d (B') را یافته و به A وصل می‌کنیم. طبق مسأله هرون مسیر AMB کوتاه‌ترین مسیر می‌باشد. پس اسکلهٔ سوم در M قرار می‌گیرد.



۲۵ الف) بنابر مسائل هم‌محیطی، کافی است که در رأس‌هایی که زوایا بیشتر از ۱۸۰° هستند، بازتاب محوری انجام شود:



AE محور بازتاب $\Rightarrow F$ بازتاب F'

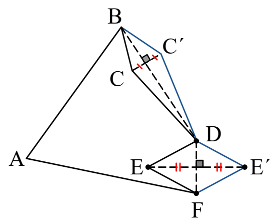
$\Rightarrow AF = AF' \quad , \quad EF = EF'$

BD محور بازتاب $\Rightarrow C$ بازتاب C'

$\Rightarrow BC = BC' \quad , \quad DC = DC'$

$$\Rightarrow \begin{cases} ABCDEF \text{ محیط } = \text{ محیط } ABC'DEF' \\ S_{ABC'DEF'} > S_{ABCDEF} \end{cases}$$

ب)



BD محور بازتاب $\Rightarrow C$ بازتاب C'

$\Rightarrow BC = BC' \quad , \quad DC = DC'$

DF محور بازتاب $\Rightarrow E$ بازتاب E'

$\Rightarrow DE = DE' \quad , \quad FE = FE'$

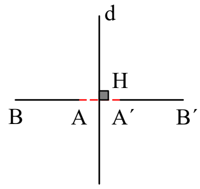
$$\Rightarrow \begin{cases} ABCDEF \text{ محیط } = \text{ محیط } ABC'DE'F \\ S_{ABC'DE'F} > S_{ABCDEF} \end{cases}$$

۲۶

$AB \perp d \ , \hat{H} = ۹۰^\circ$

$AH = A'H, BH = B'H$

$$\begin{cases} AB = BH - AH \\ A'B' = B'H - A'H \end{cases} \Rightarrow AB = A'B'$$



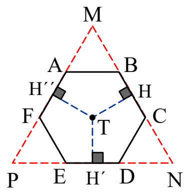
۲۷ قسمت‌های (الف) و (ب): زوایای داخلی شش‌ضلعی منتظم برابر با ۱۲۰° می‌باشد. پس زوایای مثلث‌های ABM و PFE و CDN برابر با ۶۰° می‌باشد. بنابراین: $\hat{M} = \hat{N} = \hat{P} = ۶۰^\circ$.

$$(\text{ضلع شش‌ضلعی } a) \Rightarrow \overset{\triangle}{MNP} \text{ ضلع } = ۳a \Rightarrow S_{\overset{\triangle}{MNP}} = \frac{\sqrt{۳}}{۴}(۳a)^۲ = \frac{۹\sqrt{۳}}{۴}a^۲$$

$$\text{مساحت شش‌ضلعی} = \frac{۳\sqrt{۳}}{۲}a^۲ \Rightarrow \text{مساحت شش ضلعی} = \frac{۲}{۳} \times S_{\overset{\triangle}{MNP}}$$

قسمت‌های (پ) و (ت): مجموع طول‌های سه عمود TH و TH' و TH'' برابر است با ارتفاع مثلث MNP:

$$\overset{\triangle}{MNP} \text{ ارتفاع} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \times (۳a) = \frac{۳\sqrt{۳}}{۲}a$$



$$S_{\overset{\triangle}{TBC}} + S_{\overset{\triangle}{TDE}} + S_{\overset{\triangle}{TAF}} = \frac{۱}{۲}(TH + TH' + TH'') \times a = \frac{۳\sqrt{۳}}{۴}a^۲$$

$$= \frac{۱}{۲}S_{\text{شش‌ضلعی}} \Rightarrow S_{\overset{\triangle}{TAB}} + S_{\overset{\triangle}{TEF}} + S_{\overset{\triangle}{TCD}} = \frac{۱}{۲} \times S_{\text{شش‌ضلعی}}$$

۲۸

$$DC = ۹, CM = ۲DM \Rightarrow DM = ۳, CM = ۶$$

$$\text{روابط طولی}: DM \times MC = AM \times MB \Rightarrow \begin{cases} AM \times MB = ۳ \times ۶ = ۱۸ \\ AM + MB = ۱۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} AM = ۲ \\ BM = ۹ \end{cases} \Rightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{۲}{۹}$$

۲۹

$$A\overset{\triangle}{P}C \text{ قانون کسینوس‌ها در}: (۷\sqrt{۲})^۲ = (۵\sqrt{۲})^۲ + (۳\sqrt{۲})^۲ - ۲ \times ۵\sqrt{۲} \times ۳\sqrt{۲} \times \cos\hat{P}$$

$$۲ \times ۴۹ = ۲۵ \times ۲ + ۹ \times ۲ - ۶۰\cos\hat{P} \Rightarrow \cos\hat{P} = \frac{-۱}{۲} \Rightarrow \hat{P} = ۱۲۰^\circ$$

$$\text{رابطهٔ سینوسی مساحت}: S_{A\overset{\triangle}{P}B} = \frac{۱}{۲} \times ۲\sqrt{۳} \times ۳\sqrt{۲} \times \underbrace{\sin ۶۰^\circ}_{\frac{\sqrt{۳}}{۲}} = \frac{۹\sqrt{۲}}{۲}$$

۳۰ مساحت مستطیل برابر است با نصف حاصل‌ضرب قطرها در سینوس زاویه بین قطرها:

$$S_{ABCD} = \frac{۱}{۲} \times ۱۲ \times ۱۲ \times \underbrace{\sin ۶۰^\circ}_{\frac{\sqrt{۳}}{۲}} = ۳۶\sqrt{۳}$$

۳۱

$$B\hat{A}C = ۱۸۰^\circ - ۶۰^\circ = ۱۲۰^\circ$$

$$\text{رابطهٔ سینوسی مساحت}: S = \frac{۱}{۲} \times ۳ \times ۹ \times \underbrace{\sin ۱۲۰^\circ}_{\frac{\sqrt{۳}}{۲}} = \frac{۲۷\sqrt{۳}}{۴}$$

۳۲

$$S = \frac{۱}{۲}a \cdot h_a = \frac{۱}{۲}b \cdot h_b = \frac{۱}{۲}c \cdot h_c$$

$$S = \frac{۱}{۲}a \times ۳ = \frac{۱}{۲}b \times ۴ = \frac{۱}{۲}c \times ۶ \Rightarrow a = \frac{۲S}{۳}, \quad b = \frac{S}{۲}, \quad c = \frac{S}{۳}$$

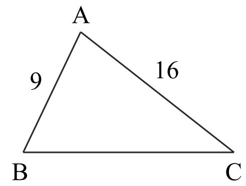
مساحت مثلث را از دستور هرون به‌دست می‌آوریم:

$$p = \frac{a+b+c}{۲} = \frac{\frac{۲S}{۳} + \frac{S}{۲} + \frac{S}{۳}}{۲} = \frac{۳}{۴}S$$

$$p-a=\frac{۳}{۴}S-\frac{۲S}{۳}=\frac{S}{۱۲}\ ,\ p-b=\frac{۳S}{۴}-\frac{S}{۲}=\frac{S}{۴}\ ,\ p-c=\frac{۳}{۴}S-\frac{S}{۳}=\frac{۵S}{۱۲}$$

$$\Rightarrow S=\sqrt{\frac{۳S}{۴}\times\frac{S}{۱۲}\times\frac{S}{۴}\times\frac{۵S}{۱۲}}\Rightarrow S=\frac{\sqrt{۱۵}}{۴۸}S^{۲}\Rightarrow S=\frac{۴۸}{\sqrt{۱۵}}$$

