



۱ ورق فلزی مربع شکل به طول ضلع یک متر را در نظر بگیرید. می‌خواهیم از چهار گوشه آن مربع‌های کوچکی به ضلع x برش بزنیم و آنها را کنار بگذاریم. سپس لبه جعبه را به اندازه x برمی‌گردانیم تا یک جعبه در باز ساخته شود. مقدار x چقدر باشد تا حجم جعبه حداکثر مقدار ممکن گردد؟

۲ در تابع $f(x) = \frac{x+2}{x^2+mx+6}$ ، m را چنان بیابید که تابع فقط یک مجانب قائم داشته باشد.

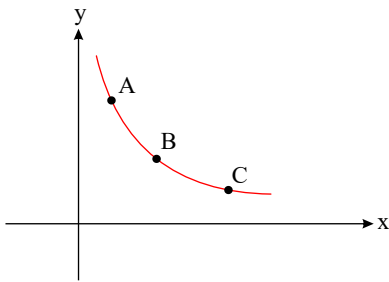
۳ اگر $f(x) = x^2 - mx + 2$ بر $2x - 4$ بخش پذیر باشد، m را بیابید.

۴ اگر f روی \mathbb{R} اکیداً نزولی باشد، دامنه تابع g را بیابید.

$$g(x) = \sqrt{f(|2x-1|) - f(|x+1|)}$$

۵ آهنگ لحظه‌ای تغییر حجم یک کره به شعاع R نسبت به تغییر مساحت سطح همان کره را بر حسب R بیابید.

۶ نمودار تابع f به صورت مقابل است. مقادیر مشتق تابع f در نقاط A, B, C را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.



۷ اگر دوره تناوب تابع $f(x) = m \cos(mx) + 3$ برابر با $\frac{\pi}{4}$ باشد، مینیمم و ماکزیمم تابع را بیابید. ($m > 0$)

۸ اگر تابع f روی \mathbb{R} اکیداً نزولی و $f(-2) = 0$ باشد، دامنه تابع زیر را بیابید.

$$g(x) = \sqrt{(x^2 - 11)f(x)}$$

۹ اگر f و g روی \mathbb{R} توابعی اکیداً صعودی باشند، ثابت کنید تابع $f + g$ نیز روی \mathbb{R} اکیداً صعودی است.

۱۰ نمودار $y = |x|$ را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم، سپس در راستای افقی با ضریب ۳ منقبض و در نهایت آن را ۲ واحد به چپ منتقل می‌کنیم. ضابطه تابع حاصل را بنویسید.

۱۱ تابع $y = x^3$ را ابتدا نسبت به محور y ها قرینه کرده، سپس نمودار حاصل را دو واحد به چپ منتقل کرده و در نهایت آن را ۵ واحد به بالا منتقل می‌کنیم تا تابع f حاصل شود. ضابطه تابع وارون تابع f را بیابید.

۱۲ معادلات زیر را حل کنید.

الف

$$\sin x + \cos x = 1 \quad [0, 2\pi]$$

ب

$$\sin 2x + \cos x = 0$$

پ

$$\cos^f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{4}$$



ت

$$2 \sin(3\pi x) = \sqrt{3}$$

ث

$$4 \cos 2x - 8 \cos x + 4 = 0$$

الف

$$\tan 2x = 3 \tan x$$

ب

$$\tan^3 x - \tan^2 x + 1 = \tan x$$

پ

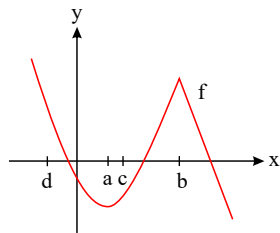
$$\tan^4 x - 2 \tan^2 x - 3 = 0$$

ت

$$\cos 3x = 4 \cos^2 x$$

ث

$$\sin 3x + 2 \cos 2x = 2$$



۱۳) معادلات زیر را حل کنید.

۱۴) با در نظر گرفتن نمودار f در شکل، به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف) طول نقطه‌ای که مماس در آن افقی است.

ب) طول نقطه‌ای که مشتق در آن مقداری منفی است.

پ) طول نقطه‌ای که تابع در آن مشتق پذیر نیست.

۱۵) درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.

الف) نمودار تابع $y = (x + 2)^2$ را می‌توان با ۲ واحد انتقال نمودار $y = x^2$ به سمت چپ رسم کرد.ب) تابع $f(x) = -x^2 + 2x$ روی بازه $(-\infty, 3]$ اکیداً صعودی است.پ) اگر تابع f در $x = a$ پیوسته باشد آنگاه در این نقطه مشتق پذیر است.

ت) آهنگ متوسط تغییر با شیب خط قاطع و آهنگ لحظه‌ای تغییر با شیب خط مماس در آن نقطه برابری دارند.

۱۶) آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع $f(x) = 2x^2 + 5x + 1$ در نقطه $x = 2$ چند برابر آهنگ تغییر لحظه‌ای آن در $x = -1$ است؟۱۷) ضرایب a و b در تابع $f(x) = -x^2 + ax + b$ طوری تعیین کنید که در نقطه $(1, 2)$ ماکزیمم نسبی داشته باشد.۱۸) نمودار تابع $f(x) = (x + 1)^3$ را رسم کنید. این تابع در دامنه خود اکیداً صعودی است یا اکیداً نزولی؟

۱۹) یک مستطیل در یک نیم‌دایره محاط شده است. اگر شعاع دایره، ۴ سانتی‌متر باشد، طول و عرض مستطیل را طوری به دست آورید که مساحت آن بیشترین مقدار ممکن باشد.

۲۰) معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t) = t^2 - t + 1$ بر حسب متر در بازه زمانی $[0, 5]$ (ت بر حسب ثانیه) داده شده است. در کدام لحظهسرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازه زمانی $[0, 5]$ با هم برابر هستند؟۲۱) اگر $f'(1) = 3$ و $g'(1) = 5$ مطلوب است، $(f + g)'(1)$ و $(3f + 2g)'(1)$

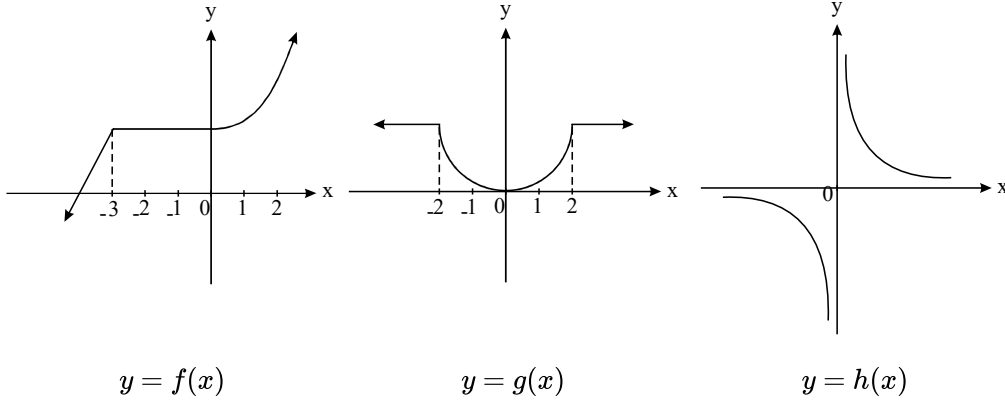


۲۲) با توجه به محورهای سینوس و تانژانت، در موارد زیر مقادیر $\sin \alpha$ و $\tan \alpha$ را با هم مقایسه کنید:

(الف) $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ (ب) $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

۲۳) اگر باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $x^3 + kx^2 + 2$ بر $x - 2$ برابر ۶ باشد، k را تعیین کنید.

۲۴) نمودار توابع f ، g و h در زیر رسم شده‌اند.



$$y = f(x)$$

$$y = g(x)$$

$$y = h(x)$$

الف) تابع f در چه فاصله‌هایی اکیداً صعودی و در چه فاصله‌هایی صعودی است؟

ب) تابع g در چه فاصله‌هایی اکیداً نزولی و در چه فاصله‌هایی نزولی است؟

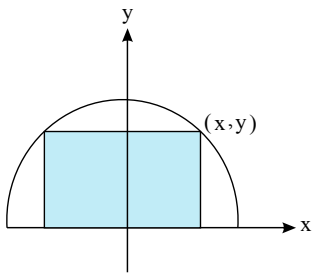
پ) تابع h در چه فاصله‌هایی اکیداً نزولی است؟

۲۵) اگر $\cos(\alpha + \beta) = \frac{3}{5}$ و $\tan(\alpha - \beta) = \frac{5}{12}$ باشد حاصل $\tan 2\alpha$ و $\tan 2\beta$ را بیابید. ($0 < \alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$)

۲۶) اگر $\tan(\alpha + \beta) = 3$ و $\tan(\alpha - \beta) = 2$ باشد حاصل $\tan 2\alpha$ را بیابید.

