

ویژه خرداد ۱۴۰۲



فیلم تحلیل سوالات امتحانات پایان ترم

برای دیدن **فیلم حل نمونه سوالات** بزن رو لینک زیر

مشاهده فیلم ها

تحلیل نمونه سوالات حسابان یازدهم ریاضی



۱ اگر $f(x) = \sqrt{x-2}$ و $g = \{(0, 4), (3, 2), (5, -9)\}$ مفروض باشند، توابع $f \circ g$ و $g \circ f$ را بیابید.

۲ اگر $f(x) = \begin{cases} 2x, & x > 1 \\ x^2 - 1, & x \leq 1 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} x - 3, & x \geq 3 \\ 1 + x, & x < 3 \end{cases}$ ، آنگاه تابع $f - g$ را بیابید.

۳ آیا توابع $f(x) = \frac{y}{x} + 3$ و $g(x) = \frac{y}{x-3}$ وارون یکدیگرند؟

۴ در تابع $f(x) = \frac{mx}{x+2}$ ، اگر $f(-1) = 4$ باشد، مقدار a را چنان بیابید که $f(a) = 4f(2)$ باشد.

۵ درستی اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$\sin 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}$$

۶ درستی اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$1 + \sin 2x = (\sin x + \cos x)^2$$

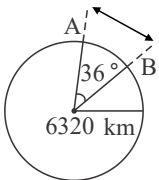
۷ اگر $f(x) = 4 - \sqrt{x-1}$ ، مجموعه جواب‌های معادله $(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x)$ را بیابید.

۸ معادله $4x - x^2 = \sqrt{6x^2 - 24x + 7}$ را حل کنید:

۹ در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله بوده و $x_2 = kx_1$ آن‌گاه ثابت کنید.

$$\frac{(k+1)^2}{k} = \frac{b^2}{a \cdot c}$$

۱۰ فاصله دو نقطه A و B از کره زمین که بر روی یک نصف‌النهار قرار دارند، مطابق شکل روبرو، برابر طول کمانی از دایره گذرنده از آن دو نقطه است. با داشتن اندازه شعاع کره زمین فاصله بین دو نقطه داده شده را بیابید.



۱۱ اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{ax - 2a}{\sqrt{3x} - 5 - 1} = 3$ ، آن‌گاه a را بیابید.

۱۲ دوچرخه سواری در یک پیست دایره‌ای به شعاع ۱۰ متر، مسافت $\frac{10\pi}{9}$ متر را می‌پیماید. اندازه زاویه طی شده را بر حسب رادیان به دست آورید.

۱۳ شعاع دایره مقابل برابر 10 cm می‌باشد:

الف) اگر زاویه مرکزی \widehat{AOB} برابر 40° باشد، طول کمان \widehat{AB} برابر چند سانتی‌متر است؟

ب) اگر طول کمان \widehat{AB} برابر $\frac{5\pi}{3} \text{ cm}$ باشد، زاویه مرکزی \widehat{AOB} چند درجه است؟

۱۴ در یک دنباله حسابی اگر $S_m = S_n$ با شرط $m \neq n$ ثابت کنید: $S_{m+n} = 0$

۱۵ حد زیر را در صورت وجود تعیین کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 - 2 \cos 2x}}$$



۱۶) تابع f در همه شرایط زیر صدق می‌کند. f را رسم کنید و ضابطه آن را بنویسید.

الف) دامنه f مجموعه اعداد حقیقی است و $f(2) = 3$ و $f(-5) = -2$

ب) f در بازه $[0, 2]$ ثابت است.

پ) تابع f به هر عدد بزرگ‌تر از ۲ مربع آن را نسبت می‌دهد.

ت) تابع f برای اعداد منفی، خطی است و نمودار آن محور x ها را در نقطه‌ای به طول ۳- قطع می‌کند.

۱۷) تابع $f(x) = |x + 1| + |x - 1|$ را به صورت یک تابع چند ضابطه‌ای بنویسید و نمودار آن را رسم کنید. به کمک نمودار برد تابع را معلوم کنید.

۱۸) اگر $|x - 1| + |x + 1| > 2|x|$ برقرار باشد حدود x را به دست آورید.

۱۹) برد تابع $f(x) = \frac{3}{5 + 2^x}$ را بیابید.

۲۰) توابع $f = \{(-2, 2), (-1, 1), (0, 4), (5, 0), (1, -1)\}$ و $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$ مفروضند، مطلوب است:

الف) تابع $f - g + 2$ ب) تابع $g \circ f$

۲۱) خط $y = 1$ و نمودار $y = |x^2 - 2|x||$ در چند نقطه تلاقی دارند؟

۲۲) اگر α و β ریشه‌های معادله درجه دوم $x^2 - 5x - 3 = 0$ باشند، حاصل $\frac{\alpha}{\beta - 5}$ را بیابید.

۲۳) توابع زیر را در نظر بگیرید.

$$y = 3x + 2, \quad y = x^2 - 1, \quad y = [x] - 1, \quad y = \begin{cases} -2 & x < 1 \\ 2 & x > 1 \end{cases}$$

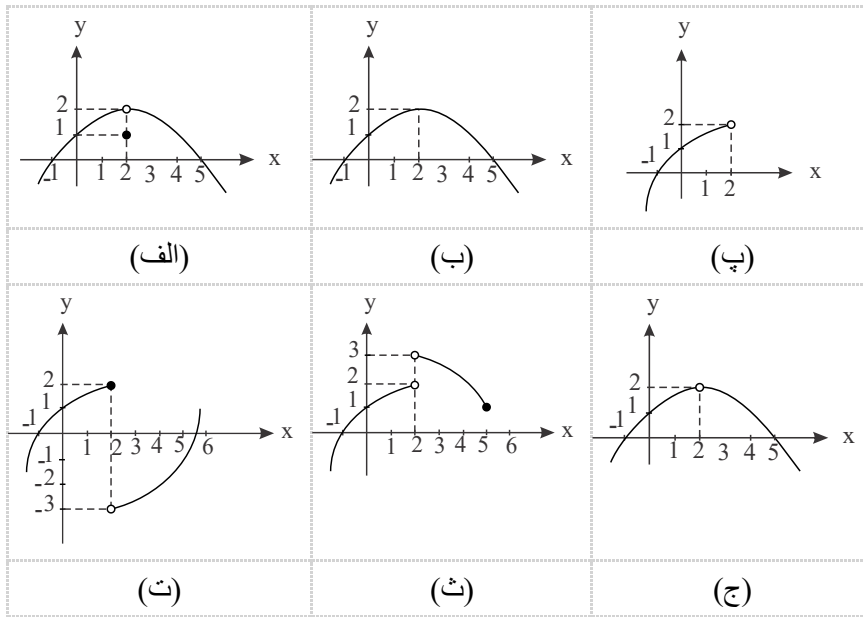
الف) مقدار حد هریک از توابع فوق در $x = 1$ را (در صورت وجود) بیابید.

ب) با انتخاب توابع f و g از بین چهار تابع فوق، جدول زیر را کامل کنید.

$f(x) + g(x) = \dots$	$g(x) = \dots$	$f(x) = \dots$	هر سه تابع f و g و $f + g$ در ۱ حد دارند.
$f(x) \cdot g(x) = \dots$	$g(x) = \dots$	$f(x) = \dots$	تابع $f \cdot g$ در ۱ حد دارد، اما تابع f در ۱ حد ندارد.
$\frac{f(x)}{g(x)} = \dots$	$g(x) = \dots$	$f(x) = \dots$	توابع f و g در ۱ حد راست دارند اما تابع $\frac{f}{g}$ در ۱ حد راست ندارد.
$f^2(x) = \dots$		$f(x) = \dots$	تابع f^2 در ۱ حد دارد اما تابع f در ۱ حد ندارد.
$\sqrt{f(x)} = \dots$		$f(x) = \dots$	تابع f در ۱ حد دارد اما تابع \sqrt{f} در ۱ حد ندارد.



۲۴ با توجه به نمودارهای توابع داده شده در زیر، هر کدام از گزاره‌های پایین صفحه در مورد چند تا از این توابع برقرار است؟ در هر مورد توابع را مشخص کنید.



تابع در همسایگی محذوف ۲ تعریف شده و در این نقطه حد دارد.

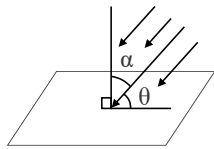
تابع در همسایگی ۲ تعریف شده و در این نقطه حد دارد ولی مقدار حد با مقدار تابع در این نقطه برابر نیست.

تابع در همسایگی چپ ۲ تعریف شده و در این نقطه حد ندارد.

تابع در همسایگی ۲ تعریف شده و در این نقطه حد دارد و حد آن برابر مقدار تابع در این نقطه است.

تابع در نقطه ۲ تعریف نشده ولی در این نقطه حد دارد.

تابع در همسایگی راست ۲ تعریف شده ولی در این نقطه حد ندارد.



۲۵ شدت نور وارد بر یک سلول خورشیدی، با زاویه تابش α در ارتباط است (شکل زیر) اگر شدت نور را با I نشان دهیم،

رابطه $I = k \sin(\frac{\pi}{4} - \alpha)$ که در آن k یک عدد ثابت مثبت است، شدت نور را نشان می‌دهد.

(الف) با توجه به شکل و با استفاده از روابط مثلثاتی، رابطه شدت نور را بر حسب زاویه θ در شکل بازنویسی کنید.

(ب) شدت نور را برای زاویه‌های $\theta = 0$ ، $\theta = \frac{\pi}{6}$ و $\theta = \frac{\pi}{3}$ بر حسب k به دست آورید.

(پ) زاویه θ چقدر باشد تا بیشترین شدت نور به دست آید؟ چرا؟ (راهنمایی: از دایره مثلثاتی کمک بگیرید).

(با کمی تغییر)

۲۶ نمودار دو تابع $f(x) = x^2$ و $g(x) = 2^x$ را رسم کنید و سپس آن‌ها را با هم مقایسه کنید.

۲۷ وارون تابع $f(x) = -\frac{1}{4}x + 3$ را بیابید و نمودار f و وارون آن را رسم کنید.

۲۸ نمودار تابع $y = -\sqrt{x}$ را با استفاده از نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ رسم کنید.

۲۹ تابع $f(x) = [x]$ مفروض است.

(الف) نقاط ناپوستگی تابع را در بازه $(-2, 3)$ تعیین کنید.

(ب) نقاط ناپوستگی تابع را در بازه $[-3, 2]$ تعیین کنید.

۳۰ حاصل حدهای زیر را بیابید.

(الف) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 2x - 1}{x^2 - 1}$

(ب) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 2x - 3}{x^2 + x - 2}$

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} [\sin x + \cos x]$

۳۱ حاصل حد زیر را بیابید.



۳۲) یک همسایگی، یک همسایگی محذوف، یک همسایگی راست و یک همسایگی چپ برای $x = 3$ مثال بزنید.

۳۳) نمودار تابع مقابل را رسم کرده و حد آن را در $x = 2$ بررسی کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x < 2 \\ 6 & x = 2 \\ -x^2 + 9 & x > 2 \end{cases}$$

۳۴) مقدار عددی عبارت زیر را بیابید.

$$A = \sin^6 \frac{\pi}{12} + \cos^6 \frac{\pi}{12}$$

۳۵) برد تابع زیر را بیابید. ([] نماد جزء صحیح است)

$$y = \left[\frac{-\sin x}{2 + \sin x} \right]$$

۳۶) برد تابع زیر را بیابید.

$$f(x) = \frac{\cos x - 1}{2 \cos x + 1}$$

۳۷) مقدار عددی عبارت زیر را حساب کنید.

$$\frac{2 \sin\left(\frac{49\pi}{10}\right) - \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{18\pi}{5}\right) - 2 \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)}{\cos\left(-\frac{3\pi}{5}\right) + 2 \cos\left(\frac{13\pi}{5}\right) - \sin\left(\frac{19\pi}{10}\right)}$$

۳۸) درستی تساوی زیر را بررسی کنید.

$$\frac{\tan\left(x + \frac{7\pi}{2}\right) + \sin(7\pi - x) + 3 \cos\left(x - \frac{11\pi}{2}\right) + \cot(x - 8\pi)}{\cot\left(x - \frac{5\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{7\pi}{2} + x\right) + 3 \cos(x - 12\pi) + \tan(x - 7\pi)} = -\tan x$$

۳۹) در هر مورد تساوی دو تابع f, g را بررسی کنید.