۳۳



رابطهٔ سینوسی مساحت : $S=\frac{۱}{۲}AB\times AC\times\sin\hat{A}$

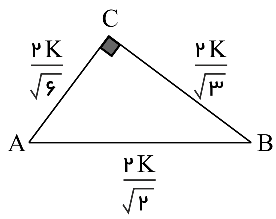
$$S=\frac{۱}{۲}\times ۹\times ۱۶\times\sin\hat{A}=۲۴\sqrt{۵}$$

$$\Rightarrow \sin\hat{A}=\frac{\sqrt{۵}}{۳}\Rightarrow\cos\hat{A}=\sqrt{۱-\left(\frac{\sqrt{۵}}{۳}\right)^{۲}}=\pm\frac{۲}{۳}$$

قانون کسینوس‌ها : $BC^{۲}=۹^{۲}+۱۶^{۲}-۲\times ۹\times ۱۶\times\underbrace{\cos\hat{A}}_{\pm\frac{۲}{۳}}$ (مقدار بیشتر با $\frac{-۲}{۳}$)

$$BC^{۲}=۵۲۹\Rightarrow BC=۲۳$$

۳۴ داریم:



$$\frac{۱}{(\sqrt{۳})^{۲}}+\frac{۱}{(\sqrt{۶})^{۲}}=\frac{۱}{(\sqrt{۲})^{۲}}$$

بنابراین داریم که:

$$\frac{۱}{h_a^{۲}}+\frac{۱}{h_b^{۲}}=\frac{۱}{h_c^{۲}}\ ,\ \frac{۱}{h_a}=\frac{a}{۲S}\ ,\ \frac{۱}{h_b}=\frac{b}{۲S}\ ,\ \frac{۱}{h_c}=\frac{c}{۲S}$$

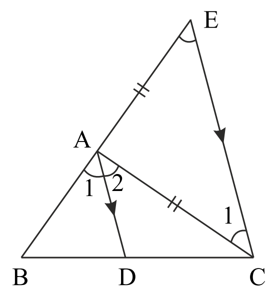
$\Rightarrow\frac{a^{۲}}{۴S^{۲}}+\frac{b^{۲}}{۴S^{۲}}=\frac{c^{۲}}{۴S^{۲}}\Rightarrow a^{۲}+b^{۲}=c^{۲}$ (c وتر است)

بنابراین، مثلث قائم‌الزاویه است.

$$S=\frac{۱}{۲}a\cdot h_a=\frac{۱}{۲}b\cdot h_b=\frac{۱}{۲}c\cdot h_c\Rightarrow\frac{۱}{۲}\times a\cdot\sqrt{۶}=\frac{۱}{۲}b\cdot\sqrt{۳}=\frac{۱}{۲}c\cdot\sqrt{۲}=k$$

$$\Rightarrow c=\frac{۲k}{\sqrt{۲}}\ ,\ b=\frac{۲k}{\sqrt{۳}}\ ,\ a=\frac{۲k}{\sqrt{۶}}\Rightarrow\sin\hat{A}=\frac{BC}{AB}=\frac{a}{c}=\frac{\frac{۲k}{\sqrt{۶}}}{\frac{۲k}{\sqrt{۲}}}=\frac{۱}{\sqrt{۳}}\Rightarrow\hat{A}=۶۰^{\circ}\Rightarrow\hat{B}=۳۰^{\circ}$$

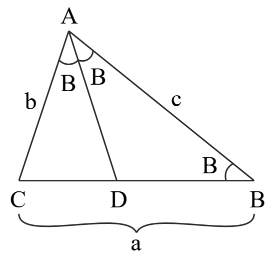
۳۵ مطابق شکل، $AD\parallel CE$ است. داریم:



$$\begin{cases}AD\parallel CE \text{ و مورب } BE\Rightarrow\hat{A}_{۱}=\hat{E}\\ AD\parallel CE \text{ و مورب } AC\Rightarrow\hat{A}_{۲}=\hat{C}_{۱}\end{cases}\ ,\ \hat{A}_{۱}=\hat{A}_{۲}\Rightarrow\hat{C}_{۱}=\hat{E}\Rightarrow AE=AC$$

$$AD\parallel CE\xrightarrow{\text{تالس}}\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AE}=\frac{AB}{AC}$$

۳۶



$$\text{نیمساز } AD \Rightarrow C\hat{A}D = D\hat{A}B = \hat{B} \Rightarrow AD = BD$$

$$\text{مشترک } \hat{C}\,,\ C\hat{A}D = \hat{B} \Rightarrow \overset{\Delta}{ACD} \sim \overset{\Delta}{ABC}$$

$$\Rightarrow \frac{CD}{b} = \frac{b}{a} \Rightarrow CD = \frac{b^۲}{a} \quad (۱)$$

$$\text{نیمساز } AD: \frac{CD}{BD} = \frac{b}{c} \Rightarrow \frac{CD}{a} = \frac{b}{b+c} \Rightarrow CD = \frac{ab}{b+c} \quad (۲)$$

$$(۱)\,,\,(۲) \Rightarrow \frac{ab}{b+c} = \frac{b^۲}{a} \Rightarrow a^۲ = b^۲ + bc \Rightarrow a^۲ - b^۲ = bc$$

(۳۷) مطابق شکل، AD نیمساز است. داریم:

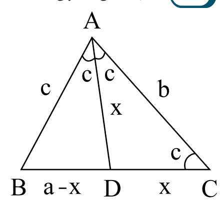
$$\frac{BD}{DC} = \frac{۲}{۸} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow \frac{BD}{BC} = \frac{۱}{۵} \Rightarrow \frac{BD}{۷} = \frac{۱}{۵} \Rightarrow BD = \frac{۷}{۵}$$

$$\overset{\Delta}{ABD}: \quad \text{نیمساز} \quad BI \Rightarrow \frac{AI}{DI} = \frac{AB}{BD} \Rightarrow \frac{AI}{DI} = \frac{۲}{\frac{۷}{۵}} = \frac{۱۰}{۷} \Rightarrow \frac{AI}{AD} = \frac{۱۰}{۱۷}$$

$$MN \parallel BC \Rightarrow \overset{\Delta}{AMN} \sim \overset{\Delta}{ABC} \Rightarrow \frac{S_{\overset{\Delta}{AMN}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}} = \left(\frac{۱۰}{۱۷}\right)^۲ = \frac{۱۰۰}{۲۸۹}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{MNCB}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}} = ۱ - \frac{۱۰۰}{۲۸۹} = \frac{۱۸۹}{۲۸۹}$$