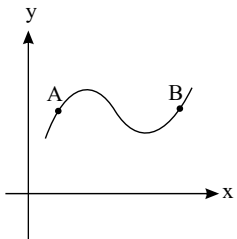
۲۷) نقاط بحرانی تابع $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 2x}$ را بیابید.

۲۸) نیم‌دایره‌ای به شعاع $\sqrt{5}$ مفروض است. مطابق شکل زیر، مستطیلی در آن محاط شده است. ابعاد مستطیل را چنان بیابید که محیط آن ماکزیمم باشد.



۲۹) اگر مرکز تقارن توابع $y = x^3 + 6x^2 + a$ و $y = \frac{2x+1}{x+b}$ بر هم منطبق باشند، a و b را بیابید.

۳۰) نمودار تابع f به صورت مقابل است، علامت مشتق اول و دوم را در نقاط A و B تعیین کنید.



۳۱) تابع $y = mx + n + \frac{x^2 - 1}{x + 2}$ مفروض است. m و n را چنان بیابید که این تابع هموگرافیک شود و مرکز تقارنش روی نیمساز ربع اول باشد.



۳۲) جدول تغییرات و نمودار تابع $f(x) = \frac{x-2}{x}$ را رسم کنید.

۳۳) تابع $f(x) = \frac{2x+b}{ax-b}$ مفروض است. مقادیر a و b را چنان بیابید که نقطه $(-2, -\frac{1}{3})$ مرکز تقارن آن باشد.

۳۴) نمودار هریک از توابع داده شده را رسم کرده و بیشترین و کمترین مقدار و دوره تناوب تابع را مشخص کنید.

الف) $y = |\sin x|$

ب) $y = |\cos 2x|$

۳۵) در تابع $f(x) = \frac{ax+b}{x^2+1}$ مقادیر a, b را چنان بیابید که نقطه $A(1, 3)$ نقطه عطف تابع باشد.

۳۶) جهت تقعر تابع $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$ را بررسی کنید.

۳۷) جهت تقعر تابع $f(x) = x^3 - x + 1$ در چه بازه‌هایی رو به بالا و در چه بازه‌هایی رو به پایین است؟

۳۸) نقاط بحرانی و اکسترمم نسبی تابع زیر را بیابید.

$$f(x) = (x-1)\sqrt{x^2}$$

۳۹) نقاط بحرانی و نقاط اکسترمم نسبی تابع زیر را تعیین کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 3x^2 & x \leq 0 \\ x^2 - 6x & x > 0 \end{cases}$$

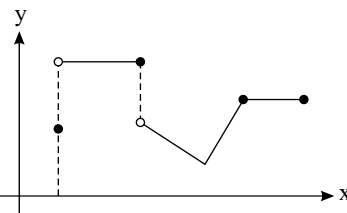
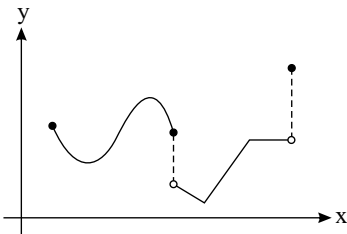
۴۰) نقاط اکسترمم نسبی تابع زیر را یافته و مشخص کنید تابع در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی است؟

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x}$$

۴۱) در بین مخروط‌هایی با مولد $10\sqrt{3} \text{ cm}$ ، بیشترین حجم ممکن را بیابید.

۴۲) نقاط بحرانی تابع $f(x) = x^3 + 2x^2 - 1$ را بیابید.

۴۳) در شکل مقابل نقاط بحرانی، اکسترمم نسبی و مطلق را مشخص کنید.



۴۴) در نمودار مقابل نقاط اکسترمم نسبی و مطلق را مشخص کنید.

۴۵) تابع $f(x) = \frac{\tan x}{2 \sin x - 1}$ در بازه $[0, 2\pi]$ چند مجانب قائم دارد؟

۴۶) مجانب‌های قائم تابع $f(x) = \frac{x}{x^2 + 2x}$ را بیابید.

۴۷) حاصل $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{1 + \cos x}$ را بیابید.

۴۸) حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x}{x-3}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{1-x}{x-5}$

۴۹) مشتق‌پذیری تابع $f(x) = \sin x |\cos x|$ در نقطه $x = \frac{\pi}{2}$ را بررسی کنید.



۵۰ آهنگ تغییرات متوسط تابع $f(x) = \frac{1}{p}x^2$ را وقتی x از ۲ به ۴ تغییر کند به دست آورید.

۵۱ اگر شعاع دایره‌ای از ۲ سانتی‌متر تا ۴ سانتی‌متر تغییر کند، آهنگ تغییر مساحت آن را بیابید.

۵۲ مشتق‌پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} [x] \sin|x| & x < 0 \\ x^2(|x| + [x]) & x \geq 0 \end{cases}$ در نقطه $x = 0$ را بررسی کنید.

۵۳ مشتق‌پذیری تابع $f(x) = \sqrt{|x+2|}$ در نقطه $x = -2$ را بررسی کنید.

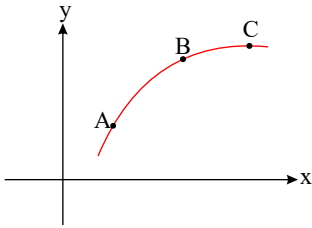
۵۴ نقاطی از منحنی $y = \frac{2x+3}{1-x}$ را بیابید که مماس بر منحنی در آن نقاط بر خط $y + 5x = 8$ عمود باشد.

۵۵ مشتق تابع $f(x) = \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}$ در نقطه $x = 0$ را بیابید.

۵۶ مشتق تابع $f(x) = \cos x$ در نقطه $x = \frac{\pi}{6}$ را با استفاده از تعریف مشتق بیابید.

۵۷ مشتق تابع $f(x) = \sin x$ در نقطه $x = \frac{\pi}{6}$ را با استفاده از تعریف بیابید.

۵۸ نمودار تابع f به صورت مقابل است. شیب مماس در A را m_1 ، شیب وتر AB را m_2 ، شیب مماس در C را m_3 می‌نامیم، مقادیر m_1 ، m_2 و m_3 را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.



۵۹ مجانب‌های افقی و قائم تابع $f(x) = \frac{3x+2}{x-4}$ را بیابید.

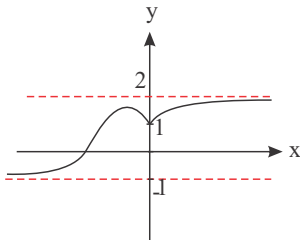
۶۰ اگر $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^n + mx^3 + x^2 - 1}{4x^3 + x^2 - 3} = -2$ ، آنگاه m و n را بیابید. ($n \in \mathbb{N}$)

۶۱ اگر $\lim_{x \rightarrow -\infty} ((x+1)^3 + mx^3 - 4x^2 + 2) = +\infty$ ، آنگاه حدود m را بیابید.

۶۲ اگر $\lim_{x \rightarrow -\infty} (mx^3 - (x-1)^3 + x^2 + 2) = +\infty$ ، آنگاه حدود m را بیابید.

۶۳ نمودار تابع f به صورت مقابل است، حاصل‌دهای زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$



۶۴ دامنه تابع $f(x) = \sqrt{\tan^2 x - 1}$ را بیابید.

۶۵ برد تابع $f(x) = [\pi \cos 2x - \frac{\pi}{p}]$ را بیابید. ([جزء صحیح است])

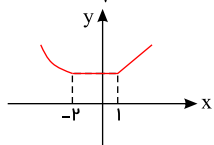
۶۶ کسرهای زیر را ساده کنید.

الف) $\frac{(x^5 + 1)(x - 1)}{x^2 - 1}$

ب) $\frac{(x^8 + x^7 + \dots + 1)(x^8 - x^7 + \dots - x + 1)}{x^{18} - 1}$

۶۷ اگر f روی \mathbb{R} اکیداً نزولی باشد، دامنه تابع g را بیابید.

$$g(x) = \sqrt{f(|x-3|) - f(|x+2|)}$$



۶۸ نمودار تابع f به صورت مقابل است. مشخص کنید تابع در کدام فاصله اکیداً صعودی و در کدام فاصله اکیداً نزولی است؟



۶۹ بازه‌هایی که تابع $y = x\sqrt{4-x^2}$ بر آنها صعودی یا نزولی است را تعیین کنید.

۷۰ صعودی و نزولی بودن تابع زیر را بررسی کنید.

$$f(x) = [-2x] + 1$$

۷۱ حاصل حدود زیر را به دست آورید.

الف

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + 5}{x - 2}$$

ب

حد زیر را به دست آورید؟

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{t^2 + 1}{t^3 - 2t^2 + 1}$$

پ

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x^2 + 2x}{4x + 1}$$

ت

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 2x^2)$$

حد زیر را بدست آورید؟

۷۲ مشتق توابع زیر را بیابید (ساده کردن الزامی نیست).