الف) $f(x) = \frac{2x - 18}{x - 9}$, $g(x) = 2$

ب) $f(x) = \frac{3x^2 + 6}{x^2 + 2}$, $g(x) = 3$

ج) $f(x) = \sqrt{(x + 6)^2}$, $g(x) = |x + 6|$

۴۰) ثابت کنید:

$$\frac{2 \sin\left(\frac{41\pi}{10}\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{10}\right) + \sin\left(\frac{29\pi}{10}\right) - 2 \sin\left(\frac{11\pi}{10}\right)}{\cos\left(-\frac{\pi}{10}\right) \tan\left(\frac{11\pi}{10}\right) + 2 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{19\pi}{10}\right)} = 2$$

۴۱) در هر مورد تساوی دو تابع f, g را بررسی کنید.

الف) $f = \{(2, 5), (4, -6), (0, 9)\}$, $g = \{(4, -6), (0, 9), (2, -5)\}$

ب) $f = \{(4, 7), (-9, 2), (5, 10)\}$, $g = \{(-9, 2), (5, 10), (4, 7)\}$

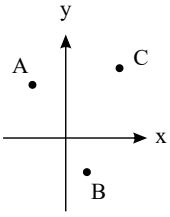
۴۲) اگر $3a + 2b = 3\pi$ ثابت کنید

$$\tan(a + b) \tan(a - b) = -\cot \frac{a}{2} \tan \frac{5b}{3}$$

۴۳) اگر $\tan \alpha = \frac{3}{2}$ مقدار عبارت $\frac{\sin(\alpha - \frac{\pi}{2}) - \sin(3\pi + \alpha)}{\cos(\frac{9\pi}{2} + \alpha) + \cos(\alpha - 7\pi)}$ را بیابید.



۴۴) نمودار سه تابع متفاوت رسم کنید که از سه نقطه A, B, C بگذرند.



۴۵) در مثلث ABC ، $\hat{A} = 90^\circ$ و اندازه C بر حسب درجه $\frac{45}{\pi}$ برابر اندازه B بر حسب رادیان است، اندازه \hat{B} و \hat{C} را بر حسب رادیان بیابید.

۴۶) تابع معکوس تابع زیر را در صورت وجود بیابید.

$$f(x) = \frac{3^x - 1}{3^x + 2}$$

۴۷) توابع $f(x) = \begin{cases} 5x - 7 & x \geq 1 \\ -x - 1 & x < 1 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x - 2 & x \geq -2 \\ -1 & x < -2 \end{cases}$ مفروضند. حاصل عبارات زیر را بیابید.

الف) $(f + g)(-4)$ ب) $(f - 2g)(3)$ ج) $(\frac{f+3}{g})(0)$ د) $(f \times g - 5)(\frac{1}{3})$

۴۸) نقطه‌ای روی نیمساز ربع اول و سوم بیابید که فاصله‌اش تا خط $3x + 4y - 1 = 0$ برابر با ۴ باشد.

۴۹) اگر $A(2, 2)$ ، $B(4, 4)$ ، $C(-2, 6)$ سه رأس یک مثلث باشند:

الف) نشان دهید مثلث ABC قائم‌الزاویه است.

ب) مساحت مثلث را بیابید.

ج) معادله‌ی میانه‌ی BM را بیابید.

۵۰) نامعادله‌ی مقابل را حل کنید.

$$|x^2 - 9| + 9 > x^2$$

۵۱) معادله مقابل را حل کنید.

$$x^2 - 4x + \frac{10}{x^2 - 4x + 5} = 2$$

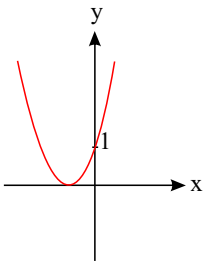
۵۲) پدربزرگ برای اهدا به مهدکودک چند اسباب‌بازی یکسان، مجموعاً به قیمت ۱۲۰ هزار تومان خرید. اگر فروشنده برای هر اسباب‌بازی هزار

تومان به پدربزرگ تخفیف می‌داد او می‌توانست با همان پول چهار اسباب‌بازی دیگر هم بخرد، قیمت هر اسباب‌بازی قبل از تخفیف چقدر بوده است؟

۵۳) معادله‌ی مقابل را به روش هندسی حل کنید.

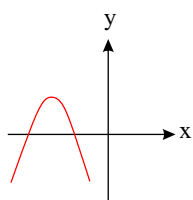
$$1 - x^2 = |x|$$

۵۴) اگر نمودار مقابل مربوط به تابع $f(x) = x^2 + mx + c$ باشد، m را بیابید.



۵۵) در شکل زیر سهمی به معادله‌ی $p(x) = ax^2 + bx + c$ داده شده است. علامت ضرایب a و b و c و تعداد جواب‌های معادله‌ی

$ax^2 + bx + c = 0$ را تعیین کنید.



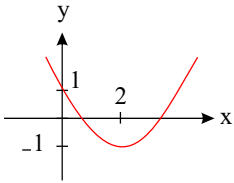
۵۶) α زاویه‌ای حاده و β زاویه‌ای منفرجه است و $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ و $\cos \beta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ مقدار $\cos(\alpha - \beta)$ را محاسبه کنید.



۵۷) نمودار تابع زیر را رسم کنید و به کمک آن برد تابع را مشخص کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x < 0 \\ 2 & 0 \leq x \leq 2 \\ x - 1 & 2 < x \end{cases}$$

۵۸) در شکل زیر نمودار سهمی به معادله $p(x) = ax^2 + bx + c$ داده شده است، ضرایب a, b, c را تعیین کنید.



۵۹) پیوستگی تابع زیر را در $x = 1$ بررسی کنید.

$$f(x) = \begin{cases} 4 - 3x & x \leq 1 \\ 2x^2 + 1 & x > 1 \end{cases}$$

۶۰) پیوستگی تابع زیر را در نقطه‌ی $a = 1$ بررسی کنید.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & x \neq 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

۶۱) ضابطه‌ی وارون تابع $f(x) = \sqrt{2x + 3}$ را به دست آورید.

۶۲) معکوس پذیری $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{x^3 - 1}}$ را تحقیق کنید و در صورت معکوس پذیری ضابطه‌ی تابع معکوس را بیابید.

۶۳) در مورد وارون پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & x \leq -1 \\ x^2 & -1 < x < 1 \\ x + 1 & 1 \leq x \end{cases}$ تحقیق کنید.

۶۴) دو تابع حقیقی f, g با ضابطه‌های $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$ و $g(x) = \frac{1}{x-1}$ تعریف شده اند، دامنه $f \circ g$ و ضابطه $g \circ f$ را در صورت وجود بنویسید.

۶۵) در معادله‌ی $2x^2 - 8x + m = 0$ اگر یکی از جواب‌ها دو واحد بیشتر از جواب دیگر باشد، m و هر دو جواب را پیدا کنید.

۶۶) اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 3mx + 4 = 0$ باشند، m را چنان تعیین کنید که داشته باشیم:

$$\alpha\beta^2 + 4 = 0$$

۶۷) معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$|2x^2 - 1| + 2x^2 = 1$$

۶۸) اگر α و β ریشه‌های معادله درجه‌ی دوم $x^2 + x - 1 = 0$ باشند، حاصل عبارت $\frac{\beta^5}{(\alpha + 1)^5} + \frac{\alpha^3}{(\beta + 1)^3}$ را به دست آورید.

۶۹) منحنی تابع $f(x) = ax^3 + b$ منحنی معکوس‌اش را در نقطه‌ی $A \left(\frac{1}{a}, 0 \right)$ قطع کرده است $2a + b$ را به دست آورید.

۷۰) اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4 & x > 0 \\ 5 & x \leq 0 \end{cases}$ آن‌گاه حاصل $f(-f(x))$ را به دست آورید.

۷۱) اگر $f(x) = 2x + 3$ و $g(x) = x - 4$ باشد آن‌گاه مقدار $\frac{f \circ g(2)}{g \circ f(-1)}$ را به دست آورید.

۷۲) تابع $f(x) = x^2 - 2x$ را روی دامنه $[1, +\infty)$ در نظر بگیرید:

(الف) با رسم نمودار این تابع نشان دهید این تابع وارون‌پذیر است و برد آن را بدست آورید.

(ب) با رسم نمودار تابع وارون، دامنه و برد تابع وارون را بدست آورید.

(ج) ضابطه‌ی وارون را بنویسید.

۷۳) آیا عدد صحیحی وجود دارد که جمع آن با جذرش برابر ۶ باشد؟

۷۴) درستی تساوی زیر را اثبات کنید.

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha$$



۷۵) ابتدا یک به یک بودن تابع f با ضابطه‌ی زیر را بررسی کنید. سپس در صورت وجود تابع معکوس f را بنویسید.

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & x < 0 \\ x^2 + 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

۷۶) اگر $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2 - |x - 1|}}$, $g(x) = |x - 1|$ مطلوب است دامنه‌ی توابع $f + g$ و $f \circ g$ و ضابطه‌ی $g \circ f$.

۷۷) ثابت کنید تابع $f(x) = \frac{x - 1}{x}$ یک به یک است.

۷۸) مقدار عددی عبارات زیر را بیابید.

الف

$$\tan 23^\circ + \tan 22^\circ + \tan 23^\circ \tan 22^\circ$$

ب

$$\tan 39^\circ + \tan 21^\circ + \sqrt{3} \tan 39^\circ \tan 21^\circ$$

۷۹) نمودار تابع‌های زیر را در بازه $[0, 2\pi]$ رسم کنید.

الف

$$y = \sin x - \frac{|\sin x|}{\sin x}$$

ب

$$y = \frac{2|\cos x|}{\cos x} + \cos x$$

۸۰) نمودار توابع زیر را در یک دوره تناوب رسم کنید.

الف

$$y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 1$$

ب

$$y = 2 \cos(x - 1)$$

۸۱) برد توابع زیر را بیابید.

الف

$$y = 2 \sin x + 3$$

ب

$$y = -4 \cos x + \frac{1}{2}$$

۸۲) حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$$

ب

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2 + \sqrt{x + 5}} - \sqrt{5}}{x^2 - 16}$$

۸۳) حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - 1}$$



ب

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 16}$$

۸۴ در توابع زیر مقدار a را طوری تعیین کنید که هر تابع در نقطه $x = 1$ پیوسته باشد

الف

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x < 1 \\ a & x = 1 \\ -x + 2 & x > 1 \end{cases}$$

ب

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} & x \neq 1 \\ a & x = 1 \end{cases}$$

پ

$$h(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} & 0 < x < 1 \\ [x] + a & x \geq 1 \end{cases}$$

ت

$$k(x) = ([x] - a)[x]$$

۸۵ حاصل عبارات زیر را بیابید.

الف

$$\log_{\frac{1}{2}} 16 - \log_{16} 32 + 2 \log_{\frac{1}{16}} \sqrt[3]{8}$$

ب

$$2 \log_{27} \frac{1}{9} - \log_3 9 \sqrt{3} + \log_{\frac{1}{9}} \frac{1}{9 \sqrt[4]{3}}$$

۸۶ معادلات زیر را حل کنید.

الف

$$\log_3^x \times \log_6^x \times \log_8^x \times \log_{16}^x = \frac{2}{3}$$

ب

$$\frac{1}{1 - 4 \log x} + \frac{4}{2 + \log x} = 3$$

۸۷ کدام یک از گزاره‌های زیر درست و کدام یک نادرست است؟

الف اگر $g(4) = 7$ و $f(7) = 5$ آنگاه $(f \circ g)(4) = 35$.

ب اگر $f(x) = x + 4$ و $g(x) = 3x$ آنگاه $(\frac{f}{g})(2) = 1$.

پ اگر $g(x) = 2x - 1$ و $f(x) = \sqrt{x}$ آنگاه $(f \circ g)(5) = g(2)$.