(۳۸) در شکل مقابل، AD نیمساز داخلی $\hat{A}$ است. داریم:



$$B\hat{A}D = D\hat{A}C = \frac{\hat{A}}{۲} = \frac{۲\hat{C}}{۲} = \hat{C} \Rightarrow AD = CD = x\,,\ BD = a - x$$

$$AD^۲ = AB \cdot AC - BD \cdot CD \Rightarrow x^۲ = bc - x(a-x) = bc - ax + x^۲$$

$$\Rightarrow bc - ax = ۰ \Rightarrow ax = bc \Rightarrow x = \frac{bc}{a} \Rightarrow x = \frac{۶ \times ۸}{a} = \frac{۴۸}{a} \quad (۱)$$

$$\text{نیمساز } AD: \frac{BD}{DC} = \frac{c}{b} \Rightarrow \frac{a-x}{x} = \frac{۸}{۶} = \frac{۴}{۳} \Rightarrow ۴x = ۳a - ۳x \Rightarrow ۷x = ۳a \Rightarrow x = \frac{۳a}{۷} \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱)\,,\,(۲)} \frac{۳a}{۷} = \frac{۴۸}{a} \Rightarrow a^۲ = ۱۶ \times ۷ \Rightarrow a = ۴\sqrt{۷}$$

(۳۹)

$$AD = \frac{۲AB \cdot AC \cdot \cos\frac{\hat{A}}{۲}}{AB + AC} \Rightarrow AD = \frac{۲ \times (x+۲)(x+۳) \times \overbrace{\cos ۶۰^\circ}^{\frac{۱}{۲}}}{\underbrace{x+۲+x+۳}_{۲x+۵}}$$

$$\Rightarrow x(۲x+۵) = x^۲ + ۵x + ۶ \Rightarrow ۲x^۲ + ۵x = x^۲ + ۵x + ۶ \Rightarrow x^۲ = ۶ \Rightarrow x = \sqrt{۶}$$

(۴۰)

$$AD^۲ = AB \cdot AC - BD \cdot DC$$

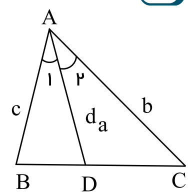
$$\text{قضیهٔ نیمسازها}: \frac{BD}{DC} = \frac{۳}{۵} \Rightarrow \frac{BD}{\underbrace{BC}_{۷}} = \frac{۳}{۸} \Rightarrow BD = \frac{۲۱}{۸}\,,\ CD = \frac{۳۵}{۸}$$

$$\Rightarrow AD^۲ = ۳ \times ۵ - \frac{۲۱}{۸} \times \frac{۳۵}{۸} \Rightarrow AD = \frac{۱۵}{۸}$$

$$\text{قضیهٔ نیمساز ها در } \overset{\Delta}{ABD}: \frac{x}{AE} = \frac{BD}{AD} \Rightarrow \frac{x}{AB} = \frac{BD}{AD + BD}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{۳}=\frac{\frac{۲۱}{۸}}{\frac{۱۵}{۸}+\frac{۲۱}{۸}}=\frac{\frac{۲۱}{۸}}{\frac{۳۶}{۸}}=\frac{۲۱}{۳۶}=\frac{۷}{۱۲}\Rightarrow x=\frac{۷\times ۳}{۱۲}=\frac{۷}{۴}$$

۴۱



$$\hat{A}_۱=\hat{A}_۲=\frac{\hat{A}}{۲}$$

$$S_{\overset{\Delta}{ABD}}+S_{\overset{\Delta}{ADC}}=S_{\overset{\Delta}{ABC}}$$

با نوشتن مساحت سینوسی برای مثلث ABC داریم:

$$\frac{۱}{۲}\times d_a\times c\times \sin\frac{\hat{A}}{۲}+\frac{۱}{۲}\times d_a\times b\times \sin\frac{\hat{A}}{۲}=\frac{۱}{۲}bc\cdot\sin\hat{A}=\frac{۱}{۲}bc\times ۲\sin\frac{\hat{A}}{۲}\cdot\cos\frac{\hat{A}}{۲}$$

$$\frac{۱}{۲}\sin\frac{\hat{A}}{۲}\times d_a(b+c)=\frac{۱}{۲}bc\cdot ۲\sin\frac{\hat{A}}{۲}\cdot\cos\frac{\hat{A}}{۲}$$

$$\Rightarrow (b+c)d_a=۲bc\cdot\cos\frac{\hat{A}}{۲}\Rightarrow da=\frac{۲bc\cdot\cos\frac{\hat{A}}{۲}}{b+c}$$

۴۲ می‌دانیم در هر متوازی‌الاضلاع، مجموع مربعات قطرها برابر است با مجموع مربعات چهارضلعی، یعنی:

مجموع مربعات قطرها $=۲(۳^۲+۴^۲)=۲\times ۵^۲=۵۰$

۴۳ می‌دانیم که:

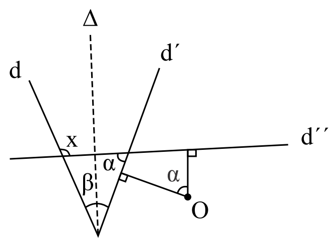
$$\hat{A}>۹۰^\circ \Leftrightarrow \sqrt{b^۲+c^۲}<a<b+c$$

$$\Rightarrow \sqrt{۳^۲+۴^۲}<x-۱<۳+۴\Rightarrow ۵<x-۱<۷\Rightarrow ۶<x<۸$$

۴۴

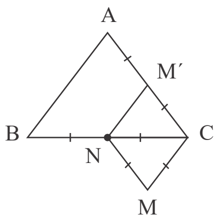
مطابق شکل، خط d به محوریت Δ بازتاب می‌شود که d' می‌باشد.

به مرکز O و زاویهٔ α خط d' را دوران می‌دهیم تا خط d'' حاصل شود. مطابق شکل داریم: $x=\alpha+\beta$.



۴۵

مطابق شکل، $M'\overset{\Delta}{N}C$ بازتاب محوری $M\overset{\Delta}{N}C$ نسبت به محور BC است. از آنجا که:



$$\begin{cases} CM'=CN=\frac{BC}{۲}\Rightarrow CM'=\frac{AC}{۲} \\ CN=\frac{BC}{۲} \end{cases}\Rightarrow \text{عکس تالس}: M'N||AB\Rightarrow \frac{CA}{CM'}=\frac{CB}{CN}=۲$$

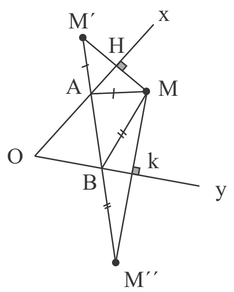
پس $N\overset{\Delta}{M'}C$ با تجانس به مرکز C و نسبت $k=۲$، به $\overset{\Delta}{ABC}$ تصویر می‌شود.

۴۶

هندسه یازدهم

مطابق شکل، بازتاب M نسبت به Ox و Oy به‌ترتیب، M' و M'' می‌باشد.

$M'M''$ اضلاع زاویه را در A و B قطع می‌کند.

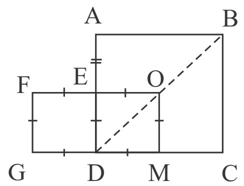


محیط $M\overset{\triangle}{A}B$ کمترین می‌باشد، زیرا:

$$\begin{cases} MA = AM' \\ MB = M''B \end{cases} \Rightarrow MA + MB + AB = M'A + M''B + AB = M'M''$$

(۴۷)

مطابق شکل، مربع $OEDM$ بازتاب محوری $EFGD$ نسبت به محور AD می‌باشد.