الف

$$y = \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x}$$

ب

$$y = 5\sin^3(2x - 1) + \tan \sqrt{x}$$

پ

$$y = \cos^3(x^2 + x) + \tan 4x$$

ت

$$y = \sin 2x \cos 7x$$

۷۳ حاصل حدهای زیر را بیابید. [] نماد جزء صحیح است.

الف

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{3x + 1}{x + 2} \right]$$

ب

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x + 2}{x - 1} \right]$$

حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

۷۴ ضابطه تابع مثلثاتی سینوس با دوره تناوب ۳ و مقادیر ماکزیمم ۵ و مینیمم ۳ را بنویسید.

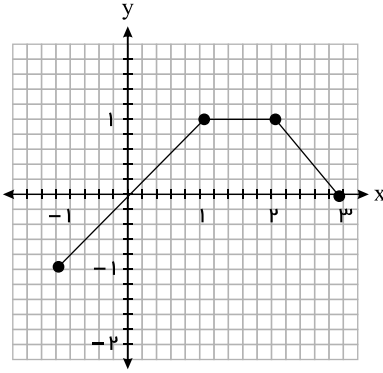
۷۵ به تابعی که در یک بازه فقط صعودی یا نزولی باشد، می‌گوییم.

۷۶ مجانب‌های قائم و افقی نمودار تابع $f(x) = \frac{4x^2 + 1}{2x^2 + x}$ را در صورت وجود بیابید.

۷۷ با رسم نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & x \leq 1 \\ -1 & x > 1 \end{cases}$ تعیین کنید تابع در چه بازه‌ای صعودی و در چه بازه‌ای نزولی است.



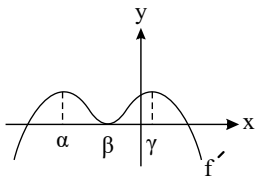
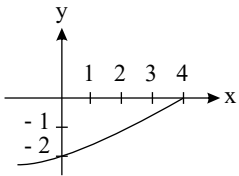
۷۸ نمودار تابع $f(x)$ به صورت زیر است. نمودار تابع $g(x) = f(2x - 1)$ را رسم، دامنه و برد آن را تعیین کنید.



۷۹ دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y = \sqrt{5} - \pi \cos \frac{1}{2}x$ را محاسبه کنید.

۸۰ الف) نقطه $(3, 2)$ روی نمودار $f(x)$ قرار دارد. این نقطه در تابع $g(x) = f(2 - x)$ با چه نقطه‌ای متناظر است؟

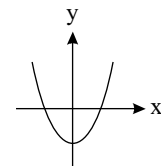
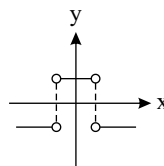
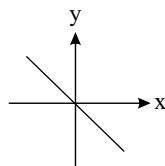
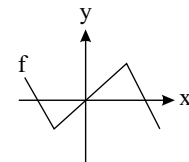
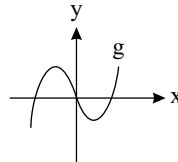
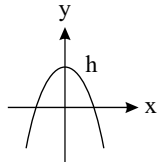
ب) نمودار تابع مقابل از قرینه‌یابی و انتقال نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ به دست آمده است. ضابطه این تابع را بنویسید.



۸۱ اگر نمودار f' به صورت مقابل باشد، آنگاه f چند نقطه عطف با طول منفی دارد؟

- | | |
|-------|-----------|
| ۱ (۱) | ۲ (۲) |
| ۳ (۳) | ۴ (۴) صفر |

۸۲ نمودار هریک از توابع را به نمودار مشتق آن وصل کنید.



(پ)

(ب)

(الف)

۸۳ حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n + 3x^4 - x^2 + 1}{2x^n - x^4 + 5}$ را به ازای مقادیر مختلف n ($n \in \mathbb{N}$) به دست آورید.

۸۴ معادله خط مماس بر منحنی تابع $x \circ f(x) = -x^2 + 1$ را در نقطه $A(2, f(2))$ واقع بر نمودار تابع بنویسید.

۸۵ مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)

ب) $g(x) = \sin^3(2x + 1)$

الف) $f(x) = \frac{2x + 3}{x^3 - 2x^2}$

۸۶ معادله $2 \cos 3x - \sqrt{3} = 0$ را حل کنید.

۸۷ درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را تعیین کنید.

الف) هر تابع یکنوای اکیدی، یک به یک است.



ب) تابع $y = x^3 + 3x^2 + 3x$ در \mathbb{R} صعودی است.

پ) چندجمله‌ای $x^n + a^n$ بر $x + a$ بخش پذیر است.

۸۸) مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست).

الف)

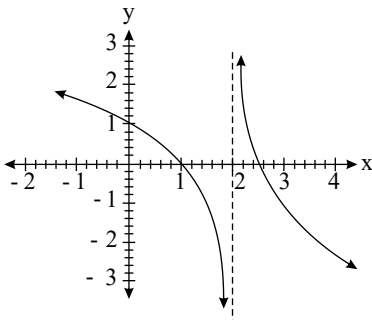
$$y = \sqrt[3]{\sin^2 x} + 4 \tan^3 x$$

ب)

$$y = 3x^r \sin^r(\cos x)$$

پ)

$$y = 3(2x - 5)^4 + \sqrt{x}$$



۸۹) در نمودار $f(x)$ موارد زیر را مشخص کنید.

الف)

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = ?$$

ب)

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = ?$$

۹۰) با توجه به نمودار داده شده، به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف) مقدار ماکزیمم مطلق را بنویسید.

ب) مقدار مینیمم مطلق را بنویسید.

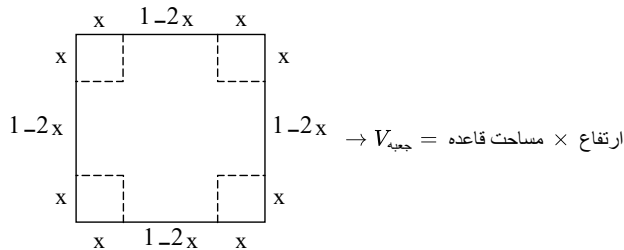
پ) طول نقطه ماکزیمم نسبی را بنویسید.

ت) طول نقطه مینیمم نسبی را بنویسید.



پاسخنامه تشریحی

۱



$$V = (1 - 2x)^2 \cdot x = (1 + 4x^2 - 4x)x = 4x^3 - 4x^2 + x$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق}} 12x^2 - 8x + 1 = 0 \xrightarrow{\Delta = b^2 - 4ac = 64 - 4 \cdot 12 = 16} \begin{cases} x = \frac{8 + 4}{24} = \frac{1}{2} \\ x = \frac{8 - 4}{24} = \frac{1}{6} \end{cases} \text{ غ ق ق}$$

حالت ۱ - مخرج ریشه مضاعف داشته باشد. ۲

$$f(x) = \frac{x + 2}{x^2 + mx + 6}$$

$$x^2 + mx + 6 = 0 \Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow m^2 - 24 = 0 \Rightarrow m = \pm 2\sqrt{6}$$

$$m = 2\sqrt{6} \Rightarrow f(x) = \frac{x + 2}{x^2 + 2\sqrt{6}x + 6} = \frac{x + 2}{(x + \sqrt{6})^2}$$

فقط $x = -\sqrt{6}$ مجانب قائم است.

$$m = -2\sqrt{6} \Rightarrow f(x) = \frac{x + 2}{x^2 - 2\sqrt{6}x + 6} = \frac{x + 2}{(x - \sqrt{6})^2}$$

فقط $x = \sqrt{6}$ مجانب قائم است.حالت ۲: عبارت $x + 2$ از صورت و مخرج ساده شود، یعنی مخرج بر $x + 2$ بخش پذیر باشد.

$$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow x^2 + mx + 6 = 0 \Rightarrow 4 - 2m + 6 = 0 \Rightarrow m = 5$$

$$f(x) = \frac{x + 2}{x^2 + 5x + 6} = \frac{x + 2}{(x + 2)(x + 3)} = \frac{1}{x + 3}$$

فقط $x = -3$ مجانب قائم است.