ت برای هر دو تابع f و g داریم: $f \circ g = g \circ f$.

ث اگر $f(x) = x^2 - 4$ و $g(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ آنگاه $(f \circ g)(5) = -25$ و $(f \circ g)(x) = -x^2$.

ج برای هر دو تابع f و g داریم: $fg = gf$.

۸۸ معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.



الف

$$\log\left(\frac{8x^2 + 5}{2}\right) = 2 \log(2x - 1)$$

ب

$$x^{\log_7^v} + 7^{\log_7^x} = 98$$

۸۹) a را طوری بیابید که $f(x) = \begin{cases} ax[\frac{1}{x}] & x \geq \frac{1}{2} \\ \cos \frac{\pi x}{2} & x < \frac{1}{2} \end{cases}$ در $x = \frac{1}{2}$ حد داشته باشد.

۹۰) دو تابع $f(x) = \begin{cases} x & x > 1 \\ -x & x < 1 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} -x & x > 1 \\ x & x < 1 \end{cases}$ را در نظر بگیرید.

الف) ضابطه تابع $f + g$ ، $f \cdot g$ و $\frac{f}{g}$ را بیابید.

ب) نمودار تابع f ، g ، $f + g$ ، $f \cdot g$ و $\frac{f}{g}$ را رسم کنید.

پ) آیا حد توابع f و g در ۱ وجود دارند؟

ت) آیا حد توابع $f + g$ ، $f \cdot g$ و $\frac{f}{g}$ در ۱ وجود دارند؟

ث) آیا می توان از قضیه حد مجموع، حد ضرب و حد تقسیم در $x = 1$ استفاده کرد؟ چرا؟



پاسخنامه تشریحی

۱

$$D_f: x \geq 2, \quad D_g = \{0, 3, 5\}$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x = 0, 3, 5 \mid g(x) \geq 2\} = \{0, 3\}$$

$$f \circ g(0) = f(g(0)) = f(3) = \sqrt{3-2} = \sqrt{1} = 1, \quad f \circ g(3) = f(g(3)) = f(0) = 0$$

$$f \circ g = \{(0, 1), (3, 0)\}$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \geq 3 \mid f(x) = 0, 3, 5\}$$

$$f(x) = 0 \rightarrow \sqrt{x-2} = 0 \rightarrow x = 2 \rightarrow f(x) = 3 \rightarrow \sqrt{x-2} = 3 \rightarrow x = 11$$

$$f(x) = 5 \rightarrow \sqrt{x-2} = 5 \rightarrow x = 27 \rightarrow D_{g \circ f} = \{2, 11, 27\}$$

$$g \circ f(2) = g(f(2)) = g(0) = 3, \quad g \circ f(11) = g(f(11)) = g(3) = 2$$

$$g \circ f(27) = g(f(27)) = g(5) = -9 \rightarrow g \circ f = \{(2, 3), (11, 2), (27, -9)\}$$

محدوده‌های دو تابع f و g را به صوت زیر یکسان می‌کنیم.

۲

$$f(x) = \begin{cases} 2x & x \geq 3 \\ 2x & 1 < x < 3 \\ x^2 - 1 & x \leq 1 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x - 3 & x \geq 3 \\ 1 + x & 1 < x < 3 \\ 1 + x & x \leq 1 \end{cases}$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = \begin{cases} 2x - (x - 3) & x \geq 3 \\ 2x - (1 + x) & 1 < x < 3 \\ x^2 - 1 - (1 + x) & x \leq 1 \end{cases}$$

$$(f - g)(x) = \begin{cases} x + 3 & , x \geq 3 \\ x - 1 & , 1 < x < 3 \\ x^2 - x - 2 & , x \leq 1 \end{cases}$$

۳

$$f(x) = \frac{y}{x} + 3 = y \rightarrow \frac{y}{x} = y - 3 \rightarrow x = \frac{y}{y-3} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{y}{x-3} = g(x)$$

$$g(x) = \frac{y}{x-3} = y \rightarrow x - 3 = \frac{y}{y} \rightarrow x = \frac{y}{y} + 3 \rightarrow g^{-1}(x) = \frac{y}{x} + 3 = f(x)$$

بله توابع f و g وارون یکدیگر هستند.

۴

$$f(-1) = 4 \rightarrow \frac{-m}{-1+2} = 4 \rightarrow -m = 4 \rightarrow m = -4$$

$$f(x) = \frac{-4x}{x+2} \rightarrow f(2) = \frac{-8}{4} = -2 \rightarrow f(a) = 4f(2)$$

$$\rightarrow \frac{-4a}{a+2} = 4 \times (-2) \rightarrow \frac{-4a}{a+2} = -8 \rightarrow \frac{a}{a+2} = 2 \rightarrow 2a + 4 = a \rightarrow a = -4$$

۵

$$\frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} = \frac{2 \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)}{1 + \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)^2} = \frac{\frac{2 \sin x}{\cos x}}{\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{2 \sin x \cos^2 x}{\cos x} = 2 \sin x \cos x = \sin 2x$$

$$(\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = 1 + \sin 2x$$

۶



۷

$$f(x) = 4 - \sqrt{x-1}, x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \Rightarrow D_f = [1, +\infty)$$

$$\sqrt{x-1} \geq 0 \Rightarrow -\sqrt{x-1} \leq 0 \Rightarrow 4 - \sqrt{x-1} \leq 4 \Rightarrow f(x) \leq 4 \Rightarrow R_f = (-\infty, 4]$$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x, x \in D_f$$

$$(f \circ f^{-1})(x) = x, x \in R_f$$

با توجه به روابط بالا، تساوی $(f^{-1} \circ f)(x) = (f \circ f^{-1})(x)$ زمانی برقرار است که $x \in D_f \cap R_f$ باشد، پس داریم:

$$D_f \cap R_f = [1, +\infty) \cap (-\infty, 4] = [1, 4] \Rightarrow \text{جواب} = [1, 4]$$

۸

$$4x - x^2 = \sqrt{6x^2 - 24x + 7} \Rightarrow 4x - x^2 = \sqrt{6(x^2 - 4x) + 7}$$

با فرض $x^2 - 4x = t$ داریم:

$$\sqrt{6t + 7} = -t \xrightarrow{\text{توان ۲}} 6t + 7 = t^2 \Rightarrow t^2 - 6t - 7 = 0$$

$$\Rightarrow (t-7)(t+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = -1 \Rightarrow \sqrt{-6+7} = -(-1) \Rightarrow 1 = 1 \text{ درست} \Rightarrow t = -1 \text{ جواب} \\ t = 7 \Rightarrow \sqrt{42+7} = -7 \Rightarrow 7 = -7 \text{ غلط} \Rightarrow t = 7 \text{ غق ق} \end{cases}$$

در نتیجه:

$$x^2 - 4x = -1 \Rightarrow x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 16 - 4 = 12$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$$

۹

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, x_2 = kx_1 \Rightarrow x_1 + kx_1 = -\frac{b}{a} \Rightarrow (1+k)x_1 = -\frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow x_1 = -\frac{b}{a(k+1)} \Rightarrow x_2 = \frac{-kb}{a(k+1)} \Rightarrow x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

$$\Rightarrow \frac{kb^2}{a^2(k+1)^2} = \frac{c}{a} \Rightarrow akb^2 = a^2 c(k+1)^2 \Rightarrow kb^2 = a \cdot c(k+1)^2 \Rightarrow \frac{(k+1)^2}{k} = \frac{b^2}{a \cdot c}$$

۱۰

در این سوال باید طول کمان مقابل به زاویه 36° را در دایره‌ای به شعاع 632 km بیابیم.

$$\frac{36}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{36\pi}{180} = \frac{\pi}{5} \text{ رادیان} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{5} \text{ رادیان}, r = 632 \text{ km}$$

$$\ell = r \cdot \alpha = 632 \times \frac{\pi}{5} = 1264\pi = 1264 \times 3.14 = 3968.96 \text{ km}$$

۱۱

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{ax - 2a}{\sqrt{3x-5}-1} \times \frac{\sqrt{3x-5}+1}{\sqrt{3x-5}+1} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{a(x-2)(\sqrt{3x-5}+1)}{3x-5-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{a(x-2)(\sqrt{3x-5}+1)}{3(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{a}{3}(\sqrt{3x-5}+1) = \frac{2a}{3} = 3 \Rightarrow a = \frac{9}{2}$$

۱۲

$$\ell = \frac{10\pi}{9} \quad r = 10 \Rightarrow \theta = \frac{\ell}{r} = \frac{\frac{10\pi}{9}}{10} = \frac{\pi}{9} \text{ رادیان}$$

۱۳

الف) \widehat{AB} طول کمان $\frac{40}{360}$ (محیط دایره) $= \frac{1}{9} \times 2\pi r = \frac{2\pi \times 10}{9} = \frac{20\pi}{9} \text{ cm}$

ب) $\frac{5\pi}{3} = \frac{\alpha}{360}$ (محیط دایره) $\Rightarrow \frac{5\pi}{3} = \frac{\alpha}{360} \times 2\pi \times 10 \Rightarrow \frac{5\pi}{3} = \frac{20\pi\alpha}{360}$



$$\Rightarrow \frac{5\pi}{3} = \frac{\pi\alpha}{18} \Rightarrow \frac{5}{3} = \frac{\alpha}{18} \Rightarrow \alpha = 30^\circ$$

۱۴

$$S_m = S_n \Rightarrow \frac{m}{2}(2a_1 + (m-1)d) = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

$$\xrightarrow{\times 2} \Rightarrow 2ma_1 + (m^2 - m)d = 2na_1 + (n^2 - n)d \Rightarrow 2ma_1 + (m^2 - m)d - 2na_1 - (n^2 - n)d = 0$$

$$\Rightarrow (m-n)2a_1 + d[m^2 - m - n^2 + n] = 0 \Rightarrow (m-n)2a_1 + d[m^2 - n^2 - m + n] = 0$$

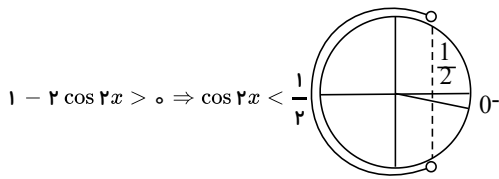
$$\Rightarrow (m-n)2a_1 + d[(m-n)(m+n) - (m-n)] = 0$$

$$\Rightarrow (m-n)2a_1 + d(m-n)(m+n-1) = 0 \Rightarrow (m-n)[2a_1 + (m+n-1)d] = 0$$

$$m \neq n \Rightarrow 2a_1 + (m+n-1)d = 0 \quad (1)$$

$$S_{m+n} = \left(\frac{m+n}{2}\right)[2a_1 + (m+n-1)d] \stackrel{(1)}{=} \left(\frac{m+n}{2}\right) \times 0 = 0$$

۱۵

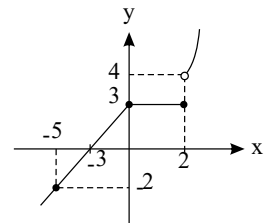


با توجه به دایره مثلثاتی تابع در همسایگی صفر تعریف نشده است یعنی زمانی که $x \rightarrow 0^-$ داخل رادیکال منفی می شود و حد موجود نیست.