از آنجا که CD و BD و AD در D همرسند و داریم: $\frac{CD}{DM} = \frac{DB}{OD} = \frac{AD}{DE} = ۲$، پس $ABCD$ مجانس $OEDM$ به مرکز تجانس D و ضریب ۲ می‌باشد.

همچنین می‌توان با دوران $EFGD$ به مرکز D و زاویهٔ -۹۰°، $OEDM$ را به‌وجود آورد و سپس با تجانس به مرکز D و ضریب $k = ۲$، آن را بر $ABCD$ تصویر کرد.

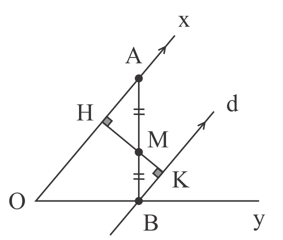
(۴۸)

مطابق شکل، MH بر Ox عمود است. قرینهٔ H نسبت به M، نقطهٔ K می‌باشد. از نقطهٔ K خط d عمود بر HK می‌گذرانیم.

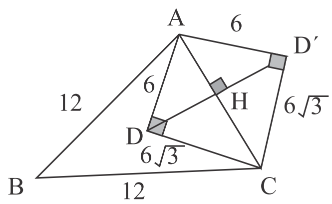
$d||Ox$ می‌باشد و Oy را در B قطع می‌کند.

دو مثلث MAH و MBK هم‌نهشت هستند، پس داریم: $AM = MB$.

در این روش از بازتاب مرکزی H نسبت به M استفاده کردیم.



(۴۹) اگر بخواهیم بدون تغییر محیط، مساحت چهارضلعی را افزایش دهیم باید بازتاب D را نسبت به محور AC بدست آوریم. بدین ترتیب چهارضلعی جدید محیطش با محیط $ABCD$ برابر است و مساحت آن از مساحت $ABCD$ بیشتر است. به این ترتیب داریم:



$$A\overset{\triangle}{D}C : AC^۲ = ۶^۲ + (۶\sqrt{۳})^۲ \Rightarrow AC = ۱۲$$

$$S_{\overset{\triangle}{AD'C}} = \frac{۶ \times ۶\sqrt{۳}}{۲} = ۱۸\sqrt{۳}$$

افزایش مساحت برابر است با:

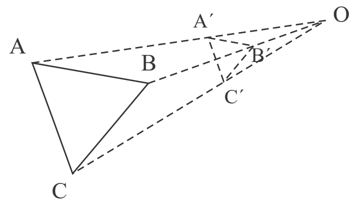
$$۲S_{\overset{\triangle}{ADC}} = ۲ \times ۱۸\sqrt{۳} = ۳۶\sqrt{۳}$$

(۵۰) اگر مرکز تجانس روی خط قرار گیرد، مجانس خط بر آن منطبق می‌شود. اگر محور بازتاب، همان خط یا محور عمود بر خط باشد، بازتاب خط بر خود آن منطبق خواهد شد. با انتقال خط تحت برداری موازی با خط، تصویر انتقال بر خط منطبق خواهد شد.

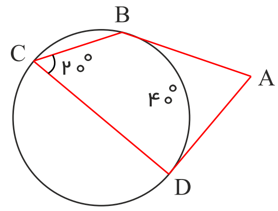
(۵۱) مطابق شکل، مثلث $A'B'C'$ مجانس مستقیم انقباضی مثلث ABC به مرکز تجانس O و ضریب k است. داریم:

$$k = \frac{OA'}{AA'} = ۳ \Rightarrow \frac{OA'}{OA' + AA'} = \frac{OA'}{OA} = \frac{۳}{۴}$$

$$\frac{S(A'\overset{\triangle}{B'}C')}{S(A\overset{\triangle}{B}C)} = (\frac{OA'}{OA})^۲ = \frac{۹}{۱۶} \Rightarrow S(A\overset{\triangle}{B}C) = \frac{۱۶}{۹} S(A'\overset{\triangle}{B'}C')$$



۵۲

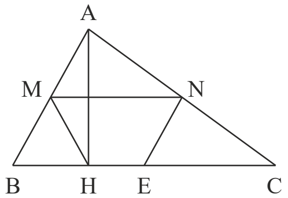


$$\left.\begin{array}{l}\hat{C} = ۲۰^\circ \\ \hat{C} = \dfrac{\widehat{BD}}{۲}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\widehat{BD}}{۲} = ۲۰^\circ \Rightarrow \widehat{BD} = ۴۰^\circ \Rightarrow \widehat{BCD} = ۳۶۰^\circ - ۴۰^\circ = ۳۲۰^\circ$$

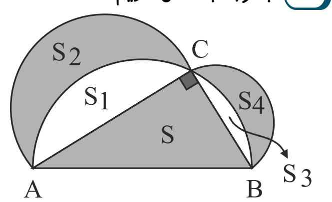
$$\hat{A} = \frac{\widehat{BCD} - \widehat{BD}}{۲} = \frac{۳۲۰^\circ - ۴۰^\circ}{۲} = \frac{۲۸۰^\circ}{۲} = ۱۴۰^\circ$$

۵۳

اگر M و N و E وسط اضلاع و H پای ارتفاع باشد آنگاه چون میانه وارد بر وتر نصف وتر است، $NE = MH = \frac{AB}{۲}$ و $MN||BC$. پس چهارضلعی $MNEH$ ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین است. در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین زوایای مقابل مکمل‌اند پس نوع چهارضلعی، ذوزنقه محاطی است.



۵۴ با توجه به شکل داریم:



$$\hat{C} = ۹۰^\circ \Rightarrow AB^۲ = AC^۲ + BC^۲$$
$$\Rightarrow \frac{\pi}{۴}AB^۲ = \frac{\pi}{۴}AC^۲ + \frac{\pi}{۴}BC^۲$$

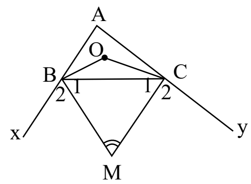
⇒ مساحت نیم‌دایره به قطر BC + مساحت نیم‌دایره به قطر AC = مساحت نیم‌دایره به قطر AB

$$\Rightarrow S + \cancel{S_۱} + \cancel{S_۳} = (\cancel{S_۱} + S_۲) + (\cancel{S_۳} + S_۴) \Rightarrow S = S_۲ + S_۴ \Rightarrow \frac{S_۲ + S_۴}{S} = ۱$$

۵۵ روابط طولی را در دو دایره می‌نویسیم:

$$\begin{array}{l} C_۱ \text{ دردایرهٔ}: MT^۲ = MC \cdot MD \\ C_۲ \text{ دردایرهٔ}: MT'^۲ = MA \cdot MB \end{array} \Rightarrow \frac{MA \cdot MB}{MC \cdot MD} = \frac{MT'^۲}{MT^۲} = \left(\frac{MT'}{MT}\right)^۲ = ۳^۲ = ۹$$

۵۶



$$\hat{M} = ۱۸۰^\circ - (\hat{B}_۱ + \hat{C}_۱) = ۱۸۰^\circ - \frac{۱}{۲}(۱۸۰^\circ - \hat{B} + ۱۸۰^\circ - \hat{C})$$
$$\Rightarrow \hat{M} = ۱۸۰^\circ - \tfrac{۱}{۲}(۳۶۰^\circ - (۱۸۰^\circ - \hat{A}))$$

$$\Rightarrow \hat{M} = ۱۸۰^\circ - \frac{۱}{۲}(۱۸۰^\circ + \hat{A}) \Rightarrow \hat{M} = ۹۰^\circ - \frac{۱}{۲}\hat{A}$$

از طرفی می‌دانیم که $B\hat{O}C = ۹۰^\circ + \frac{\hat{A}}{۲}$ پس:

$$\hat{M} + \hat{O} = ۹۰^\circ - \frac{\hat{A}}{۲} + ۹۰^\circ + \frac{\hat{A}}{۲} = ۱۸۰^\circ$$

پس $BOCM$ محاطی است.