برای یافتن باقی مانده باید ریشه مقسوم علیه را در مقسوم قرار دهیم. ۳

$$2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow \text{باقی مانده} = f(2) = 0 \Rightarrow 4 - 2m + 2 = 0$$

$$\Rightarrow 2m = 6 \Rightarrow \boxed{m = 3}$$

نکته: اگر f تابعی اکیداً نزولی و $f(a) \leq f(b)$ باشد، آنگاه $a \geq b$. ۴

$$g(x) = \sqrt{f(|2x - 1|) - f(|x + 1|)} \Rightarrow f(|2x - 1|) - f(|x + 1|) \geq 0$$

$$\Rightarrow f(|2x - 1|) \geq f(|x + 1|) \xrightarrow{\text{اکیداً نزولی}} |2x - 1| \leq |x + 1|$$

$$\Rightarrow (2x - 1)^2 \leq (x + 1)^2 \Rightarrow 4x^2 - 4x + 1 \leq x^2 + 2x + 1 \Rightarrow 3x^2 - 6x \leq 0$$

$$\Rightarrow 3x(x - 2) \leq 0 \Rightarrow \begin{array}{c|c|c|c|c|} x & & 0 & & 2 \\ \hline & + & 0 & - & 0 & + \end{array} \Rightarrow 0 \leq x \leq 2$$

$$\Rightarrow D_g = [0, 2]$$

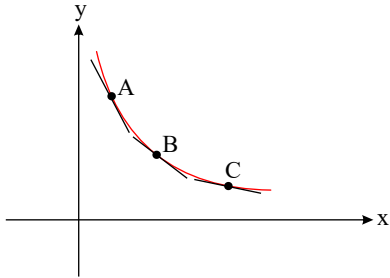
آهنگ لحظه ای تغییر حجم یک کره نسبت به تغییر مساحت سطح کره یعنی باید مشتق حجم کره را نسبت به سطح کره بیابیم. ۵



$$V = \frac{r}{3} \pi R^r, S = r \pi R^r$$

$$V'_S = ? \quad V'_R = V'_S \cdot S'_R \Rightarrow V'_S = \frac{V'_R}{S'_R} = \frac{r \pi R^r}{r \pi R} = \frac{1}{r} R$$

۶ با رسم خطوط مماس بر منحنی f در نقاط C, B, A داریم:



شیب خط مماس در $C <$ شیب خط مماس در $B <$ شیب خط مماس در A
 $f'(A) < f'(B) < f'(C)$

۷ در تابع $y = a \cos bx + c$ داریم:

$$T = \frac{2\pi}{|b|}, \quad \max = |a| + c, \quad \min = -|a| + c$$

$$f(x) = m \cos(mx) + 3 \Rightarrow T = \frac{2\pi}{m} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow m = 8$$

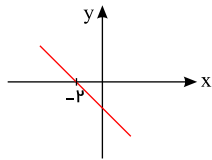
$$f(x) = 8 \cos(8x) + 3 \Rightarrow \max = 8 + 3 = 11, \quad \min = -8 + 3 = -5$$

۸

$$g(x) = \sqrt{(x^2 - 1)f(x)} \Rightarrow (x^2 - 1)f(x) \geq 0$$

برای $x < -2 \Rightarrow f(x) > f(-2) \Rightarrow f(x) > 0 \Rightarrow f$ تابع مثبت است.

برای $x > -2 \Rightarrow f(x) < f(-2) \Rightarrow f(x) < 0 \Rightarrow f$ تابع منفی است.



چون f روی \mathbb{R} اکیداً نزولی و $f(-2) = 0$ است، داریم:

نمودار f تقریباً به صورت مقابل است.

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

x	-1	1		
$x^2 - 1$	$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$	$+$	$+$	0	$-$
$(x^2 - 1)f(x)$	$+$	0	$-$	$-$

$$\Rightarrow x \leq -1 \text{ یا } -1 \leq x \leq 1 \Rightarrow D_g = (-\infty, -1] \cup [-1, 1]$$

۹ برای هر دو مقدار x_1 و x_2 از \mathbb{R} داریم:

$$\left. \begin{array}{l} x_1 < x_2 \xrightarrow{\text{f اکیداً صعودی}} f(x_1) < f(x_2) \\ x_1 < x_2 \xrightarrow{\text{g اکیداً صعودی}} g(x_1) < g(x_2) \end{array} \right\} \Rightarrow f(x_1) + g(x_1) < f(x_2) + g(x_2)$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow (f+g)(x_1) < (f+g)(x_2) \Rightarrow f+g \text{ اکیداً صعودی است.}$$

۱۰

$$y = |x| \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به x ها}} y = -|x| \xrightarrow{\text{انقباض افقی با ضریب ۳}} y = -|3x|$$

$$\xrightarrow{\text{۲ واحد به چپ}} y = -|3(x+2)| = -|3x+6|$$

ضابطه تابع حاصل به صورت $y = -|3x+6|$ است.

۱۱



$$y = x^3 \xrightarrow[\text{قرینه نسبت به محور } y \text{ ها}]{x \rightarrow -x} y = (-x)^3 = -x^3 \xrightarrow[\text{واحد چپ}]{x \rightarrow x+2} y = -(x+2)^3$$

$$\xrightarrow[\text{واحد بالا}]{y = f(x) = -(x+2)^3 + 5} (x+2)^3 = 5 - y$$

$$\Rightarrow x+2 = \sqrt[3]{5-y} \Rightarrow x+2 = -\sqrt[3]{y-5} \Rightarrow x = -2 - \sqrt[3]{y-5}$$

$$\Rightarrow y = f^{-1}(x) = -2 - \sqrt[3]{x-5}$$

۱۲

دو طرف معادله را به توان ۲ می‌رسانیم:

الف)

$$\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = 1$$

$$\Rightarrow 1 + \sin 2x = 1 \Rightarrow \sin 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}$$

چون طرفین را به توان ۲ رساندیم، باید ریشه‌ها را در معادله اصلی امتحان کنیم. π و $\frac{3\pi}{2}$ در معادله صدق نمی‌کند پس دو جواب دارد.

$$x = \frac{\pi}{2}, 2\pi$$

ب)

می‌دانیم: $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ بنابراین:

$$\sin 2x + \cos x = 0 \Rightarrow 2 \sin x \cos x + \cos x = 0$$

$$\Rightarrow \cos x (2 \sin x + 1) = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) \cos x = 0 = \cos \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ 2) 2 \sin x + 1 = 0 \Rightarrow \sin x = -\frac{1}{2} = \sin(-\frac{\pi}{6}) \Rightarrow x = \begin{cases} 2k\pi - \frac{\pi}{6} \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ 2k\pi + \pi - (-\frac{\pi}{6}) = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases} \end{array} \right.$$

پ)

$$\cos^2(x + \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos^2(x + \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \cos(x + \frac{\pi}{2}) = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$$

$$1) \cos(x + \frac{\pi}{2}) = +\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos(\frac{\pi}{4}) \Rightarrow x + \frac{\pi}{2} = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow x = \begin{cases} 2k\pi - \frac{\pi}{4} \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ 2k\pi - \frac{3\pi}{4} \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$2) \cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos(\frac{3\pi}{4}) \Rightarrow x + \frac{\pi}{2} = 2k\pi \pm \frac{3\pi}{4}$$

$$\Rightarrow x = \begin{cases} 2k\pi + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = 2k\pi - \frac{\pi}{4} \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ 2k\pi - \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = 2k\pi - \frac{5\pi}{4} \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

ت)

با تقسیم طرفین معادله بر ۲ داریم:

$$\sin(2\pi x) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin(\frac{\pi}{4})$$

$$\Rightarrow 2\pi x = \begin{cases} 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow x = \begin{cases} \frac{2k\pi}{2\pi} + \frac{\pi}{4\pi} = \frac{2k}{2} + \frac{1}{4} \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \frac{2k\pi}{2\pi} + \frac{\pi - \frac{\pi}{4}}{2\pi} = \frac{2k}{2} + \frac{3}{4} \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

ث)

معادله داده‌شده را به معادله‌ای درجه ۲ تبدیل می‌کنیم به کمک رابطه $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ بنابراین:

$$2 \cos 2x - \cos x = 0 \Rightarrow 2(2\cos^2 x - 1) - \cos x = 0$$

$$4\cos^2 x - \cos x - 2 = 0 \Rightarrow 4\cos^2 x - \cos x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \cos^2 x - \cos x = 0 \Rightarrow \cos x(\cos x - 1) = 0$$

$$1) \cos x = 0 = \cos(\frac{\pi}{2}) \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$2) \cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = 1 = \cos(0) \Rightarrow x = 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

الف)

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

۱۳

نکته:



$$\frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = 3 \tan x$$

$$1) \tan x = 0 = \tan(0) \Rightarrow x = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$2) \tan x \neq 0 \Rightarrow \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = 3 \tan x \Rightarrow \frac{2}{1 - \tan^2 x} = 3$$

$$\Rightarrow 2 - 3 \tan^2 x = 2 \Rightarrow 3 \tan^2 x - 1 = 0 \Rightarrow \tan^2 x = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \tan x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \begin{cases} 1) \tan x = \frac{\sqrt{3}}{3} = \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{6} \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ 2) \tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3} = \tan\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{6} \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

ب

$$\tan^2 x - \tan^2 x - \tan x + 1 = 0 \xrightarrow{\tan x = t}$$

$$t^2 - t^2 - t + 1 = 0 \Rightarrow t^2(t - 1) - (t - 1) = 0$$

$$\Rightarrow (t - 1)(t^2 - 1) = 0 \Rightarrow (t - 1)^2(t + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1) t = \tan x = -1 = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{4} \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ 2) t = \tan x = 1 = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4} \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