۱۶

$$f(-5) = -2 \quad D_f = R \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x+3 & x < 0 \\ 3 & 0 \leq x \leq 2 \\ x^2 & x > 2 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} -3 & -5 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \Rightarrow m = \frac{-2 - 0}{-5 + 3} = 1 \Rightarrow \begin{cases} y - 0 = 1(x + 3) \\ y = x + 3 \end{cases}$$



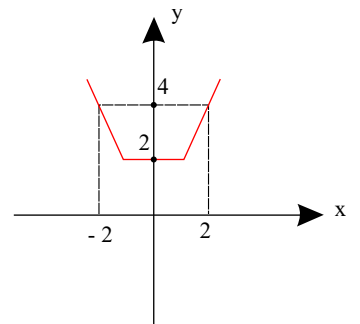
۱۷

$$f(x) = |x+1| + |x-1| \quad \begin{aligned} x+1=0 &\Rightarrow x=-1 \\ x-1=0 &\Rightarrow x=+1 \end{aligned}$$

x	-1	$+1$
$x+1$	$-$	$+$
$x-1$	$-$	$+$

$$f(x) = \begin{cases} -x-1-x+1 & x < -1 \\ x+1-x+1 & -1 \leq x \leq 1 \\ x+1+x-1 & x > 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} -2x & x < -1 \\ 2 & -1 \leq x \leq 1 \\ 2x & x > 1 \end{cases}$$

$$R_f = [2, +\infty)$$



۱۸

$$|2x| < |x-1| + |x+1| \Rightarrow a = x-1, b = x+1 \Rightarrow a+b = 2x$$

$$\Rightarrow |a+b| < |a| + |b| \Rightarrow a \cdot b < 0 \Rightarrow (x-1)(x+1) < 0 \Rightarrow x^2 - 1 < 0$$

$$x^2 < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$$

نکته: نامساوی $|a+b| < |a| + |b|$ زمانی برقرار است که $ab < 0$ باشد.



$$y = \frac{3}{\delta + 2^x} \Rightarrow \delta + 2^x = \frac{3}{y} \Rightarrow 2^x = \frac{3}{y} - \delta \Rightarrow 2^x = \frac{3 - \delta y}{y}$$

می‌دانیم $2^x > 0$ پس داریم:

$$\frac{3 - \delta y}{y} > 0 \Rightarrow \frac{y}{\frac{3 - \delta y}{y}} \quad \begin{array}{c} -\infty \quad 0 \quad \frac{3}{\delta} \quad +\infty \\ - \quad + \quad - \quad + \end{array} \Rightarrow 0 < y < \frac{3}{\delta}$$

پس برد تابع بازه $R_f = (0, \frac{3}{\delta})$ است.

$$f = \{(-2, 2), (-1, 1), (0, 4), (\delta, 0), (1, -1)\}$$

$$D_f = \{-2, -1, 0, \delta, 1\}$$

$$g(x) = \sqrt{1 - x^2} \Rightarrow 1 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1 \Rightarrow D_g = [-1, 1]$$

(الف)

$$D_f \cap D_g = \{-1, 0, 1\}, g(-1) = 0, g(0) = 1, g(1) = 0$$

$$f - g + 2 = \{(-1, 1 - 0 + 2), (0, 4 - 1 + 2), (1, -1 - 0 + 2)\} = \{(-1, 3), (0, 5), (1, 1)\}$$

(ب)

$$D_{gof} = \{x \in D_f | f(x) \in D_g\} = \{x \in \{-2, -1, 0, \delta, 1\} | f(x) \in [-1, 1]\}$$

$$D_{gof} = \{-1, \delta, 1\}$$

$$(gof)(-1) = g(f(-1)) = g(1) = 0, (gof)(\delta) = g(f(\delta)) = g(0) = 1$$

$$(gof)(1) = g(f(1)) = g(-1) = 0$$

در نتیجه:

$$gof = \{(-1, 0), (\delta, 1), (1, 0)\}$$

۲۱ می‌دانیم $x^2 = |x|^2$ پس داریم:

$$y = |x^2 - 2|x|| = ||x|^2 - 2|x||$$

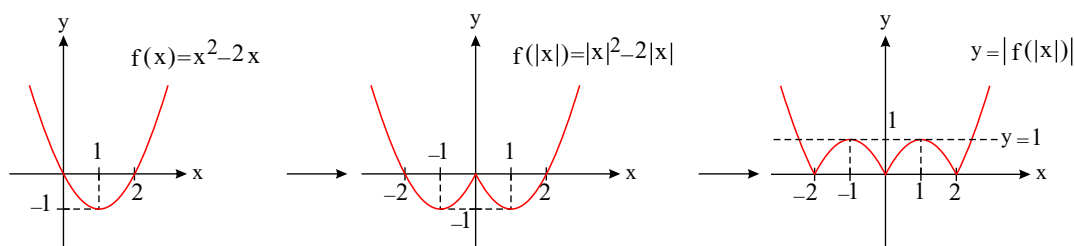
با فرض $f(x) = x^2 - 2|x|$ داریم، $f(|x|) = |x|^2 - 2|x|$ ، پس:

$$y = ||x|^2 - 2|x|| = |f(|x|)|$$

بنابراین ابتدا $f(x) = x^2 - 2|x|$ را رسم می‌کنیم.

$$\text{رأس } x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2} = 1 \Rightarrow \text{رأس } y = f(1) = 1 - 2 = -1$$

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 2|x| = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2$$

خط $y = 1$ در ۴ نقطه با تابع $y = |x^2 - 2|x||$ تلاقی دارد. در نقاط $x = \pm 1$ بر این تابع مماس است.

$$x^2 - \delta x - 3 = 0 \xrightarrow{x=\beta} \beta^2 - \delta\beta - 3 = 0 \Rightarrow \beta(\beta - \delta) = 3$$



$$\alpha \cdot \beta = \frac{c}{a} = -3$$

ضرب ریشهها

$$\frac{\alpha}{\beta - 5} = \frac{\alpha\beta}{\beta(\beta - 5)} = \frac{-3}{3} = -1$$

در نتیجه:

۲۳ الف

$$y = 3x + 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} (3x + 2) = 3 + 2 = 5$$

$$y = x^2 - 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 1) = 1 - 1 = 0$$

$$y = [x] - 1 \Rightarrow \begin{cases} L^+ = \lim_{x \rightarrow 1^+} [x] - 1 = 1 - 1 = 0 \\ L^- = \lim_{x \rightarrow 1^-} [x] - 1 = 0 - 1 = -1 \end{cases} \Rightarrow \text{حد ندارد}$$

$$y = \begin{cases} -2 & x < 1 \\ 2 & x > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L^+ = \lim_{x \rightarrow 1^+} y = 2 \\ L^- = \lim_{x \rightarrow 1^-} y = -2 \end{cases} \Rightarrow \text{حد ندارد}$$

$f(x) + g(x) = x^2 + 3x + 1$	$g(x) = x^2 - 1$	$f(x) = 3x + 2$	هر سه تابع f و g و $f + g$ در ۱ حد دارند.
$f(x) \cdot g(x) = (x^2 - 1)([x] - 1)$	$g(x) = x^2 - 1$	$f(x) = [x] - 1$	تابع $f \cdot g$ در ۱ حد دارد، اما تابع f در ۱ حد ندارد.
$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3x + 2}{[x] - 1}$	$g(x) = [x] - 1$	$f(x) = 3x + 2$	توابع f و g در ۱ حد راست دارند اما تابع $\frac{f}{g}$ در ۱ حد راست ندارد.
$f^2(x) = 4, x \neq 1$		$f(x) = \begin{cases} -2 & x < 1 \\ 2 & x > 1 \end{cases}$	تابع f^2 در ۱ حد دارد اما تابع f در ۱ حد ندارد.
$\sqrt{f(x)} = \sqrt{x^2 - 1}$		$f(x) = x^2 - 1$	تابع f در ۱ حد دارد اما تابع \sqrt{f} در ۱ حد ندارد.

۲۴ پاسخ: مورد اول \leftarrow تابع (ج)مورد دوم \leftarrow تابع (الف)مورد سوم \leftarrow توابع (پ)، (ت) و (ث)مورد چهارم \leftarrow تابع (ب)مورد پنجم \leftarrow تابع (ج)مورد ششم \leftarrow توابع (ت)، (ث)۲۵ الف) با توجه به شکل α و θ متمم هستند یعنی:

$$\alpha + \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

$$I = k \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = k \sin \theta$$

(ب)

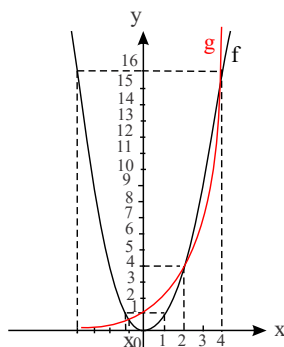
$$\theta = 0 \rightarrow I = k \sin 0 = k \times 0 = 0, \quad \theta = \frac{\pi}{6} \rightarrow I = k \sin \frac{\pi}{6} = \frac{k}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{3} \rightarrow I = k \sin \frac{\pi}{3} = \frac{k\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin \theta = 1 \Rightarrow I_{\max} = k, \quad \sin \theta = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

(پ) بیشترین مقدار I زمانی است که $\sin \theta$ برابر یک باشد یعنی:

۲۶

نمودار f بالاتر از g قرار دارد. $x < x_0 \Rightarrow$ نمودار g بالاتر از f قرار دارد. $x_0 < x < 2 \Rightarrow$ نمودار f بالاتر از g قرار دارد. $2 < x < 4 \Rightarrow$ نمودار g بالاتر از f قرار دارد. $x > 4 \Rightarrow$ 

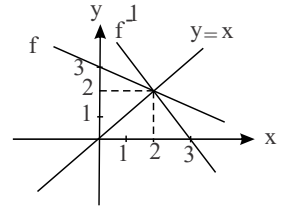
۲۷



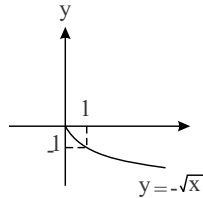
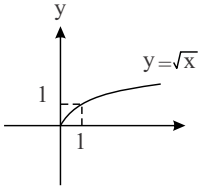
$$f(x) = -\frac{1}{2}x + 3 \Rightarrow \begin{cases} x=0 & x=2 \\ y=3 & y=2 \end{cases}$$

$$f(x) = -\frac{1}{2}x + 3 \Rightarrow -\frac{1}{2}x = 3 - y$$

$$x = 2y - 6 \Rightarrow y = f^{-1}(x) = 2x - 6$$



۲۸ برای رسم $y = -\sqrt{x}$ باید نمودار $y = \sqrt{x}$ را نسبت به محور x ها قرینه کنیم.



۲۹ تابع $f(x) = [x]$ در نقاطی به طول صحیح ناپیوسته است.

الف) $f(x) = [x]$ $(-2, 3) \Rightarrow$ عدد صحیح: $-1, 0, 1, 2$

تابع در نقاط $x = -1, 0, 1, 2$ ناپیوسته است.

ب) $f(x) = [x]$ $[-3, 2) \Rightarrow$ عدد صحیح: $-3, -2, -1, 0, 1$

پیوستگی راست تابع را در $x = -3$ باید بررسی کنیم.

$$f(-3) = -3, L^+ = \lim_{x \rightarrow (-3)^+} [x] = [-3 + \varepsilon] = -3$$

تابع در $x = -3$ پیوستگی راست دارد.

نقاط ناپیوستگی: $x = -2, -1, 0, 1$

۳۰

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 1 - 2x - 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2 - x + 1) - 2(x+1)}{x^2 - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2 - x + 1 - 2)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 1}{x-1} = \frac{1+1-1}{-1-1} = \frac{-1}{2}$$

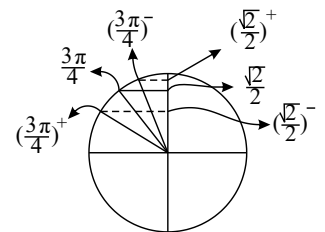
$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1 + 2x - 2}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1) + 2(x-1)}{x^2 + x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1 + 2)}{(x-1)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 3}{x+2} = \frac{5}{3}$$

۳۱ با استفاده از فرمول $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4})$ داریم:

$$L^- = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^-} [\sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4})] = [\sqrt{2} \sin(\frac{\pi}{4} - \varepsilon + \frac{\pi}{4})] = [\sqrt{2} \sin(\frac{3\pi}{4} - \varepsilon)]$$

$$= [\sqrt{2} \sin(\frac{3\pi}{4} - \varepsilon)] = [\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} + \varepsilon)] = [1 + \sqrt{2}\varepsilon] = 1$$



$$L^+ = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^+} [\sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4})] = [\sqrt{2} \sin(\frac{\pi}{4} + \varepsilon + \frac{\pi}{4})] = [\sqrt{2} \sin(\frac{3\pi}{4} + \varepsilon)]$$

$$= [\sqrt{2} \sin(\frac{3\pi}{4} + \varepsilon)] = [\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} - \varepsilon)] = [1 - \sqrt{2}\varepsilon] = 0 \text{ حد ندارد.}$$

$x = 3 \rightarrow$ یک همسایگی $(2, 4)$

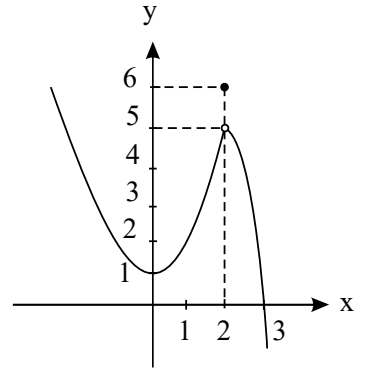
$x = 3 \rightarrow$ یک همسایگی محذوف $\{3\} \rightarrow (1, 5) - \{3\} = (1, 3) \cup (3, 5)$

$x = 3 \rightarrow$ یک همسایگی چپ $(2, 3)$ $x = 3 \rightarrow$ یک همسایگی راست $(3, 4)$

۳۲



$$f(x) \begin{cases} x^2 + 1 & x < 2 \\ 6 & x = 2 \\ -x^2 + 9 & x > 2 \end{cases} \left| \begin{array}{l} 2 \\ 5 \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} 2 \\ 5 \end{array} \right| \circ$$



با نزدیک شدن x به ۲ مقادیر تابع به ۵ نزدیک می‌شوند و داریم: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$.