راه دوم:

$$\left\{\begin{array}{l} O\hat{B}M = O\hat{B}C + C\hat{B}M = \dfrac{A\hat{B}x}{۲} = ۹۰^\circ \\ O\hat{C}M = O\hat{C}B + B\hat{C}M = \dfrac{A\hat{C}y}{۲} = ۹۰^\circ \end{array}\right. \Rightarrow O\hat{C}M + O\hat{B}M = ۱۸۰^\circ$$

پس $BOCM$ محاطی است.

۵۷ با توجه به شکل داریم:

$$۵y+۳x+۳y+۵x=۳۶۰^\circ \Rightarrow ۸(x+y)=۳۶۰^\circ \Rightarrow x+y=۴۵^\circ$$

$$(\text{محاطی})\, M\hat{A}N=\frac{۳x+۳y}{۲}=\frac{۳}{۲}(x+y)=۶۷/۵^\circ$$

۵۸ فاصلهٔ مرکز دایره محیطی شش‌ضلعی منتظم تا یک ضلع برابر ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاع است. زیرا شش‌ضلعی منتظم از ۶ مثلث متساوی‌الاضلاع تشکیل می‌شود.

$$\text{محیط}=۱۲\sqrt{۳} \Rightarrow ۶a=۱۲\sqrt{۳} \Rightarrow a=۲\sqrt{۳}$$

$$h=\frac{\sqrt{۳}}{۲}a=\frac{\sqrt{۳}}{۲}(۲\sqrt{۳})=۳$$

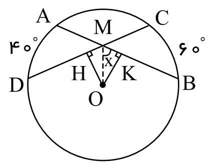
۵۹

$$AB=AC \Rightarrow \hat{C}=\hat{B}\,,\quad (\text{ظلی})\quad D\hat{A}C=\frac{\overset{\frown}{AD}}{۲}\,,\ (\text{محاطی})\quad \hat{B}=\frac{\overset{\frown}{AD}}{۲} \Rightarrow D\hat{A}C=\hat{B}, \hat{B}=\hat{C} \Rightarrow \hat{C}=D\hat{A}C \Rightarrow AD=DC$$

۶۰ دو وتر AB و CD مساوی‌اند، پس فاصلهٔ مرکز دایره O از AB و CD برابر است، پس OM نیمساز زاویه $D\hat{M}B$ می‌باشد:

$$OH=OK, \hat{H}=\hat{K}=۹۰^\circ \Rightarrow O\overset{\triangle}{M}H \cong O\overset{\triangle}{K}K$$

$$\Rightarrow O\hat{M}K=\frac{D\hat{M}B}{۲}$$



$$\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{BC}=۴۰^\circ+۶۰^\circ=۱۰۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BD}=۳۶۰^\circ-۱۰۰^\circ=۲۶۰^\circ$$

$$D\hat{M}B=\frac{\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BD}}{۲}=\frac{۲۶۰^\circ}{۲}=۱۳۰^\circ \Rightarrow x=\frac{D\hat{M}B}{۲}=\frac{۱۳۰^\circ}{۲}=۶۵^\circ$$

۶۱

$$\text{طبق روابط طولی}:\ \begin{cases} MA\times MB=ME\times MH \\ MA\times MB=MF\times MG \end{cases} \Rightarrow ME\times MH=MF\times MG$$

طبق قضیهٔ عکس روابط طولی، از چهار نقطهٔ E، F، G و H یک دایره می‌گذرد، پس $EFGH$ محاطی است.

۶۲

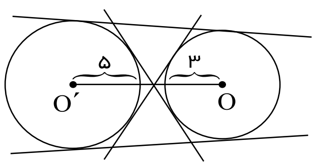
$$(\text{ظلی})\quad \hat{M}=\frac{\overset{\frown}{BM}}{۲} \Rightarrow ۸۰^\circ=\frac{\overset{\frown}{BM}}{۲} \Rightarrow \overset{\frown}{BM}=۱۶۰^\circ$$

$$AB \parallel EF \Rightarrow \overset{\frown}{MA}=\overset{\frown}{MB}=۱۶۰^\circ \Rightarrow y=۳۶۰^\circ-(۱۶۰+۱۶۰)=۴۰^\circ$$

$$A\overset{\triangle}{O}B: OA=OB,\quad (\text{مرکزی})\quad A\hat{O}B=y=۴۰^\circ, O\hat{A}B=O\hat{B}A=x$$

$$\Rightarrow ۲x+۴۰^\circ=۱۸۰^\circ \Rightarrow x=۷۰^\circ$$

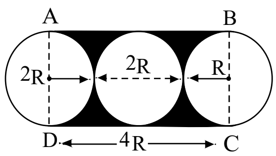
۶۳ تمام خطوطی که از O به فاصلهٔ ۳ هستند، خطوط مماس بر دایرهٔ C هستند و همچنین خطوطی که به فاصلهٔ ۵ از O' قرار دارند، خطوط مماس بر دایرهٔ C' هستند. بنابراین خط‌هایی این دو ویژگی را با هم دارند که بر هر دو دایره مماس باشند، یا به‌عبارت دیگر مماس مشترک دو دایره باشند، حال چون $OO' > R+R'$ است، دو دایره متخارج هستند و ۴ مماس مشترک دارند و ۴ خط راست با این ویژگی‌ها وجود دارد.



۶۴

$$MA\cdot MB=MC\cdot MD \Rightarrow ۳\times ۶=۲/۵\times MD \Rightarrow MD=۷/۲$$

۶۵ سطح رنگی برابر است با مساحت مستطیل $ABCD$ منهای مساحت دو دایرهٔ کامل به شعاع R یعنی:



$$S_{\text{رنگی}}=(۲R)(۴R)-۲(\pi R^۲)=۸R^۲-۲\pi R^۲=۲R^۲(۴-\pi)$$

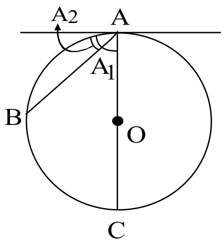
۶۶ چون M وسط کمان $\overset{\frown}{EF}$ است پس $\overset{\frown}{ME}=\overset{\frown}{FM}$ و در ضمن داریم:

$$\begin{cases} \text{محاطی } \hat{B} = \dfrac{\overset{\frown}{CF} + \overset{\frown}{FM}}{۲} \\ \text{زاویهٔ بین دو وتر } \hat{D} = \dfrac{(\overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{BE}) + \overset{\frown}{FM}}{۲} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \hat{B} + \hat{D} = \dfrac{\overset{\frown}{CF} + \overset{\frown}{FM} + \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{BE} + \overset{\frown}{FM}}{۲} \xrightarrow{\overset{\frown}{FM}=\overset{\frown}{ME}} \dfrac{۳۶۰^\circ}{۲} = ۱۸۰^\circ$$

۶۷ در شکل، ACقطر دایره است. قطر، محیط دایره را به دو قسمت برابر تقسیم می‌کند.