پ

$$m^2 - 2m - 3 = 0 \Rightarrow (m + 1)(m - 3) = 0 \Rightarrow$$

$$1) m = \tan^2 x = -1 \rightarrow \text{امکان ندارد.}$$

$$2) m = \tan^2 x = 3 \Rightarrow \tan x = \pm \sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} \tan x = \sqrt{3} = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \tan x = -\sqrt{3} = \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

ت

$$\cos 3x = 4 \cos^3 x \Rightarrow 4 \cos^3 x - 3 \cos x = 4 \cos^3 x$$

$$\Rightarrow 4 \cos^3 x - 4 \cos^3 x - 3 \cos x = 0 \Rightarrow \cos x(4 \cos^2 x - 4 \cos x - 3) = 0$$

$$\Rightarrow 1) \cos x = 0 = \cos \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$2) 4 \cos^2 x - 4 \cos x - 3 = 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{16 + 48} = 8 = \Delta$$

$$\Rightarrow \cos x = \begin{cases} \frac{4+\Delta}{4} = \frac{8}{4} \rightarrow \text{ناممکن است.} \\ \frac{4-\Delta}{4} = \frac{-4}{4} \Rightarrow \cos x = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{3\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

ث

$$1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x, \sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$$

نکته: طبق نکته فوق معادله را تغییر شکل می‌دهیم:

$$3 \sin x - 4 \sin^3 x + 2 \cos 2x = 2 \Rightarrow 3 \sin x - 4 \sin^3 x = 2 - 2 \cos 2x = 2(1 - \cos 2x) \quad (*)$$

$$\Rightarrow 3 \sin x - 4 \sin^3 x = 2 \times 2 \sin^2 x \Rightarrow 4 \sin^3 x + 4 \sin^2 x - 3 \sin x = 0$$

$$\Rightarrow \sin x(4 \sin^2 x + 4 \sin x - 3) = 0$$

$$\Rightarrow 1) \sin x = 0 = \sin(0) \Rightarrow x = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$2) 4 \sin^2 x + 4 \sin x - 3 = 0 \Rightarrow (2 \sin x + 3)(2 \sin x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{-3}{2} \rightarrow \text{ناممکن است.} \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow x = \begin{cases} 2k\pi + \frac{\pi}{6} \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

با مرتب کردن معادله داده شده داریم:

با جای گذاری $\tan^2 x = m$ در معادله داریم:نکته: $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$

طبق نکته فوق معادله را ساده می‌کنیم:

نکته: $1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x, \sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$

طبق نکته فوق معادله را تغییر شکل می‌دهیم:

۱۴

الف

ب

پ

۱۵

الف درست



ب

$$f'(x) = -2x + 2$$

نادرست. زیرا با توجه به جدول در بازه $(-\infty, 3]$ اکیداً صعودی نیست.

در بازه $(-\infty, 1]$ اکیداً صعودی است.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$-$
$f(x)$		\nearrow	\searrow

پ نادرست. زیرا باید مشتق چپ و راست برابر باشند.

ت درست

۱۶ آهنگ تغییر لحظه‌ای متغیر با مقدار مشتق و شیب خط مماس در آن نقطه برابر است؛ داریم:

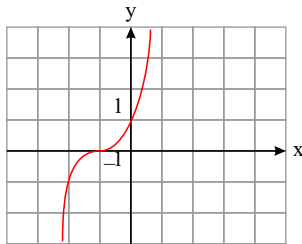
$$f(x) = 2x^2 + 5x + 1 \Rightarrow f'(x) = 4x + 5 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} f'(-1) = 1 \\ f'(2) = 13 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{f'(2)}{f'(-1)} = 13$$

در نتیجه ۱۳ برابر است.

۱۷

$$f'(x) = -4x^2 + a \xrightarrow{f'(1)=0} -4 + a = 0 \Rightarrow a = 4$$

$$f(1) = 2 \Rightarrow -1 + 4 + b = 2 \Rightarrow b = -1$$



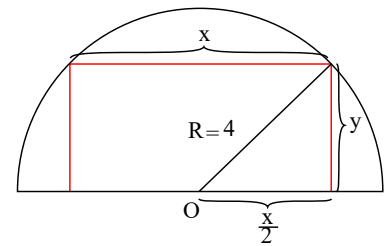
۱۸ برای رسم نمودار تابع ابتدا نمودار $y = x^3$ را رسم می‌کنیم، سپس آن را یک واحد به بالا انتقال می‌دهیم.

تابع اکیداً صعودی است.

۱۸

۱۹

$$\begin{aligned} \left(\frac{x}{2}\right)^2 + y^2 &= 4^2 \Rightarrow \frac{x^2}{4} + y^2 = 16 \\ y^2 &= 16 - \frac{x^2}{4} = \frac{64 - x^2}{4} \Rightarrow y = \frac{1}{2}\sqrt{64 - x^2} \end{aligned}$$



$$S = xy = x \times \frac{1}{2}\sqrt{64 - x^2} \Rightarrow S(x) = \frac{1}{2}\sqrt{64x^2 - x^4}$$

$$y^2 \geq 0 \Rightarrow 16 - \frac{x^2}{4} \geq 0 \Rightarrow \frac{x^2}{4} \leq 16 \Rightarrow x^2 \leq 64 \Rightarrow -8 \leq x \leq 8 \quad (1)$$

$$x \geq 0 \xrightarrow{(1)} 0 \leq x \leq 8 \Rightarrow S(x) = \frac{1}{2}\sqrt{64x^2 - x^4} \text{ دامنه } = [0, 8]$$

$$S'(x) = \frac{1}{2} \times \frac{128x - 4x^3}{2\sqrt{64x^2 - x^4}} = 0 \Rightarrow 128x - 4x^3 = 0 \Rightarrow 4x(32 - x^2) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0, x = \pm 4\sqrt{2}$$

$$x = 0 \Rightarrow S(0) = 0, x = 4\sqrt{2} \Rightarrow S(4\sqrt{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{64 \times 32 - 256 \times 4} = 16$$

$$x = 8 \Rightarrow S(8) = 0. \text{ مقدار ماکزیم مساحت. } = 16$$

به‌ازای $x = 4\sqrt{2}$ ، مساحت مستطیل بیشترین مقدار ممکن را دارد. پس داریم:

$$x = 4\sqrt{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2}\sqrt{64 - x^2} = \frac{1}{2}\sqrt{64 - 32} = \frac{1}{2}\sqrt{32} = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

۲۰



$$\text{سرعت متوسط در بازه } [0, 5] = \frac{f(5) - f(0)}{5 - 0} = \frac{5^2 - 5 + 10 - 10}{5} = \frac{25 - 5}{5} = \frac{20}{5} = 4 \frac{m}{s}$$

$$\text{سرعت لحظه‌ای } V(t) = f'(t) = 2t - 1 \Rightarrow V(t) = 4 \Rightarrow 2t - 1 = 4 \Rightarrow t = 2,5$$

(۲۱)

$$(f + g)'(1) = f'(1) + g'(1) = 3 + 5 = 8$$

$$(3f + 2g)'(1) = 3f'(1) + 2g'(1) = 3 \times 3 + 2 \times 5 = 19$$

$$\sin \alpha = ON = y_N = c > 0$$

$$\tan \alpha = AM = y_M = b > 0$$

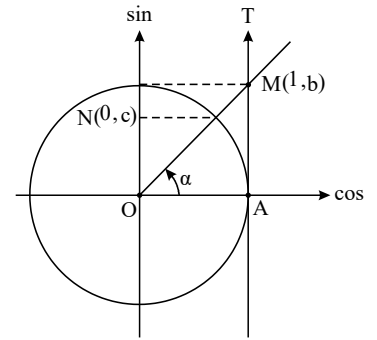
$$c < b \Rightarrow \sin \alpha < \tan \alpha$$

$$\sin \alpha = y_N = c < 0$$

$$\tan \alpha = y_M = b < 0$$

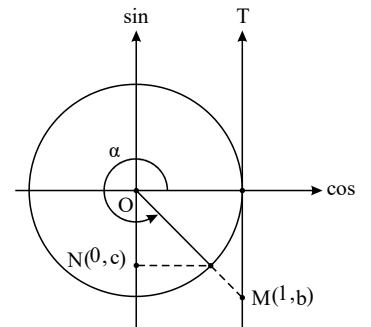
$$b < c \Rightarrow \tan \alpha < \sin \alpha$$

$$\text{(الف) } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

در دایره مثلثاتی زیر زاویه α را در ناحیه اول در نظر می‌گیریم، داریم:

از روی شکل واضح است که:

$$\text{(ب) } \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$$

در دایره مثلثاتی زیر زاویه α را در ناحیه چهارم در نظر می‌گیریم، داریم:

از روی شکل واضح است که:

(۲۳) باید ریشه مقسوم‌علیه را در مقسوم‌قرار داده و حاصل را برابر ۶ قرار دهیم.