۳۴ میدانیم: $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$ و $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x$

$$\begin{aligned} A &= \sin^2 \frac{\pi}{12} + \cos^2 \frac{\pi}{12} = 1 - 3 \left(\sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} \right)^2 = 1 - 3 \left(\frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{6} \right)^2 \\ &= 1 - \frac{3}{4} \sin^2 \frac{\pi}{6} = 1 - \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = 1 - \frac{3}{16} = \frac{13}{16} \end{aligned}$$

$$\frac{-\sin x}{2 + \sin x} = t \Rightarrow 2t + t \sin x = -\sin x \Rightarrow (1+t) \sin x = -2t$$

$$\sin x = \frac{-2t}{1+t} \quad -1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow |\sin x| \leq 1 \Rightarrow \left| \frac{-2t}{1+t} \right| \leq 1$$

$$\begin{aligned} \xrightarrow{t \neq -1} & \rightarrow |2t| \leq |1+t| \Rightarrow (2t)^2 \leq (t+1)^2 \Rightarrow (2t)^2 - (t+1)^2 \leq 0 \\ & \Rightarrow (2t+t+1)(2t-t-1) \leq 0 \Rightarrow (3t+1)(t-1) \leq 0 \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{3} \leq t \leq 1 \Rightarrow t = [t] = -1, 0, 1$$

برد تابع $R = \{-1, 0, 1\}$

$$y = \frac{\cos x - 1}{2 \cos x + 1} \Rightarrow \cos x - 1 = 2y \cos x + y$$

$$\Rightarrow (1 - 2y) \cos x = y + 1 \Rightarrow \cos x = \frac{y+1}{1-2y}, \quad -1 \leq \cos x \leq 1$$

$$\Rightarrow |\cos x| \leq 1 \Rightarrow \left| \frac{y+1}{1-2y} \right| \leq 1 \xrightarrow{y \neq \frac{1}{2}} |y+1| \leq |1-2y|$$

$$\Rightarrow y^2 + 2y + 1 \leq 1 - 2y + 4y^2 \Rightarrow 3y^2 - 4y \geq 0 \Rightarrow 3y(y - \frac{4}{3}) \geq 0$$

$$+ \bullet - \bullet + \Rightarrow y \leq 0 \quad \vee \quad y \geq \frac{4}{3} \Rightarrow R_f = (-\infty, 0] \cup [\frac{4}{3}, +\infty)$$

$$\frac{2 \sin(\Delta\pi - \frac{\pi}{10}) - \sin(\pi + \frac{2\pi}{\Delta}) + \sin(2\pi - \frac{2\pi}{\Delta}) - 2 \cos(\pi - \frac{2\pi}{\Delta})}{\cos(\pi - \frac{2\pi}{\Delta}) + 2 \cos(2\pi - \frac{2\pi}{\Delta}) - \sin(2\pi - \frac{\pi}{10})}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2 \sin \frac{\pi}{10} + \sin \frac{2\pi}{\Delta} - \sin \frac{2\pi}{\Delta} + 2 \cos \frac{2\pi}{\Delta}}{-\cos \frac{2\pi}{\Delta} - 2 \cos \frac{2\pi}{\Delta} + \sin \frac{\pi}{10}} = \frac{2 \sin(\frac{\pi}{10}) + 2 \cos(\frac{2\pi}{\Delta})}{-3 \cos(\frac{2\pi}{\Delta}) + \sin(\frac{\pi}{10})} \\ &= \frac{2 \sin \frac{\pi}{10} + 2 \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10})}{-3 \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10}) + \sin \frac{\pi}{10}} = \frac{2 \sin \frac{\pi}{10} + 2 \sin \frac{\pi}{10}}{-3 \sin \frac{\pi}{10} + \sin \frac{\pi}{10}} = \frac{4 \sin \frac{\pi}{10}}{-2 \sin \frac{\pi}{10}} = -2 \end{aligned}$$

$$\frac{2 \sin \frac{\pi}{10} + 2 \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10})}{-3 \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10}) + \sin \frac{\pi}{10}} = \frac{2 \sin \frac{\pi}{10} + 2 \sin \frac{\pi}{10}}{-3 \sin \frac{\pi}{10} + \sin \frac{\pi}{10}} = \frac{4 \sin \frac{\pi}{10}}{-2 \sin \frac{\pi}{10}} = -2$$

$$\frac{\tan(2\pi + \frac{\pi}{2} + x) + \sin(\pi - x) + 2 \cos(\Delta\pi + \frac{\pi}{2} - x) - \cot(\lambda\pi - x)}{-\cot(2\pi + \frac{\pi}{2} - x) + \sin(2\pi + \frac{\pi}{2} + x) + 2 \cos(12\pi - x) - \tan(2\pi - x)}$$

$$-\cot(2\pi + \frac{\pi}{2} - x) + \sin(2\pi + \frac{\pi}{2} + x) + 2 \cos(12\pi - x) - \tan(2\pi - x)$$



$$\begin{aligned} & \frac{\tan(\frac{\pi}{2} + x) + \sin x - 3 \cos(\frac{\pi}{2} - x) - \cot(-x)}{-\cot(\frac{\pi}{2} - x) - \sin(\frac{\pi}{2} + x) + 3 \cos(-x) - \tan(-x)} \\ &= \frac{-\cot x + \sin x - 3 \sin x + \cot x}{-\tan x - \cos x + 3 \cos x + \tan x} = \frac{-2 \sin x}{2 \cos x} = -\tan x \end{aligned}$$

۳۹

الف) $f(x) = \frac{2x - 18}{x - 9}$, $D_f = R - \{9\}$

$g(x) = 2$, $D_g = R \rightarrow D_f \neq D_g \rightarrow f, g$ برابر نیستند

ب) $f(x) = \frac{3x^2 + 6}{x^2 + 2}$, $x^2 + 2 = 0 \rightarrow$ ریشه ندارد $\rightarrow D_f = R$

$g(x) = 3 \rightarrow D_g = R \rightarrow D_f = D_g = R$

$f(x) = \frac{3x^2 + 6}{x^2 + 2} = \frac{3(x^2 + 2)}{x^2 + 2} = 3 = g(x) \rightarrow f, g$ برابرند.

ج) $f(x) = \sqrt{(x+6)^2} \rightarrow (x+6)^2 \geq 0 \rightarrow x \in R \rightarrow D_f = R$

$g(x) = |x+6| \rightarrow D_g = R \rightarrow D_f = D_g = R$

$f(x) = \sqrt{(x+6)^2} = |x+6| = g(x) \rightarrow f, g$ برابرند.

۴۰

$$\begin{aligned} & \frac{2 \sin(\frac{3\pi}{10}) - \sin \frac{\pi}{10} + \sin(\frac{3\pi}{10}) - 2 \sin(\frac{\pi}{10})}{\cos \frac{\pi}{10} \tan(\frac{\pi}{10}) + 2 \cos(\frac{3\pi}{10}) + \sin(\frac{2\pi}{10})} \\ &= \frac{2 \sin(\frac{\pi}{10}) - \sin(\frac{\pi}{10}) + \sin(\frac{\pi}{10}) + 2 \sin \frac{\pi}{10}}{\cos \frac{\pi}{10} \tan \frac{\pi}{10} + 2 \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10}) - \sin \frac{\pi}{10}} = \frac{4 \sin \frac{\pi}{10}}{\cos \frac{\pi}{10} \times \frac{\sin \frac{\pi}{10}}{\cos \frac{\pi}{10}} + 2 \sin \frac{\pi}{10} - \sin \frac{\pi}{10}} \\ &= \frac{4 \sin \frac{\pi}{10}}{\sin \frac{\pi}{10} + \sin \frac{\pi}{10}} = \frac{4 \sin \frac{\pi}{10}}{2 \sin \frac{\pi}{10}} = 2 \end{aligned}$$

۴۱

الف) $D_f = D_g = \{2, 4, 0\}$, $f(2) = 5$, $g(2) = -5 \rightarrow f(2) \neq g(2)$

f و g برابر نیستند.

ب) $D_f = D_g = \{4, -9, 5\}$, $f(4) = g(4) = 7$, $f(-9) = g(-9) = 2$, $f(5) = g(5) = 10$

f و g برابر هستند.

۴۲

$3a + 2b = 3\pi \Rightarrow 3a - 3b + 5b = 3\pi \Rightarrow 3(a - b) = 3\pi - 5b$

$\Rightarrow a - b = \pi - \frac{5b}{3} \Rightarrow \tan(a - b) = \tan(\pi - \frac{5b}{3}) = -\tan \frac{5b}{3}$

$3a + 2b = 3\pi \Rightarrow 2a + 2b + a = 3\pi \Rightarrow 2a + 2b = 3\pi - a$

$a + b = \frac{3\pi}{2} - \frac{a}{2} \Rightarrow \tan(a + b) = \tan(\frac{3\pi}{2} - \frac{a}{2}) = \tan(\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{a}{2})$

$\Rightarrow \tan(a + b) = \tan(\frac{\pi}{2} - \frac{a}{2}) = \cot \frac{a}{2}$

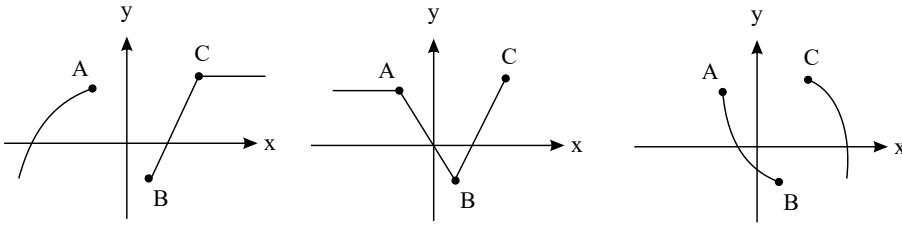
$\tan(a + b) \cdot \tan(a - b) = \cot \frac{a}{2} \times (-\tan \frac{5b}{3}) = -\cot \frac{a}{2} \tan \frac{5b}{3}$

۴۳

$$\frac{-\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) - \sin(2\pi + \pi + \alpha)}{\cos(3\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha) + \cos(6\pi + \pi - \alpha)} = \frac{-\cos \alpha - \sin(\pi + \alpha)}{\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) + \cos(\pi - \alpha)}$$

$$= \frac{-\cos \alpha + \sin \alpha}{-\sin \alpha - \cos \alpha} = \frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{\frac{\cos \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha} = \frac{1 - \frac{2}{3}}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{3 - 2}{3 + 2} = -\frac{1}{5}$$