یعنی هر کدام از این کمان‌ها برابر با ۱۸۰° است، داریم:



$$\text{(ظلی)}\ \hat{A}_۲ = ۵۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = ۱۰۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{BC} = ۱۸۰^\circ - ۱۰۰^\circ = ۸۰^\circ$$

۶۸ از موازی بودن وترها نتیجه می‌شود که:

$$\begin{cases} AB \parallel FC \Rightarrow \overset{\frown}{AF} = \overset{\frown}{BC} = x \\ BE \parallel DC \Rightarrow \overset{\frown}{ED} = \overset{\frown}{BC} = x \end{cases} \Rightarrow \overset{\frown}{AF} = \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{ED} = x$$

از طرفی داریم:

$$۶۰^\circ + x + ۴۰^\circ + x + ۱۱۰^\circ + x = ۳۶۰^\circ \Rightarrow ۳x = ۱۵۰^\circ \Rightarrow x = ۵۰^\circ$$

چون زاویه‌ی محاطی $F\hat{C}D$ روبه‌رو به کمان $\overset{\frown}{FED}$ است، پس با نصف کمان مقابل خودش برابر است:

$$\hat{C} = \dfrac{۱}{۲}(۱۱۰^\circ + x) = \dfrac{۱}{۲}(۱۱۰^\circ + ۵۰^\circ) = ۸۰^\circ$$

۶۹

طبق شکل داریم:

$$\text{محیط دایره} = A\overset{\frown}{M}B + A\overset{\frown}{N}B \Rightarrow \text{محیط دایره} = ۴A\overset{\frown}{N}B + A\overset{\frown}{N}B \quad \Rightarrow A\overset{\frown}{N}B = \tfrac{۱}{۵}\,(\text{محیط دایره})$$

۷۰ الف) یک مماس مشترک داخلی و دو مماس مشترک خارجی دارد.

$$\text{ب)}\ R = ۴ \quad \text{و} \quad R' = ۹ \xrightarrow{\text{مماس برون}} d = d = ۱۳$$

$$TT' = \sqrt{d^۲ - (R - R')^۲} = \sqrt{(R + R')^۲ - (R - R')^۲} = \sqrt{۱۶۹ - ۲۵} = \sqrt{۱۴۴} = ۱۲$$

۷۱

$$R = ۳ \quad \text{و} \quad R' = ۸ \quad \text{و} \quad d = ۱۳$$

$$TT' = \sqrt{d^۲ - (R - R')^۲} \Rightarrow ۵a - ۳ = \sqrt{۱۳^۲ - (۸ - ۳)^۲}$$

$$\Rightarrow ۵a - ۳ = \sqrt{۱۶۹ - ۲۵} = \sqrt{۱۴۴} = ۱۲ \Rightarrow a = ۳$$

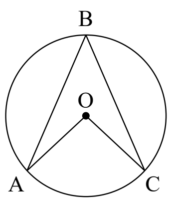
۷۲

طبق فرض داریم:

$$\begin{cases} R = ۲ \\ R' = ۳ \\ d = ۱۳ \end{cases} , \quad TT' = \sqrt{d^۲ - (R + R')^۲}$$

$$\Rightarrow ۵x - ۸ = \sqrt{۱۳^۲ - (۲ + ۳)^۲} \Rightarrow ۵x - ۸ = \sqrt{۱۶۹ - ۲۵} = \sqrt{۱۴۴} = ۱۲ \Rightarrow x = ۴$$

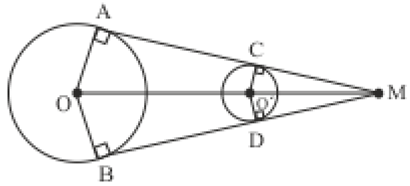
۷۳



$$\begin{cases} A\hat{B}C = \dfrac{\overset{\frown}{AC}}{۲} \\ A\hat{O}C = \overset{\frown}{AC} \end{cases} \Rightarrow \alpha + ۱۶^\circ = \dfrac{۳\alpha + ۱۲^\circ}{۲} \Rightarrow \alpha = ۲۰^\circ \Rightarrow \begin{cases} A\hat{B}C = ۳۶^\circ \\ A\hat{O}C = ۷۲^\circ \end{cases}$$

۷۴

پاره خط OO' را به M وصل می‌کنیم.



$$\begin{cases} OA = OB \\ OM = OM \\ MA = MB \end{cases} \Rightarrow \Delta OAM \cong \Delta OBM \Rightarrow \text{است } A\hat{M}B \text{ نیمساز زاویهٔ } OM$$

$$\begin{cases} O'C = O'D \\ O'M = O'M \\ MC = MD \end{cases} \Rightarrow \Delta O'DM \cong \Delta O'CM \Rightarrow \text{است } A\hat{M}B \text{ نیمساز زاویهٔ } O'M$$

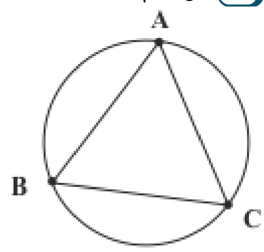
چون هر زاویه یک نیمساز منحصر به فرد دارد پس $O'M, OM$ بر یکدیگر منطبقند و این بدان معناست که نقاط O', M, O بر یک استقامت قرار دارند. پس خط‌المرکزین و مماس‌های مشترک خارجی همرسند.

۷۵

$$\begin{cases} ID \times IE = IS \times IN \\ IE = IN \end{cases} \Rightarrow ID = IS$$

۷۶ می دانیم که همه مثلثها محاطی هستند پس دایره محیطی مثلث ABC را رسم می‌کنیم. داریم:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲} + \frac{\overset{\frown}{AC}}{۲} + \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{AB}}{۲} = \frac{۳۶۰^\circ}{۲} = ۱۸۰^\circ$$



۷۷

$$RS \parallel VT \Rightarrow \overset{\frown}{TS} = \overset{\frown}{RV} = ۷۰^\circ$$

$$\overset{\frown}{TS} + \overset{\frown}{SR} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{SR} = ۱۱۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{TV} = ۱۱۰^\circ$$

$$\hat{۱} = \overset{\frown}{TS} = ۷۰^\circ \quad , \quad \hat{۲} = \frac{\overset{\frown}{TS}}{۲} = ۳۵^\circ \quad , \quad \hat{۳} = \overset{\frown}{RS} = ۱۱۰^\circ$$

$$\hat{۴} = \frac{\overset{\frown}{RV}}{۲} = ۳۵^\circ \quad , \quad \hat{۵} = \frac{\overset{\frown}{SR}}{۲} = ۵۵^\circ \quad , \quad \hat{۶} = \hat{۵} = ۵۵^\circ$$

$$\hat{۷} = \frac{\overset{\frown}{RVT}}{۲} = \frac{۱۸۰^\circ}{۲} = ۹۰^\circ \qquad \hat{۸} = \hat{۲} = ۳۵^\circ$$

۷۸ از نقطهٔ B دو مماس BE, BD بر دایره رسم شده است پس $BD = BE$.