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow (2)^2 + k(2)^2 + 2 = 6 \Rightarrow 8 + 4k + 2 = 6 \Rightarrow 4k = -4 \Rightarrow k = -1$$

(۲۴)

(الف) صعودی $\Rightarrow [0, +\infty)$, اکیداً صعودی $\Rightarrow (-\infty, -3]$ صعودی $\Rightarrow \mathbb{R}$, اکیداً صعودی $\Rightarrow [0, +\infty)$, صعودی $\Rightarrow [-3, +\infty)$ (ب) اکیداً نزولی $\Rightarrow [-2, 0]$, نزولی $\Rightarrow (0, +\infty)$ (پ) تابع h در بازه‌های $(-\infty, 0)$ و $(0, +\infty)$ اکیداً نزولی است.(۲۵) ابتدا باید حاصل $\tan(\alpha + \beta)$ را به دست آوریم:

$$1 + \tan^2(\alpha + \beta) = \frac{1}{\cos^2(\alpha + \beta)} \Rightarrow 1 + \tan^2(\alpha + \beta) = \frac{1}{\frac{9}{25}} = \frac{25}{9}$$

$$\Rightarrow \tan^2(\alpha + \beta) = \frac{16}{9} \Rightarrow \tan(\alpha + \beta) = \pm \frac{4}{3} \xrightarrow{0 < \alpha + \beta < \frac{\pi}{2}} \tan(\alpha + \beta) = \frac{4}{3}$$

$$2\alpha = (\alpha + \beta) + (\alpha - \beta) \Rightarrow \tan 2\alpha = \tan((\alpha + \beta) + (\alpha - \beta))$$



$$= \frac{\tan(\alpha + \beta) + \tan(\alpha - \beta)}{1 - \tan(\alpha + \beta) \tan(\alpha - \beta)} = \frac{\frac{4}{3} + \frac{5}{12}}{1 - \frac{4}{3} \times \frac{5}{12}} = \frac{\frac{21}{12}}{1 - \frac{5}{9}} = \frac{\frac{21}{12}}{\frac{4}{9}} = \frac{21 \times 9}{4 \times 12} = \frac{21 \times 3}{4 \times 4} = \frac{63}{16}$$

$$\tan(2\beta) = \tan((\alpha + \beta) - (\alpha - \beta)) = \frac{\tan(\alpha + \beta) - \tan(\alpha - \beta)}{1 + \tan(\alpha + \beta) \tan(\alpha - \beta)}$$

$$= \frac{\frac{4}{3} - \frac{5}{12}}{1 + \frac{4}{3} \times \frac{5}{12}} = \frac{\frac{11}{12}}{1 + \frac{5}{9}} = \frac{\frac{11}{12}}{\frac{14}{9}} = \frac{99}{168}$$

$$2\alpha = (\alpha + \beta) + (\alpha - \beta) \xrightarrow[\text{tan میگیریم.}]{\text{از طرفین}} \tan 2\alpha = \tan((\alpha + \beta) + (\alpha - \beta))$$

$$\Rightarrow \tan 2\alpha = \frac{\tan(\alpha + \beta) + \tan(\alpha - \beta)}{1 - \tan(\alpha + \beta) \tan(\alpha - \beta)}$$

$$\Rightarrow \tan 2\alpha = \frac{3 + 2}{1 - 3 \times (+2)} = \frac{5}{-5} = -1$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 2x}$$

$$f'(x) = \frac{2x - 2}{3\sqrt[3]{(x^2 - 2x)^2}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \text{تعریف نشده} \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2$$

۲۶ ابتدا زاویه 2α را بر حسب $\alpha + \beta$ و $\alpha - \beta$ می نویسیم:

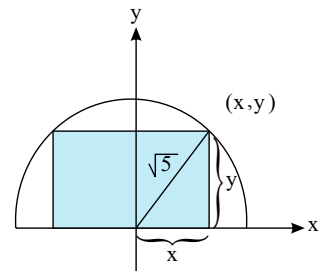
۲۷ تابع f در کل \mathbb{R} پیوسته است.

نقاط $x = 0$, $x = 1$ و $x = 2$ نقاط بحرانی تابع هستند.

$$x^2 + y^2 = (\sqrt{5})^2 = 5 \Rightarrow y^2 = 5 - x^2 \Rightarrow y = \sqrt{5 - x^2}$$

$$y^2 \geq 0 \Rightarrow 5 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 5 \Rightarrow -\sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5}$$

$$x \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq \sqrt{5}$$



$$\text{محیط } P = 4x + 2y = 4x + 2\sqrt{5 - x^2}, \quad 0 \leq x \leq \sqrt{5}$$

$$P' = 4 + 2 \times \frac{-2x}{2\sqrt{5 - x^2}} = 4 - \frac{2x}{\sqrt{5 - x^2}} = \frac{4\sqrt{5 - x^2} - 2x}{\sqrt{5 - x^2}} = 0$$

$$4\sqrt{5 - x^2} = 2x \Rightarrow 2\sqrt{5 - x^2} = x \Rightarrow 4(5 - x^2) = x^2$$

$$20 - 4x^2 = x^2 \Rightarrow 5x^2 = 20 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$$

$$x = 0 \Rightarrow P = 0 + 2\sqrt{5} = 2\sqrt{5}, \quad x = \sqrt{5} \Rightarrow P = 4\sqrt{5}$$

$$x = 2 \Rightarrow P = 8 + 2\sqrt{5 - 4} = 8 + 2 = 10 \Rightarrow P_{\max} = 10$$

۲۸

۲۹



$$y = x^3 + 6x^2 + a \Rightarrow y' = 3x^2 + 12x \Rightarrow y'' = 6x + 12 = 0 \Rightarrow x = -2$$

$$y = -8 + 24 + a = 16 + a \Rightarrow \text{مرکز تقارن} = (-2, 16 + a)$$

$$y = \frac{2x+1}{x+b}, \quad x+b=0 \Rightarrow x=-b, \quad y = \frac{2}{1} = 2 \Rightarrow \text{مرکز تقارن} = (-b, 2)$$

$$(-2, 16 + a) = (-b, 2) \Rightarrow \begin{cases} -b = -2 \Rightarrow b = 2 \\ 16 + a = 2 \Rightarrow a = -14 \end{cases}$$

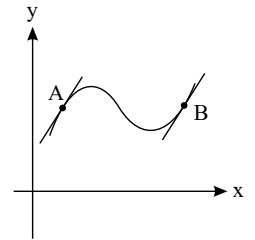
۳۰ خطوط مماس بر منحنی f در نقاط A و B را رسم می‌کنیم.

$$A \text{ در مماس در } \circ \Rightarrow f'(A) > 0$$

$$\circ \text{ در منحنی در نقطه } A \text{ رو به پایین} \Rightarrow f''(A) < 0$$

$$B \text{ در مماس در } \circ \Rightarrow f'(B) > 0$$

$$\circ \text{ در منحنی در نقطه } B \text{ رو به بالا} \Rightarrow f''(B) > 0$$



۳۱

$$y = mx + n + \frac{x^2 - 1}{x + 2} = \frac{(x + 2)(mx + n) + x^2 - 1}{x + 2}$$

$$y = \frac{mx^2 + nx + 2mx + 2n + x^2 - 1}{x + 2} = \frac{(m + 1)x^2 + (n + 2m)x + 2n - 1}{x + 2}$$

$$m + 1 = 0 \Rightarrow m = -1 \Rightarrow y = \frac{(n - 2)x + 2n - 1}{x + 2}$$

$$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2, \quad y = \frac{n - 2}{1} = n - 2$$

$$\text{مرکز تقارن} = (-2, n - 2), \quad y = x \Rightarrow n - 2 = -2 \Rightarrow n = 0$$

$$f(x) = \frac{x - 2}{x}, \quad x = 0 \text{ مجانب قائم}$$

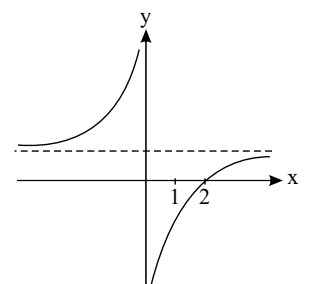
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1 \Rightarrow y = 1 \text{ مجانب افقی}$$

$$f'(x) = \frac{x - x + 2}{x^2} = \frac{2}{x^2} > 0 \Rightarrow \text{مشتق همواره مثبت}$$

$$f''(x) = \frac{0 - 2x \times 2}{x^3} = \frac{-4}{x^3} \text{ مشتق دوم در } x = 0 \text{ تغییر علامت می‌دهد.}$$

$$y = 0 \Rightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow (2, 0)$$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'(x) = \frac{2}{x^2}$	+	+	+	+
$f''(x) = \frac{-4}{x^3}$	+	-	-	-
f(x)	1	$\nearrow +\infty$ $\searrow -\infty$	0	1





۳۳) در تابع هموگرافیک مرکز تقارن نقطه برخورد مجانب‌های قائم و افقی تابع است.