۴۴



$$C^\circ = \frac{45}{\pi} \times B_{rad} \quad \frac{C^\circ}{180} = \frac{C_{rad}}{\pi} \Rightarrow C^\circ = \frac{180 C_{rad}}{\pi}$$

$$\Rightarrow \frac{180 C}{\pi} = \frac{45 B}{\pi} \Rightarrow 180 C = 45 B \Rightarrow 4 C = B, B + C = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow 4 C + C = \frac{\pi}{2} \Rightarrow C = \frac{\pi}{10} \rightarrow B = 4 C = 4 \times \frac{\pi}{10} = \frac{2\pi}{5}$$

۴۵

الف) $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{3^{x_1} - 1}{3^{x_1} + 2} = \frac{3^{x_2} - 1}{3^{x_2} + 2}$

$$\Rightarrow 3^{x_1+x_2} + 2 \times 3^{x_1} - 3^{x_2} - 2 = 3^{x_1+x_2} + 2 \times 3^{x_2} - 3^{x_1} - 2$$

$$\Rightarrow 3 \times 3^{x_1} = 3 \times 3^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow \text{تابع یک به یک است.}$$

۴۶

$$y = \frac{3^x - 1}{3^x + 2} \Rightarrow 3^x - 1 = y \times 3^x + 2y \Rightarrow 3^x - y \times 3^x = 2y + 1$$

$$(1 - y) \times 3^x = 2y + 1 \Rightarrow 3^x = \frac{2y + 1}{1 - y} \Rightarrow x = \log_3 \left(\frac{2y + 1}{1 - y} \right)$$

$$y = f^{-1}(x) = \log_3 \left(\frac{2x + 1}{1 - x} \right)$$

۴۷

الف) $(f + g)(-4) = f(-4) + g(-4) = 4 - 1 + (-1) = 2$

ب) $(f - 2g)(3) = f(3) - 2g(3) = 15 - 7 - 2 \left(-\frac{3}{2} - 2 \right) = 8 + 3 + 4 = 15$

ج) $\left(\frac{f+g}{g} \right)(0) = \frac{f(0) + g(0)}{g(0)} = \frac{-1 + 3}{-2} = \frac{2}{-2} = -1$

د) $(f \times g - 5) \left(\frac{1}{3} \right) = f \left(\frac{1}{3} \right) \cdot g \left(\frac{1}{3} \right) - 5 = \left(-\frac{1}{3} - 1 \right) \left(-\frac{1}{6} - 2 \right) - 5$

$$= \left(-\frac{4}{3} \right) \left(-\frac{13}{6} \right) - 5 = \frac{26}{9} - 5 = \frac{-19}{9}$$

۴۸

یادآوری: فاصله نقطه $A(x_0, y_0)$ از خط $ax + by + c = 0$ برابر است با:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$y = x \rightarrow A(m, m) \Rightarrow \frac{|3m + 4m - 1|}{\sqrt{9 + 16}} = 4$$

$$\Rightarrow |7m - 1| = 20 \rightarrow 7m - 1 = \pm 20 \rightarrow m = 3, m = -\frac{19}{7}$$

$$A(3, 3) \text{ یا } A \left(-\frac{19}{7}, -\frac{19}{7} \right)$$

$$AB = \sqrt{4 + 4} = 2\sqrt{2}, AC = \sqrt{16 + 16} = 4\sqrt{2}$$

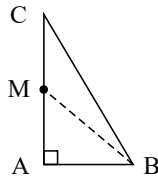
$$BC = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40}, BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow 40 = 8 + 32$$

۴۹

الف)



مثلث در رأس A قائمه است.



(ب)

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot AB = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 8$$

(ج)

$$M = \frac{A+C}{2} \Rightarrow M = (0, 4), B(4, 4) \rightarrow m_{BM} = \frac{4-4}{4-0} = 0$$

خط BM یک خط افقی با معادله $y = 4$ است.

۵۰

$$|x^2 - 9| + 9 > x^2 \Rightarrow |x^2 - 9| > x^2 - 9$$

نکته: نامساوی $|A| > A$ فقط زمانی صحیح است که $A < 0$ باشد.

$$\Rightarrow x^2 - 9 < 0 \Rightarrow x^2 < 9 \Rightarrow |x| < 3 \Rightarrow -3 < x < 3$$

۵۱

$$x^2 - 4x = t \rightarrow t + \frac{10}{t+5} = 2 \xrightarrow{\times(t+5)}$$

$$t(t+5) + 10 = 2(t+5) \rightarrow t^2 + 5t + 10 - 2t - 10 = 0$$

$$t^2 + 3t = 0 \rightarrow t(t+3) = 0 \rightarrow t = 0, t = -3$$
 هر ۲ قابل قبول ۳-

$$t = 0 \rightarrow x^2 - 4x = 0 \rightarrow x = 0, x = 4$$

$$t = -3 \rightarrow x^2 - 4x = -3 \rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \rightarrow x = 1, x = 3$$

۵۲

$$\text{قیمت اسباب بازی قبل از تخفیف} = x \rightarrow \text{تعداد اسباب بازی} = \frac{120}{x}$$

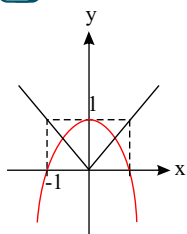
$$\text{قیمت اسباب بازی بعد از تخفیف} = x - 1 \rightarrow \text{تعداد اسباب بازی} = \frac{120}{x-1}$$

$$\frac{120}{x-1} - \frac{120}{x} = 4 \Rightarrow 120 \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} \right) = 4 \Rightarrow \frac{x-x+1}{x(x-1)} = \frac{4}{120}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2-x} = \frac{1}{30} \rightarrow x^2 - x - 30 = 0 \rightarrow (x-6)(x+5) = 0 \rightarrow x = 6$$

قیمت هر اسباب بازی قبل از تخفیف ۶ هزار تومان بوده است.

$$53 \quad f(x) = 1 - x^2, \quad g(x) = |x|$$

معادله ۲ ریشهی قرینهی هم دارد \rightarrow

۵۴

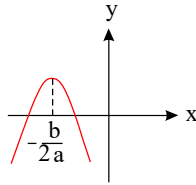
$$x = 0 \rightarrow f(0) = c = 1 \rightarrow \boxed{c=1} \rightarrow f(x) = x^2 + mx + 1$$

$$\text{سهمی بر محور } x \text{ مماس} \rightarrow \Delta = 0 \rightarrow m^2 - 4 = 0 \rightarrow m = \pm 2 \quad (1)$$

$$\text{غ ق ق } -2 \rightarrow \boxed{m=2}, m = -2 \quad (1) \quad \text{غ ق ق } = x = -\frac{b}{2a} = -\frac{m}{2} < 0 \Rightarrow m > 0$$

۵۵

دهانه‌ی سهمی رو به پایین است بنابراین $a < 0$ است. محل تلاقی نمودار تابع با محور y ، c است پس $c < 0$ است.



طول رأس سهمی $x = -\frac{b}{2a}$ ، مقداری منفی است پس:
 $-\frac{b}{2a} < 0 \xrightarrow{a < 0} b < 0$

محل تلاقی نمودار تابع با محور x ریشه‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ است. بنابراین معادله دو ریشه دارد.

۵۶

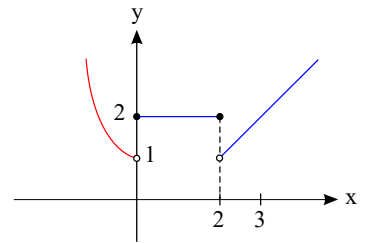
$$\sin \alpha = \frac{3}{5} \rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \xrightarrow{\text{ربع اول}} \cos \alpha = \frac{4}{5}$$

$$\cos \beta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \sin \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \left(\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(-\frac{4}{5} + \frac{3}{5}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(-\frac{1}{5}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{10}$$

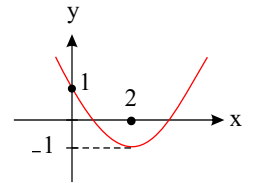
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x < 0 \\ 2 & 0 \leq x \leq 2 \\ x - 1 & 2 < x \\ \text{برد} = (1, +\infty) \end{cases}$$



۵۷

در هر تابع درجه ۲، محل تلاقی نمودار با محور y ها c است. بنابراین $c = 1$ است. طول رأس سهمی $x = -\frac{b}{2a}$ می‌باشد.

$$\begin{aligned} -\frac{b}{2a} = 2 &\rightarrow b = -4a \\ \frac{b = -4a}{c=1} & \\ P(2) = -1 &\rightarrow 4a + 2b + c = -1 \rightarrow 4a - 8a + 1 = -2 \\ \rightarrow -4a = -2 &\rightarrow a = \frac{1}{2} \\ b = -4a &\rightarrow b = -2 \end{aligned}$$



تابع $f(x)$ را در نقطه $x = a$ پیوسته گوئیم هرگاه $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} 4 - 3x & x \leq 1 \\ 2x^2 + 1 & x > 1 \end{cases}$$

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 4 - 3x = 4 - 3 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 2x^2 + 1 = 3$$

تابع در $x = 1$ فقط پیوستگی چپ دارد و در کل ناپیوسته است.

تابع $f(x)$ را در نقطه $x = a$ پیوسته گوئیم هرگاه $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & x \neq 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)} = 2$$

$$f(1) = 1$$

بنابراین تابع $f(x)$ در نقطه $x = 1$ پیوسته نیست.

۶۱

$$y = \sqrt{2x + 3} \xrightarrow{\text{توان دو}} y^2 = 2x + 3 \rightarrow y^2 - 3 = 2x \rightarrow x = \frac{y^2 - 3}{2} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x^2 - 3}{2}$$



۶۲) تابعی معکوس پذیر است که یک به یک باشد.

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \sqrt{1 - \sqrt{x_1^r - 1}} = \sqrt{1 - \sqrt{x_2^r - 1}}$$

$$\Rightarrow 1 - \sqrt{x_1^r - 1} = 1 - \sqrt{x_2^r - 1} \Rightarrow x_1^r - 1 = x_2^r - 1 \Rightarrow x_1 = x_2$$

تابع یک به یک است پس وارون پذیر است.

$$f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{x^r - 1}} = y \Rightarrow 1 - \sqrt{x^r - 1} = y^r$$

$$\Rightarrow 1 - y^r = \sqrt{x^r - 1} \Rightarrow x^r - 1 = (1 - y^r)^r \Rightarrow x = \sqrt[r]{(1 - y^r)^r + 1} \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[r]{(1 - x^r)^r + 1}$$

۶۳) یک به یک بودن را در تک تک بازه‌هایی که تابع در آن تعریف شده است، بررسی می‌کنیم.

یک به یک است $x \leq -1$: $x_1^r + 2 = x_2^r + 2 \Rightarrow x_1^r = x_2^r \xrightarrow{x \leq -1} x_1 = x_2$

یک به یک نیست $-1 < x < 1$: $x_1^r = x_2^r \Rightarrow x_1 = \pm x_2$

یک به یک است. $1 \leq x$: $1 + x_1 = 1 + x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$

تابع در بازه‌ی دوم یک به یک نمی‌باشد پس در کل وارون پذیر نخواهد بود.