از نقطهٔ C دو مماس CF, CD بر دایره رسم شده است پس $CD = CF$.

$$\text{محیط } \overset{\Delta}{ABC} : P_{ABC} = AB + BC + AC = AB + BD + DC + AC$$
$$= AB + BE + CF + AC = AE + AF$$

بنابراین محیط مثلث ABC هیچ ارتباطی به محل نقطه D ندارد و همواره برابر مقدار ثابت $AE + AF$ می‌باشد.

۷۹

الف

$$\begin{cases} ۸۰^\circ = \dfrac{x+y}{۲} \rightarrow \\ ۲۰^\circ = \dfrac{x-y}{۲} \rightarrow \end{cases} \begin{cases} x + y = ۱۶۰^\circ \\ x - y = ۴۰^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = ۱۰۰^\circ \\ y = ۶۰^\circ \end{cases}$$

ب

$$\begin{cases} x + y = ۳۶۰^\circ \\ \dfrac{x-y}{۲} = ۶۲^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = ۳۶۰^\circ \\ x - y = ۱۲۴^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = ۲۴۲^\circ \\ y = ۱۱۸^\circ \end{cases}$$

۸۰

الف

طبق روابط طولی در دایره داریم:

$$x(x + ۳۲) = ۱۰ \times ۳۲ \rightarrow x^۲ + ۳۲x - ۳۲۰ = ۰ \rightarrow \begin{cases} x = ۸ \ (\text{ق ق}) \\ x = -۴۰ \ (\text{غ ق ق}) \end{cases}$$

۸۱

با نوشتن قضیهٔ نیمسازها داریم:

الف

$$\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AC}=\frac{۶}{۸}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow BD=\frac{۳}{۴}CD \quad (۱)$$

$$BC=۷=BD+CD \quad (۲)$$

از روابط (۱) و (۲) داریم:

$$۷=\frac{۳}{۴}CD+CD\Rightarrow \frac{۷}{۴}CD=۷\Rightarrow CD=۴\Rightarrow BD=۳$$

ب

برای محاسبهٔ طول نیمساز AD داریم:

$$AD^۲=AB\times AC-BD\times CD\Rightarrow AD^۲=۶\times ۸-۳\times ۴\Rightarrow AD=۶$$

پ

با نوشتن قضیهٔ نیمسازها در مثلث ADC داریم:

$$\begin{cases}\frac{DE}{CE}=\frac{AD}{AC}=\frac{۶}{۸}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow DE=\frac{۳}{۴}CE\\ CD=۴=DE+CE\end{cases}$$

$$۴=\frac{۳}{۴}CE+CE=\frac{۷}{۴}CE\Rightarrow CE=\frac{۱۶}{۷}$$

$$DE=\frac{۳}{۴}\times\frac{۱۶}{۷}=\frac{۱۲}{۷}$$

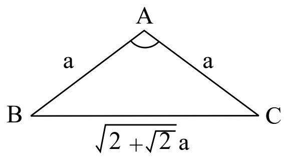
$$AE^۲=AD\times AC-DE\times CE=۶\times ۸-\frac{۱۲}{۷}\times\frac{۱۶}{۷}=۴۸-\frac{۱۹۲}{۴۹}=\frac{۲۱۶۰}{۴۹}$$

$$\Rightarrow AE=\frac{\sqrt{۲۱۶۰}}{۷}$$

(۸۲) در n ضلعی منتظم، کوچک‌ترین قطر، قطری است که نزدیک‌ترین رأس‌ها را به‌هم وصل می‌کند، بنابراین داریم:

قضیهٔ کسینوس‌ها در $\overset{\triangle}{ABC}$: $(\sqrt{۲+\sqrt{۲}}a)^۲=a^۲+a^۲-۲a^۲\times\cos\hat{A}\Rightarrow(۲+\sqrt{۲})a^۲=۲a^۲(۱-\cos\hat{A})$

$$\Rightarrow\cos\hat{A}=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow\hat{A}=۱۳۵^\circ \quad , \quad \hat{A}=۱۸۰^\circ-\frac{۳۶۰^\circ}{n}\Rightarrow ۱۸۰^\circ-\frac{۳۶۰^\circ}{n}=۱۳۵^\circ\Rightarrow\frac{۳۶۰^\circ}{n}=۴۵^\circ\Rightarrow n=۸$$



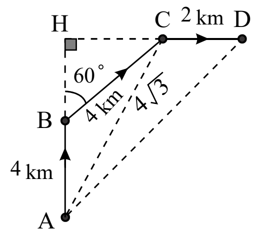
(۸۳)

$$S=\frac{۱}{۲}AB\times AC\times\sin\hat{A}$$

(۸۴) در مثلث ABC داریم:

$$A\hat{B}C=۱۲۰^\circ$$

$$AB=BC=۴km\Rightarrow B\hat{A}C=B\hat{C}A=\frac{۶۰^\circ}{۲}=۳۰^\circ$$



در این مثلث با نوشتن قضیهٔ کسینوس‌ها، طول AC را حساب می‌کنیم:

$$AC^۲=۴^۲+۴^۲-۲\times۴\times۴\times\underbrace{\cos ۱۲۰^\circ}_{-\frac{۱}{۲}}\Rightarrow AC=۴\sqrt{۳}$$

زاویهٔ $A\hat{C}D$ زاویهٔ خارجی برای مثلث قائم‌الزاویهٔ AHC است، پس:

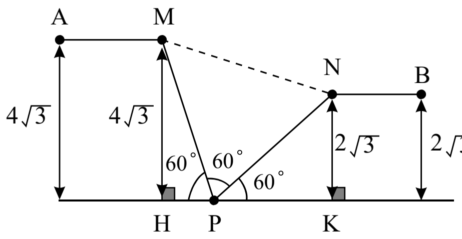
$$A\hat{C}D=۹۰^\circ+۳۰^\circ=۱۲۰^\circ$$

با نوشتن قضیهٔ کسینوس‌ها در مثلث ACD داریم:

$$AD^۲=AC^۲+CD^۲-۲AC\times CD\times\cos ۱۲۰^\circ$$

$$AD^۲=(۴\sqrt{۳})^۲+۲^۲-۲\times۴\sqrt{۳}\times۲\times(-\frac{۱}{۲})\Rightarrow AD^۲=۵۲+۸\sqrt{۳}\Rightarrow AD=\sqrt{۵۲+۸\sqrt{۳}}\sim ۸٫۱km$$

(۸۵) مطابق شکل در مثلث‌های PNK و PMH داریم:



$$\begin{cases} \overset{\triangle}{PNK} : \hat{P} = ۶۰^\circ \\ \overset{\triangle}{PMH} : \hat{P} = ۶۰^\circ \end{cases}$$

$$\sin ۶۰^\circ = \frac{KN}{PN} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{۲\sqrt{۳}}{PN} \Rightarrow PN = ۴$$

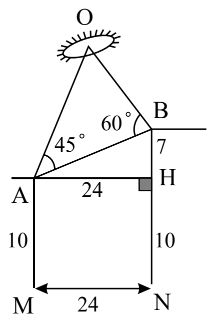
$$\sin ۶۰^\circ = \frac{MH}{PM} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{۴\sqrt{۳}}{PM} \Rightarrow PM = ۸$$

با نوشتن قضیهٔ کسینوس‌ها در مثلث PMN داریم:

$$MN^۲ = PM^۲ + PN^۲ - ۲PM \times PN \times \cos ۶۰^\circ \Rightarrow MN^۲ = ۸^۲ + ۴^۲ - ۲ \times ۸ \times ۴ \times \frac{۱}{۲} = ۴۸ \Rightarrow MN = ۴\sqrt{۳}$$

۸۶

از رأس A، عمود AH بر ضلع BN وارد می‌کنیم.