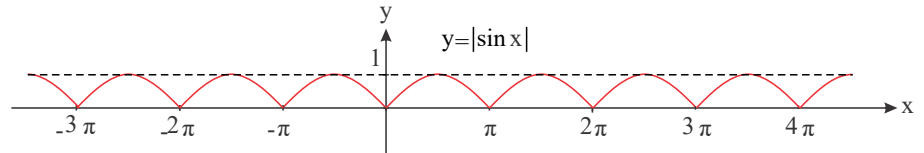
$$f(x) = \frac{2x + b}{ax - b} \text{ مرکز تقارن } (-2, -\frac{1}{2}) \Rightarrow \begin{cases} \text{مجانب قائم} \\ x = -2 \\ \text{مجانب افقی} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$y = \frac{2}{a} = -\frac{1}{2} \Rightarrow a = -4$$

$$ax - b = 0 \Rightarrow x = \frac{b}{a} = -2 \Rightarrow \frac{b}{-4} = -2 \Rightarrow b = 8$$

$$\begin{cases} T = \pi \\ \max = 1 \\ \min = 0 \end{cases}$$

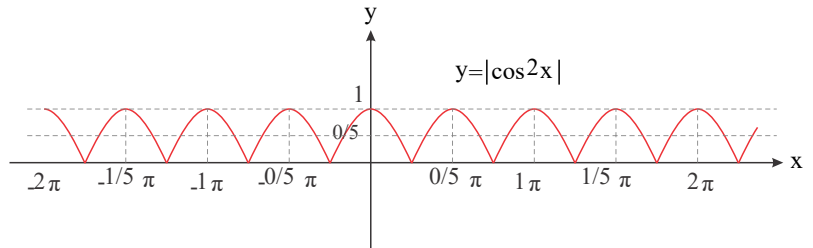
۳۴) الف) با رسم $y = \sin x$ و قرینه کردن قسمت‌های زیر محور طول‌ها نسبت به این محور خواهیم داشت:



ب) کافی است نمودار $y = \cos x$ را رسم کرده و سپس طول نقاط را در $\frac{1}{2}$ ضرب کرده $(\cos 2x)$ و سپس نقاط با عرض منفی را نسبت به محور طول‌ها قرینه کنیم $|\cos 2x|$ تا به نمودار زیر برسیم:

$$x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi, \dots \rightarrow y = 1 \Rightarrow T = \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{cases} T = \frac{\pi}{2} \\ \max = 1 \\ \min = 0 \end{cases}$$



۳۵)

$$f(x) = \frac{ax + b}{x^2 + 1} \text{ نقطه عطف } A(1, 3)$$

$$f(1) = 3 \Rightarrow \frac{a + b}{2} = 3 \Rightarrow a + b = 6$$

$$f'(x) = \frac{a(x^2 + 1) - 2x(ax + b)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{ax^2 + a - 2ax^2 - 2bx}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-ax^2 - 2bx + a}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(-2ax - 2b)(x^2 + 1)^2 - 2 \times 2x(x^2 + 1)(-ax^2 - 2bx + a)}{(x^2 + 1)^4}$$

$$f''(x) = \frac{(x^2 + 1)((-2ax - 2b)(x^2 + 1) - 4x(-ax^2 - 2bx + a))}{(x^2 + 1)^4}$$

$$f''(x) = \frac{(-2ax - 2b)(x^2 + 1) - 4x(-ax^2 - 2bx + a)}{(x^2 + 1)^3} \Rightarrow f''(1) = 0$$

$$\Rightarrow (-2a - 2b) \times 2 - 4(-a - 2b + a) = 0 \Rightarrow -4a - 4b + 8b = 0$$

$$\Rightarrow -4a + 4b = 0 \Rightarrow b = a \Rightarrow a + b = 6 \Rightarrow 2a = 6 \Rightarrow a = b = 3$$

۳۶)



$$f(x) = \frac{x-1}{x+2}, \quad x+2=0 \Rightarrow x=-2 \text{ مجانب قائم}$$

$$f'(x) = \frac{x+2-x+1}{(x+2)^2} = \frac{3}{(x+2)^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{0-2(x+2) \times 3}{(x+2)^4} = \frac{-6}{(x+2)^3}$$

علامت مشتق دوم به عبارت $x+2$ بستگی دارد، پس داریم:

$$x+2=0 \Rightarrow x=-2$$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f''(x) = \frac{-6}{(x+2)^3}$		+	-
		∪	∩

در بازه $(-\infty, -2)$ تقعر رو به بالا و در بازه $(-2, +\infty)$ تقعر رو به پایین است.

۳۷

$$f(x) = x^3 - x + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 1 \Rightarrow f''(x) = 6x = 0 \Rightarrow x = 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x) = 6x$		-	+
		∩	∪

در بازه $(-\infty, 0)$ تقعر رو به پایین و در بازه $(0, +\infty)$ تقعر رو به بالا است.

۳۸ تابع f در کل R پیوسته است.

$$f(x) = (x-1)\sqrt[3]{x^3}$$

$$f'(x) = 1 \times \sqrt[3]{x^3} + \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}(x-1) = \frac{3x+2x-2}{3\sqrt[3]{x}} = \frac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}} \Rightarrow \begin{cases} 5x-2=0 \Rightarrow x=\frac{2}{5} \\ x=0 \end{cases}$$

x	$-\infty$	0	$\frac{2}{5}$	$+\infty$
$f'(x) = \frac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}}$		+	-	+
		↗	↘	↗
			$f(\frac{2}{5})$	

نقطه $x=0$ ماکزیمم نسبی و نقطه $x=\frac{2}{5}$ مینیمم نسبی است.

تابع در $x=0$ مشتق ناپذیر و بحرانی است و در $x=\frac{2}{5}$ مشتق صفر است و به همین دلیل نقطه بحرانی است.

۳۹

$$f(0) = 0, \quad \text{حد چپ} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^3 + 3x^2) = 0, \quad \text{حد راست} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^3 - x) = 0$$

تابع در $x=0$ پیوسته است.

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 + 6x & x < 0 \Rightarrow 3x^2 + 6x = 0 \Rightarrow 3x(x+2) = 0 \Rightarrow x=0, x=-2 \\ 2x-6 & x > 0 \Rightarrow 2x-6=0 \Rightarrow x=3 \end{cases}$$

$$f'_-(0) = 0, \quad f'_+(0) = 0 - 6 = -6 \Rightarrow f'_-(0) \neq f'_+(0) \Rightarrow x=0 \text{ مشتق ناپذیر}$$

نقاط بحرانی عبارتند از: $x=3$, $x=-2$, $x=0$

x	$-\infty$	-2	0	3	$+\infty$
$f'(x)$		+	-	-	+
		↗	↘	↘	↗

$$x=-2 \Rightarrow f(-2) = -8 + 12 = 4, \quad x=3 \Rightarrow f(3) = 9 - 18 = -9$$

نقطه $(-2, 4)$ ماکزیم نسبی و نقطه $(3, -9)$ مینیم نسبی است.

۴۰

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x}, \quad x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 0, 2 \text{ مجانب قائم}$$

$$f'(x) = \frac{0 - (2x - 2) \times 1}{(x^2 - 2x)^2} = \frac{-2x + 2}{(x^2 - 2x)^2} = 0 \Rightarrow -2x + 2 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$x = 1 \Rightarrow y = f(1) = \frac{1}{1 - 2} = -1$$

علامت مشتق به صورت بستگی دارد.

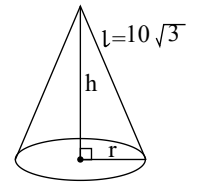
x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$f'(x) = \frac{-2x+2}{(x^2-2x)^2}$		+	تن	+	0
		↗	↗	-1	↘

نقطه $(1, -1)$ ماکزیم نسبی تابع است. تابع در بازه‌های $(-\infty, 0)$ و $(0, 1)$ اکیداً صعودی و در بازه‌های $[1, 2)$ و $(2, +\infty)$ اکیداً نزولی است.

۴۱

$$h^2 + r^2 = \ell^2 = 300 \Rightarrow r^2 = 300 - h^2$$

$$r^2 \geq 0 \Rightarrow 300 - h^2 \geq 0 \Rightarrow h^2 \leq 300 \Rightarrow -10\sqrt{3} \leq h \leq 10\sqrt{3}$$



$$h \geq 0 \Rightarrow 0 \leq h \leq 10\sqrt{3}$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi}{3}h(300 - h^2) = \frac{\pi}{3}(300h - h^3)$$

$$V'(h) = \frac{\pi}{3}(300 - 3h^2) = 0 \Rightarrow 300 = 3h^2 \Rightarrow h^2 = 100 \Rightarrow h = 10$$

$$h = 0 \Rightarrow V(0) = 0, \quad h = 10\sqrt{3} \Rightarrow V(10\sqrt{3}) = 0$$

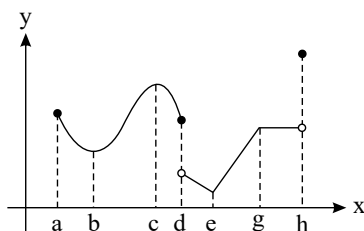
$$h = 10 \Rightarrow V(10) = \frac{\pi}{3}(30000 - 10000) = \frac{20000\pi}{3}$$

تابع f در کل \mathbb{R} مشتق پذیر است.