۶۴)

$$D_f : x > 2 \quad D_g : R - \{1\}$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g / g(x) \in D_f\} = \left\{x \neq 1 / \frac{1}{x-1} > 2\right\}$$

$$\rightarrow \frac{1}{x-1} > 2 \rightarrow \frac{1}{x-1} - 2 > 0 \rightarrow \frac{-2x+3}{x-1} > 0 \rightarrow x = \frac{3}{2}, x = 1$$

	$-\infty$	1	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$-2x+3$	$+$	$+$	$+$	$-$
$x-1$	$-$	$+$	$+$	$+$
$p(x)$	$-$	$+$	$-$	$-$

$$1 < x < \frac{3}{2} \rightarrow D_{f \circ g} = (1, \frac{3}{2})$$

$$(g \circ f)(x) = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{x-2}} - 1}$$

۶۵)

$$2x^r - 8x + m = 0 \quad \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = 4 \quad \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{m}{2}$$

$$\alpha = \beta + 2 \Rightarrow \begin{cases} \alpha - \beta = 2 \\ \alpha + \beta = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 3 \\ \beta = 1 \end{cases} \Rightarrow \alpha\beta = 3 = \frac{m}{2} \Rightarrow m = 6$$

۶۶)

$$\alpha\beta^r + 4 = (\alpha\beta)\beta + 4 = 4\beta + 4 = 0 \Rightarrow \beta = -1$$

$$\alpha\beta = \frac{c}{a} = 4$$

$$\text{بند} \beta = -1 \text{ ریشه معادله است و در معادله صدق می‌کند} \Rightarrow 1 + 3m + 4 = 0 \Rightarrow m = \frac{-5}{3}$$

۶۷) نکته: $|U| = -U \rightarrow U \leq 0$

$$|2x^r - 1| = -(2x^r - 1) \Rightarrow 2x^r - 1 \leq 0$$

$$2x^r \leq 1$$

$$x^r \leq \frac{1}{2}$$

$$\frac{-\sqrt{2}}{2} \leq x \leq \frac{+\sqrt{2}}{2}$$

۶۸)

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -1 \Rightarrow \begin{cases} \alpha + 1 = -\beta \\ \beta + 1 = -\alpha \end{cases}$$

$$\frac{\beta^5}{(\alpha + 1)^5} + \frac{\alpha^r}{(\beta + 1)^r} = \frac{\beta^5}{(-\beta)^5} + \frac{\alpha^r}{(-\alpha)^r} = -1 - 1 = -2$$

۶۹)



$$f(x) = ax^r + b$$

$$A \begin{matrix} | \\ \circ \end{matrix} \in f \Rightarrow f(1) = a + b = 0$$

$$A \begin{matrix} | \\ \circ \end{matrix} \in f^{-1} \Rightarrow A' \begin{matrix} | \\ 1 \end{matrix} \in f \Rightarrow f(0) = b = 1 \Rightarrow a = -1$$

$$2a + b = -1$$

۷۰ با توجه به ضابطه $f(x)$:

$$\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) > 0 \Rightarrow -f(x) < 0 \Rightarrow f(-f(x)) = 0$$

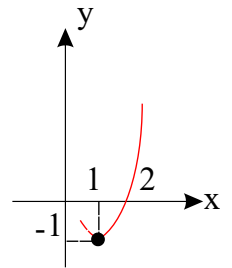
۷۱

$$\begin{cases} f(g(2)) \stackrel{g(2)=2}{=} f(2) = 2(-2) + 3 = -1 \\ g(f(-1)) \stackrel{f(-1)=1}{=} g(1) = 1 - 2 = -3 \end{cases} \Rightarrow \frac{f \circ g(2)}{g \circ f(-1)} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$$

۷۲

$$f(x) = x^r - 2x \quad x \geq 1$$

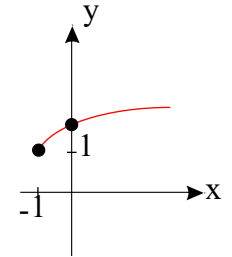
$$S \begin{cases} x = \frac{2}{2} = 1 \\ y = 1 - 2 = -1 \end{cases}$$



وارون پذیر است چون هر خط به موازات محور x ها نمودار را در یک نقطه قطع می کند.

$$D_f = [1, +\infty) \quad R_f = [-1, +\infty)$$

$$\text{ب) } \begin{cases} D_{f^{-1}} = [-1, +\infty) \\ R_{f^{-1}} = [1, +\infty) \end{cases}$$



$$y = x^r - 2x + 1 - 1 \Rightarrow y = (x-1)^r - 1 \Rightarrow \sqrt{y+1} = |x-1| \Rightarrow \sqrt{y+1} = x-1$$

$$\sqrt{y+1} + 1 = x \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x+1} + 1$$

۷۳

توجه کنیم که در تعیین دامنه ی معادلات اصم، دو طرف معادله باید مثبت باشد.

$$x + \sqrt{x} = 6 \Rightarrow \sqrt{x} = 6 - x$$

$$D: x \geq 0, 6 - x \geq 0 \Rightarrow x \in [0, 6]$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} x = (6-x)^2 \Rightarrow x^2 - 12x + 36 = 0 \Rightarrow (x-4)(x-9) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{ق ق } x = 4 \\ \text{ق غ } x = 9 \end{cases}$$

۷۴

$$\cos 3\alpha = \cos(2\alpha + \alpha) = \cos 2\alpha \cos \alpha - \sin 2\alpha \sin \alpha$$

$$= (2\cos^2 \alpha - 1) \cos \alpha - (2\sin \alpha \cdot \cos \alpha) \cdot \sin \alpha$$

$$= (2\cos^2 \alpha - \cos \alpha - 2\sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha)$$

$$= 2\cos^2 \alpha - \cos \alpha - 2(1 - \cos^2 \alpha) \cdot \cos \alpha$$

$$2\cos^2 \alpha - \cos \alpha - 2\cos \alpha + 2\cos^3 \alpha = 2\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha$$

۷۵

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 0 \rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 + 1 = x_2 + 1 \Rightarrow x_1 = x_2 \\ x^r + 1, & x \geq 0 \rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^r + 1 = x_2^r + 1 \Rightarrow |x_1| = |x_2| \xrightarrow{x \geq 0} x_1 = x_2 \end{cases}$$

$$x < 0 \rightarrow x+1 < 1 \rightarrow y < 1 \rightarrow R_{f_1} = (-\infty, 1)$$

$$x \geq 0 \rightarrow x^r + 1 \geq 1 \rightarrow y \geq 1 \rightarrow R_{f_2} = [1, +\infty) \rightarrow R_{f_1} \cap R_{f_2} = \emptyset \checkmark \rightarrow \text{تابع یک به یک است}$$

$$y = x+1 \rightarrow x = y-1 \Rightarrow y = x-1$$

$$x < 0 \rightarrow x+1 < 1 \Rightarrow y < 1 \Rightarrow D_{f_1^{-1}} = (-\infty, 1)$$



$$y = x^r + 1 \rightarrow x^r = y - 1 \Rightarrow |x| = \sqrt{y-1} \xrightarrow{x \geq 0} x = \sqrt{y-1} \Rightarrow y = \sqrt{x-1}$$

$$x \geq 0 \Rightarrow x^r \geq 0 \Rightarrow x^r + 1 \geq 1 \Rightarrow y \geq 1 \Rightarrow D_{f^{-1}} = [1, +\infty)$$

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x-1, & x < 1 \\ \sqrt{x-1}, & x \geq 1 \end{cases}$$

تذکر: برای توابع چند ضابطه‌ای تابعی یک به یک است که اولاً هر کدام از ضابطه‌ها به تنهایی در محور خود یک به یک باشند ثانیاً اشتراک برد ضابطه‌ها سهمی باشد.

۷۶

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2-|x-1|}} \quad g(x) = |x-1| \quad D_g = R$$

$$2 - |x-1| > 0 \Rightarrow 2 > |x-1| \Rightarrow -2 < x-1 < 2 \Rightarrow -1 < x < 3 = D_f$$

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g \Rightarrow -1 < x < 3 \cap R \Rightarrow (-1, 3)$$

$$f \circ g(x) = \{x \mid x \in D_g, g(x) \in D_f\}$$

$$= \{x \mid x \in R, -1 < |x-1| < 2\} \Rightarrow |x-1| < 2 \Rightarrow -2 < x-1 < 2 \Rightarrow D_{f \circ g} = (-2, 4)$$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = \left| \frac{1}{\sqrt{2-|x-1|}} - 1 \right|$$

۷۷

$$f(x) = \frac{x-1}{x}$$

$$y_1 = y_2 \Rightarrow x_1 = x_2 \quad \text{برای یک به یک بودن باید:}$$

$$\frac{x_1-1}{x_1} = \frac{x_2-1}{x_2} \Rightarrow \cancel{x_1 x_2} - x_2 = \cancel{x_1 x_2} - x_1 \Rightarrow -x_2 = -x_1 \Rightarrow x_1 = x_2$$

۷۸

الف

$$23^\circ + 22^\circ = 45^\circ \Rightarrow \tan(23^\circ + 22^\circ) = \tan 45^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{\tan 23^\circ + \tan 22^\circ}{1 - \tan 23^\circ \times \tan 22^\circ} = 1 \Rightarrow \tan 23^\circ + \tan 22^\circ = 1 - \tan 23^\circ \times \tan 22^\circ$$

$$\Rightarrow \tan 23^\circ + \tan 22^\circ + \tan 23^\circ \tan 22^\circ = 1$$

ب

$$39^\circ + 21^\circ = 60^\circ \Rightarrow \tan(39^\circ + 21^\circ) = \tan 60^\circ$$

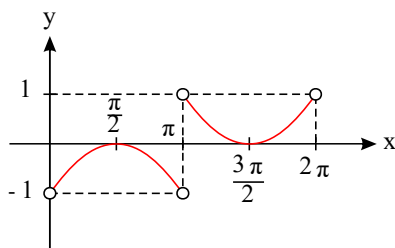
$$\Rightarrow \frac{\tan 39^\circ + \tan 21^\circ}{1 - \tan 39^\circ \times \tan 21^\circ} = \sqrt{3} \Rightarrow \tan 39^\circ + \tan 21^\circ = \sqrt{3} - \sqrt{3} \tan 39^\circ \times \tan 21^\circ$$

$$\Rightarrow \tan 39^\circ + \tan 21^\circ + \sqrt{3} \tan 39^\circ \tan 21^\circ = \sqrt{3}$$

۷۹

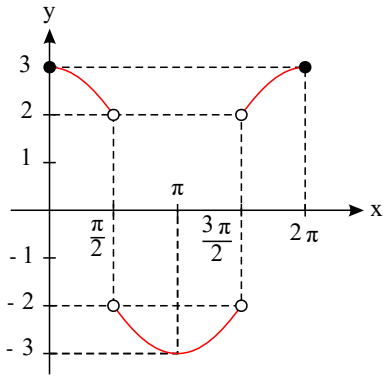
الف

$$y = \sin x - \frac{|\sin x|}{\sin x} = \begin{cases} \sin x - \frac{\sin x}{\sin x} = \sin x - 1, & \sin x > 0 \rightarrow 0 < x < \pi \\ \sin x - \frac{-\sin x}{\sin x} = \sin x + 1, & \sin x < 0 \rightarrow \pi < x < 2\pi \end{cases}$$

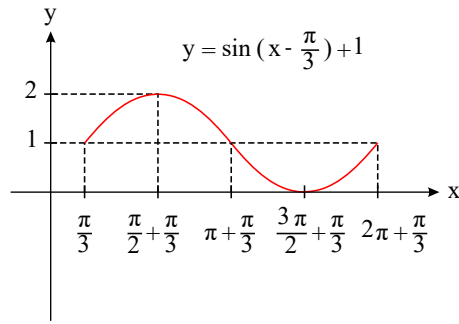
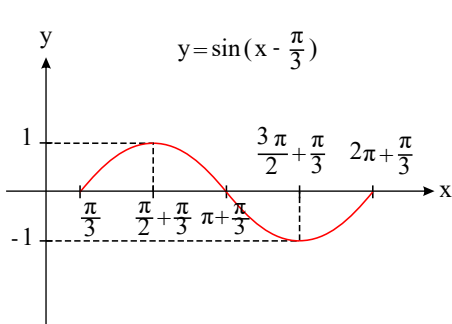


ب

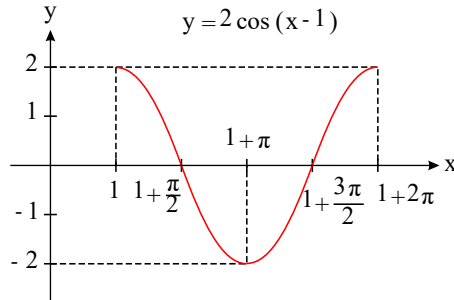
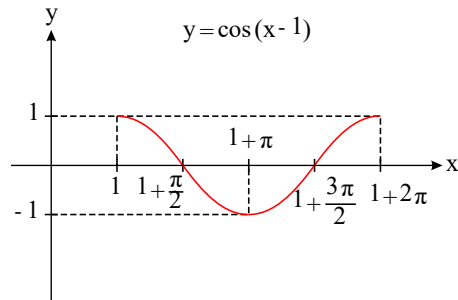
$$y = \frac{2|\cos x|}{\cos x} + \cos x = \begin{cases} \frac{2 \cos x}{\cos x} + \cos x = \cos x + 2, & \cos x > 0 \Rightarrow 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \text{ یا } \frac{3\pi}{2} < x \leq 2\pi \\ -\frac{2 \cos x}{\cos x} + \cos x = \cos x - 2, & \cos x < 0 \Rightarrow \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$