در مثلث ABH داریم:

$$\hat{H} = ۹۰^\circ \Rightarrow AB^۲ = AH^۲ + BH^۲ \Rightarrow AB^۲ = ۲۴^۲ + ۷^۲ = ۶۲۵ \Rightarrow AB = ۲۵$$
$$A\hat{O}B = ۱۸۰^\circ - (۴۵^\circ + ۶۰^\circ) = ۷۵^\circ$$

با نوشتن قضیهٔ سینوس‌ها در مثلث AOB داریم:

$$\frac{OA}{\sin ۶۰^\circ} = \frac{OB}{\sin ۴۵^\circ} = \frac{AB}{\sin ۷۵^\circ} \Rightarrow \frac{OA}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}} = \frac{OB}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}} = \frac{۲۵}{۰/۹} \Rightarrow OA = \frac{۱۲۵\sqrt{۳}}{۹} \ , \ OB = \frac{۱۲۵\sqrt{۲}}{۹}$$

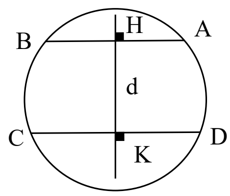
۸۷ خارج از

۸۸

$\frac{۱}{h_a^۲}$ (h_a ارتفاع وارد بر وتر)

$$\begin{cases} \frac{۱}{b^۲} + \frac{۱}{c^۲} = \frac{b^۲ + c^۲}{b^۲c^۲} \\ S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{a \times h_a}{۲} = \frac{b \times c}{۲} \end{cases} \Rightarrow bc = a \times h_a \Rightarrow b^۲c^۲ = a^۲ \times h_a^۲$$
$$\Rightarrow \frac{۱}{b^۲} + \frac{۱}{c^۲} = \frac{a^۲}{a^۲ \times h_a^۲} = \frac{۱}{h_a^۲}$$

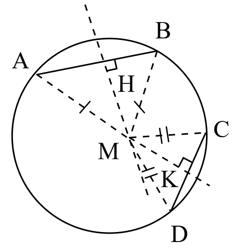
۸۹ الف. می‌دانیم که عمودمنصف هر وتر یک دایره از مرکز آن دایره می‌گذرد. از آنجا که دو وتر AB و CD موازی‌اند، مطابق شکل خط d که عمودمنصف مشترک هردو می‌باشد، از مرکز دایره می‌گذرد. به عبارت دیگر مرکز دایره روی خط d قرار می‌گیرد و نمی‌توان دقیقاً آن را به‌عنوان یک نقطه مشخص کرد.

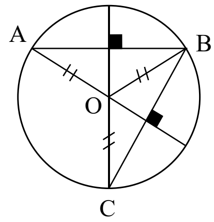


ب.

مطابق شکل، دو وتر AB و CD نابرابر و ناموازی هستند. می‌دانیم مرکز دایره از A و B به یک فاصله است، پس روی عمودمنصف AB قرار دارد. از طرفی مرکز دایره نیز روی عمودمنصف CD نیز قرار دارد، پس تلاقی این دو عمودمنصف همان مرکز دایره است. مطابق شکل عمودمنصف‌های AB و CD در نقطهٔ M (مرکز دایره) متقاطع‌اند و داریم:

$$\begin{cases} M \text{ روی عمودمنصف } AB \Rightarrow MA = MB \\ M \text{ روی عمودمنصف } CD \Rightarrow MC = MD \end{cases}$$

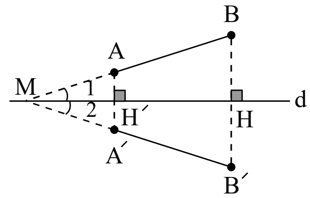




۹۰

الف امتداد AB، خط d را در نقطهٔ M قطع می‌کند. نقطهٔ B را نسبت به محور d بازتاب می‌کنیم تا B' به‌دست آید. MB' را رسم می‌کنیم. بازتاب نقطهٔ A نسبت به خط d را پیدا می‌کنیم و ثابت می‌کنیم نقطه A' می‌باشد، به‌طوری که A' روی MB' قرار می‌گیرد. مثلث‌های MBB' و MAA' متساوی‌الساقین هستند، زیرا:

$$\begin{cases} \hat{H} = ۹۰^\circ, BH = B'H \Rightarrow BB' \text{ عمودمنصف } d \Rightarrow MB = MB' \quad (۱) \\ \hat{H}' = ۹۰^\circ, AH' = A'H' \Rightarrow AA' \text{ عمودمنصف } d \Rightarrow MA = MA' \quad (۲) \end{cases}$$



از طرفی می‌دانیم که در مثلث متساوی‌الساقین، عمودمنصف d، نیمساز زاویهٔ M می‌باشد، پس $\hat{M}_۱ = \hat{M}_۲$ و درنتیجه، A' روی MB' قرار دارد.

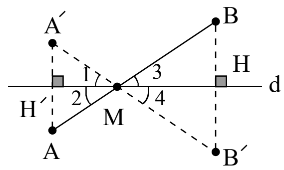
از طرفی از موارد (۱) و (۲) داریم:

$$MB = MB', MA = MA' \Rightarrow MB - MA = MB' - MA' \Rightarrow AB = A'B'$$

بنابراین در این حالت، بازتاب طولپا می‌باشد.

ب پاره‌خط AB محور بازتاب d را در نقطهٔ M قطع می‌کند. بازتاب A نسبت به خط d، نقطهٔ A' می‌باشد. MA' را رسم کرده و امتداد می‌دهیم و ادعا می‌کنیم بازتاب نقطهٔ B نسبت به خط d، یعنی نقطهٔ B' بر امتداد MA' واقع است. چون نقطهٔ A' بازتاب A نسبت به خط d می‌باشد، داریم:

$$\hat{H}' = ۹۰^\circ, AH' = A'H' \Rightarrow AA' \text{ عمودمنصف } d \Rightarrow MA = MA', \hat{M}_۱ = \hat{M}_۲$$



از طرفی داریم:

$$\begin{cases} \hat{M}_۱ = \hat{M}_۲ = \hat{M}_۳ = \hat{M}_۴ \\ BH = B'H, \hat{H} = ۹۰^\circ \end{cases}$$

پس B' در امتداد MA' قرار دارد و همچنین مثلث MBB' متساوی‌الساقین خواهد بود. بنابراین:

$$\begin{cases} AB = AM + MB \\ A'B' = A'M + MB' \\ AM = A'M, BM = B'M \end{cases} \Rightarrow AB = A'B'$$

بنابراین، بازتاب پاره‌خط AB نسبت به خط d، پاره‌خط $A'B'$ است و بازتاب طولپا می‌باشد.


ویژه خرداد ۱۴۰۲
فیلم تحلیل سوالات امتحانات پایان ترم
برای دیدن فیلم حل نمونه سوالات بزن رو لینک زیر
تحلیل نمونه سوالات هندسه یازدهم ریاضی
مشاهده فیلم ها