الف



ب



الف

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow -2 \leq 2 \sin x \leq 2 \Rightarrow -2 + 3 \leq 2 \sin x + 3 \leq 2 + 3$$

$$\Rightarrow 1 \leq y \leq 5 \Rightarrow \text{برد تابع} = [1, 5]$$

ب

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow +4 \geq -4 \cos x \geq -4 \Rightarrow -4 + \frac{1}{2} \leq -4 \cos x + \frac{1}{2} \leq 4 + \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{7}{2} \leq y \leq \frac{9}{2} \Rightarrow \text{برد تابع} = \left[-\frac{7}{2}, \frac{9}{2}\right]$$

الف

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} \times \frac{x + \sqrt{x}}{x + \sqrt{x}} \times \frac{\sqrt[3]{x^3} + \sqrt[3]{x} + 1}{\sqrt[3]{x^3} + \sqrt[3]{x} + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^3 - x)(\sqrt[3]{x^3} + \sqrt[3]{x} + 1)}{(x - 1)(x + \sqrt{x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x - 1)(\sqrt[3]{x^3} + \sqrt[3]{x} + 1)}{(x - 1)(x + \sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(\sqrt[3]{x^3} + \sqrt[3]{x} + 1)}{x + \sqrt{x}} = \frac{1 \times 3}{2} = \frac{3}{2}$$

ب

۸۰

۸۱

۸۲



$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2 + \sqrt{x+5}} - \sqrt{5}}{x^2 - 16} &\times \frac{\sqrt{2 + \sqrt{x+5}} + \sqrt{5}}{\sqrt{2 + \sqrt{x+5}} + \sqrt{5}} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 + \sqrt{x+5} - 5}{(x^2 - 16)(\underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{x+5}} + \sqrt{5}}_{2\sqrt{5}})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x+5} - 3}{2\sqrt{5}(x^2 - 16)} \times \frac{\sqrt{x+5} + 3}{\sqrt{x+5} + 3} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x + 5 - 9}{2\sqrt{5}(x-4)(x+4)(\sqrt{x+5} + 3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{2\sqrt{5}(x+4)(\sqrt{x+5} + 3)} = \frac{1}{2\sqrt{5} \times 8 \times 6} = \frac{1}{96\sqrt{5}} \end{aligned}$$

۸۳

الف

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - 1} \times \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{(x-1)(x+1)(\sqrt{x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{1}{4}$$

ب

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 16} \times \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 2} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{(x-4)(x+4)(\sqrt{x} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{(x+4)(\sqrt{x} + 2)} = \frac{1}{8 \times 4} = \frac{1}{32}$$

۸۴

الف

$$L^- = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x - 1) = 1, L^+ = \lim_{x \rightarrow 1^+} (-x + 2) = 1, f(1) = a \Rightarrow \boxed{a = 1}$$

ب

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+2)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+2) = 3, g(1) = a \Rightarrow \boxed{a = 3}$$

پ

$$h(1) = 1 + a, L^+ = \lim_{x \rightarrow 1^+} [x] + a = 1 + a$$

$$L^- = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} \times \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x - 1}{(x-1)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{1}{2} \Rightarrow 1 + a = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{a = -\frac{1}{2}}$$

ت

$$k(1) = (1 - a) \times 1 = 1 - a, L^+ = \lim_{x \rightarrow 1^+} ([x] - a)[x] = (1 - a) \times 1 = 1 - a$$

$$L^- = \lim_{x \rightarrow 1^-} ([x] - a)[x] = (0 - a) \times 0 = 0 \Rightarrow 1 - a = 0 \Rightarrow \boxed{a = 1}$$

۸۵

الف

$$\log_{b^m}^a = \frac{n}{m} \log_b^a$$

$$\begin{aligned} \log_{r^{-1}} 2^4 - \log_{r^4} 2^5 + 2 \log_{r^{-4}} 2 &= \frac{4}{-1} \log_r^2 - \frac{5}{4} \log_r^2 + 2 \times \left(\frac{1}{-4}\right) \log_r^2 \\ &= -4 - \frac{5}{4} - \frac{1}{2} = \frac{-16 - 5 - 2}{4} = \frac{-23}{4} \end{aligned}$$

ب

$$\log_{b^m}^a = \frac{n}{m} \log_b^a$$

$$\begin{aligned} 2 \log_{r^3} 3^{-2} - \log_r (3^2 \times 3^{\frac{1}{2}}) + \log_{r^{-1}} (3^{-2} \times 3^{-\frac{1}{4}}) \\ &= 2(-2) \times \frac{1}{3} \log_r^3 - \log_r 3^{\frac{5}{2}} + \log_{r^{-1}} 3^{-\frac{9}{4}} = -\frac{4}{3} - \frac{5}{2} \log_r^3 + \left(-\frac{1}{4}\right) \left(-\frac{1}{r}\right) \log_r^3 \\ &= -\frac{4}{3} - \frac{5}{2} + \frac{1}{4} = \frac{-16 - 30 + 27}{12} = \frac{-19}{12} \end{aligned}$$

الف

۸۶



$$\log_{b^m}^{a^n} = \frac{n}{m} \log_b^a$$

$$\log_{\sqrt{3}}^x \times \log_{\sqrt{3}}^x \times \log_{\sqrt{3}}^x \times \log_{\sqrt{3}}^x = \frac{2}{3} \Rightarrow \log_{\sqrt{3}}^x \times \frac{1}{\sqrt{3}} \log_{\sqrt{3}}^x \times \frac{1}{\sqrt{3}} \log_{\sqrt{3}}^x \times \frac{1}{\sqrt{3}} \log_{\sqrt{3}}^x = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{3}} (\log_{\sqrt{3}}^x)^4 = \frac{2}{3} \Rightarrow (\log_{\sqrt{3}}^x)^4 = \frac{2}{3} \times 27 = 18 = 2^2 \times 3^2$$

$$\log_{\sqrt{3}}^x = 2 \rightarrow x = 3^2 = 9 \text{ جواب}$$

$$\log_{\sqrt{3}}^x = \pm 2 \begin{cases} \log_{\sqrt{3}}^x = 2 \rightarrow x = 3^2 = 9 \\ \log_{\sqrt{3}}^x = -2 \rightarrow x = 3^{-2} = \frac{1}{9} \end{cases} \text{ جواب}$$

ب

$$\log_{b^m}^{a^n} = \frac{n}{m} \log_b^a$$

$$\log x = t \rightarrow \frac{1}{1-4t} + \frac{4}{2+t} = 3 \Rightarrow \frac{2+t+4-16t}{(1-4t)(2+t)} = 3$$

$$3(2+t-8t-4t^2) = 6-16t \Rightarrow 6+3t-12t-12t^2 = 6-16t$$

$$12t^2 + 6t = 0 \Rightarrow t = 0, t = -\frac{1}{2} \Rightarrow \log x = 0 \rightarrow \boxed{x=1} \text{ جواب}, \log x = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x = 10^{-\frac{1}{2}} \rightarrow \boxed{x = \frac{1}{\sqrt{10}}} \text{ جواب}$$

۸۷

الف) $(f \circ g)(4) = f(g(4)) = f(7) = 5$ نادرست

ب) $\left(\frac{f}{g}\right)(2) = \frac{f(2)}{g(2)} = \frac{2+4}{3 \times 2} = \frac{6}{6} = 1$ درست

پ) $(f \circ g)(5) = f(g(5)) = f(10-1) = f(9) = \sqrt{9} = 3 = g(2)$ درست

ت) نادرست: ترکیب توابع خاصیت جابجایی ندارد یعنی: $f \circ g \neq g \circ f$

ث) نادرست $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x^2-4}) = (\sqrt{x^2-4})^2 - 4 = x^2 - 4 - 4 = x^2 - 8$

ج) درست $D_{f \circ g} = D_{g \circ f} = D_f \cap D_g, (f \circ g)(x) = f(g(x)) = g(x)f(x) = (g \circ f)(x)$

۸۸

الف

$$\log_{b^m}^{a^n} = \frac{n}{m} \log_b^a, a^{\log_c^b} = b^{\log_c^a}$$

$$\log\left(\frac{8x^2+5}{2}\right) = \log(2x-1)^2 \rightarrow \frac{8x^2+5}{2} = (2x-1)^2 = 4x^2-4x+1$$

$$\Rightarrow 8x^2+5 = 4x^2-4x+1 \Rightarrow 4x^2+4x+4 = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{4}$$

معادله جواب ندارد.

ب

$$x^{\log_{\sqrt{3}}^9} + \sqrt{3}^{\log_{\sqrt{3}}^x} = 98 \Rightarrow \sqrt{3}^{\log_{\sqrt{3}}^x} + \sqrt{3}^{\log_{\sqrt{3}}^x} = 98$$

$$2 \times \sqrt{3}^{\log_{\sqrt{3}}^x} = 98 \Rightarrow \sqrt{3}^{\log_{\sqrt{3}}^x} = 49 = 7^2 \rightarrow \log_{\sqrt{3}}^x = 2$$

$$\Rightarrow x = 3^2 \rightarrow x = 9$$

۸۹

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}^+} ax \left[\frac{1}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}^-} \cos \frac{\pi x}{2} \xrightarrow{\left(\frac{x > \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{1}{x} < \sqrt{2}\right)} \frac{1}{\sqrt{2}} a(1) = \cos \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow a = \sqrt{2}$$

الف

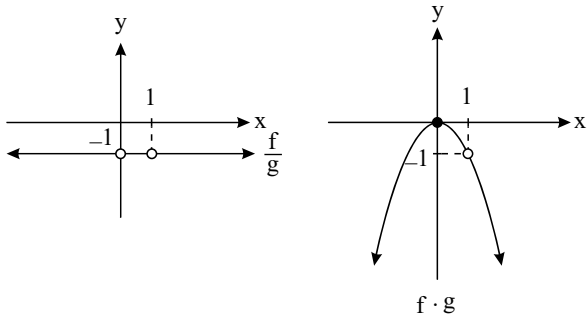
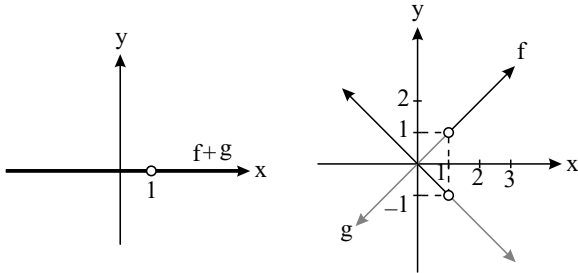
$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \begin{cases} \circ & x > 1 \\ \circ & x < 1 \end{cases}$$



$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \begin{cases} -x^x & x > 1 \\ -x^x & x < 1 \end{cases}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} -1 & x > 1 \\ -1 & x < 1, x \neq 0 \end{cases}$$

ب



ب

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = -1 \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = 1$$

ت

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (f + g)(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \rightarrow 1} -x^x = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = -1$$

ث

خبر در صورتی می‌توان از قضیه حد مجموع، ضرب و تقسیم در $x = 1$ استفاده کرد که توابع f و g در $x = 1$ حد داشته باشند و چون در اینجا f و g در 1 حد ندارند ما مستقیماً توابع

$f + g$ و $f \cdot g$ و $\frac{f}{g}$ را به دست می‌آوریم و سپس حد آن‌ها را پیدا کردیم.

توجه: در صورتی که دو تابع f و g در $x = a$ حد داشته باشند، می‌توانیم بنویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f + g) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}, \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$$

خبر زیرا:

بله زیرا:

ویژه خرداد ۱۴۰۲



فیلم تحلیل سوالات امتحانات پایان ترم

برای دیدن **فیلم حل نمونه سوالات** بزن رو لینک زیر

مشاهده فیلم ها

تحلیل نمونه سوالات حسابان یازدهم ریاضی