۴۲

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 1$$

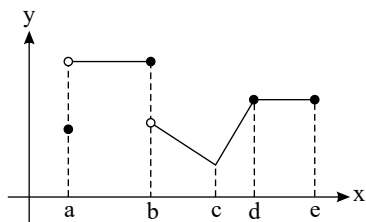
$$f'(x) = 3x^2 + 4x = 0 \Rightarrow x(3x + 4) = 0 \Rightarrow x = 0, \quad x = -\frac{4}{3} \text{ نقاط بحرانی}$$



۴۳

 $x = a$ نقطه بحرانی (ابتدای بازه) است. $x = b$ نقطه بحرانی، مینیم نسبی ($f'(b) = 0$) $x = c$ نقطه بحرانی، ماکزیم نسبی ($f'(c) = 0$) $x = d$ نقطه بحرانی ولی اکسترم نسبی نیست. $x = e$ نقطه بحرانی، مینیم نسبی و مطلق است. $x = g$ نقطه بحرانی و ماکزیم نسبی است.کل بازه (g, h) بحرانی، هم ماکزیم نسبی و هم مینیم نسبی است. $x = h$ نقطه بحرانی (انتهای بازه) و ماکزیم مطلق است.

۴۴



کل بازه (a, b) ماکزیمم مطلق، ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی است.

$x = b$ نقطه ماکزیمم نسبی است.

$x = c$ نقطه مینیمم نسبی و مطلق است.

$x = d$ نقطه ماکزیمم نسبی است.

کل بازه (d, e) هم ماکزیمم نسبی و هم مینیمم نسبی است.

۴۵

$$f(x) = \frac{\tan x}{2 \sin x - 1} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{2 \sin x - 1} = \frac{\sin x}{\cos x(2 \sin x - 1)}$$

$$\cos x(2 \sin x - 1) = 0 \Rightarrow \cos x = 0, \sin x = \frac{1}{2}$$

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \xrightarrow{[0, 2\pi]} x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

$$\sin x = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \xrightarrow{0 \leq x \leq 2\pi} x = \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \xrightarrow{0 \leq x \leq 2\pi} x = \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

با توجه به این که هیچ کدام از مقادیر $x = \frac{\pi}{6}$ و $x = \frac{5\pi}{6}$ و $x = \frac{3\pi}{2}$ و $x = \frac{\pi}{2}$ صورت کسر یعنی $\sin x$ را صفر نمی کنند، پس همگی مجانب قائم هستند.

۴۶

ابتدا ریشه های مخرج را پیدا می کنیم.

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 2x}, x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x(x + 2) = 0 \Rightarrow x = 0, x = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{خط } x = 0 \text{ مجانب قائم نمی باشد.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x}{x(x+2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{x+2} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{-2-\varepsilon+2} = \frac{1}{\circ^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{-2+\varepsilon+2} = \frac{1}{\circ^+} = +\infty \end{cases}$$

خط $x = -2$ تنها مجانب قائم تابع است.

با استفاده از تغییر متغیر داریم: ۴۷

$$x \rightarrow \pi$$

$$x - \pi = t \Rightarrow \begin{cases} x = \pi + t \\ t \rightarrow 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi + t)}{1 + \cos(\pi + t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sin t}{1 - \cos t} \times \frac{1 + \cos t}{1 + \cos t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sin t(1 + \cos t)}{1 - \cos^2 t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sin t(1 + \cos t)}{\sin^2 t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-(1 + \cos t)}{\sin t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-1 - \cos t}{\frac{\sin t}{t} \times t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-1 - \cos t}{t} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-1 - \cos t}{t} = \frac{-2}{\circ^-} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1 - \cos t}{t} = \frac{-2}{\circ^+} = -\infty \end{cases} \Rightarrow \text{پس تابع در این نقطه حد ندارد}$$

* با توجه به این نکته که وقتی $t \rightarrow 0$ میل کند، $\sin t \sim t$ داریم:

۴۸

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x}{x-3}$$

ابتدا حد راست و چپ تابع در نقطه ۳ را به دست می آوریم:

$$\left. \begin{aligned} \text{حد چپ} &= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x}{x-3} = \frac{3}{3-\varepsilon-3} = \frac{3}{\circ^-} = -\infty \\ \text{حد راست} &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x}{x-3} = \frac{3}{3+\varepsilon-3} = \frac{3}{\circ^+} = +\infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{پس تابع در این نقطه حد ندارد}$$



$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{1-x}{x-5}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{حد چپ} &= \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{1-x}{x-5} = \frac{1-5}{5-\varepsilon-5} = \frac{-4}{-\varepsilon} = \frac{-4}{0^-} = +\infty \\ \text{حد راست} &= \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{1-x}{x-5} = \frac{1-5}{5+\varepsilon-5} = \frac{-4}{+\varepsilon} = \frac{-4}{0^+} = -\infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{پس تابع در این نقطه حد ندارد}$$

$$f(x) = \sin x |\cos x|, \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$f'_+\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\sin x |\cos x| - 0}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\sin x |\cos x|}{x - \frac{\pi}{2}}$$

$$x - \frac{\pi}{2} = t \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + t, \quad t \rightarrow 0^+$$

$$f'_+\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + t\right) \left|\cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right)\right|}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\cos t |\sin t|}{t}$$

$$f'_-\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\cos t |\sin t|}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\cos t (-\sin t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^-} -\cos t \times \frac{\sin t}{t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^-} -\cos t \times 1 = -1$$

$$f'_+\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\cos t |\sin t|}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \cos t \times \frac{\sin t}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \cos t \times 1 = 1$$

تابع در $x = \frac{\pi}{2}$ مشتق ناپذیر است.

۴۹

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2$$

$$\frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} = \frac{\frac{1}{2} \times 16 - \frac{1}{2} \times 4}{2} = \frac{8 - 2}{2} = 3$$

$$S(r) = \pi r^2$$

$$\frac{S(4) - S(2)}{4 - 2} = \frac{16\pi - 4\pi}{2} = \frac{12\pi}{2} = 6\pi$$

تابع مساحت دایره بر حسب شعاع آن به صورت مقابل است:

۵۱

$$f(x) = \begin{cases} [x] \sin|x| & x < 0 \\ x^r (|x| + [x]) & x \geq 0 \end{cases} \quad f(0) = 0$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{[x] \sin|x| - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{[x] \sin(-x)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-[x] \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} -[x] \times 1 = -[0^-] = -(-1) = 1$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^r (|x| + [x]) - 0}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} x(|x| + [x]) = 0$$

تابع در $x = 0$ مشتق ناپذیر است.

۵۳

$$f(x) = \sqrt{|x+2|}, \quad f(-2) = 0$$

$$f'_-(-2) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{\sqrt{|x+2|} - 0}{x+2} \times \frac{\sqrt{|x+2|}}{\sqrt{|x+2|}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{|x+2|}{(x+2)\sqrt{|x+2|}}$$

$$f'_-(-2) = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{-(x+2)}{(x+2)\sqrt{|x+2|}} = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{-1}{\sqrt{|x+2|}} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$$f'_+(-2) = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{x+2}{(x+2)\sqrt{|x+2|}} = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{1}{\sqrt{|x+2|}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

تابع در $x = -2$ مشتق ناپذیر است.



$$y + 5x = 8 \Rightarrow y = -5x + 8 \Rightarrow \text{شیب} = -5$$

$$\Rightarrow \text{شیب خط مماس بر منحنی داده شده} = \frac{1}{5} \Rightarrow \text{شیب خط عمود} = \frac{1}{5}$$

$$y = \frac{2x + 3}{1 - x} \Rightarrow y' = \frac{2(1 - x) - (-1)(2x + 3)}{(1 - x)^2} = \frac{2 - 2x + 2x + 3}{(1 - x)^2}$$

$$y' = \frac{5}{(1 - x)^2} = \frac{1}{5} \Rightarrow (1 - x)^2 = 25 \Rightarrow 1 - x = \pm 5 \Rightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = 6 \end{cases}$$

$$x = -4 \Rightarrow y = \frac{2(-4) + 3}{1 - (-4)} = \frac{-5}{5} = -1 \Rightarrow A(-4, -1)$$

$$x = 6 \Rightarrow y = \frac{2 \times 6 + 3}{1 - 6} = \frac{15}{-5} = -3 \Rightarrow B(6, -3)$$

$$f(x) = \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}$$

$$f'(x) = \frac{\cos x(\sin x + \cos x) - (\cos x - \sin x)\sin x}{(\sin x + \cos x)^2} = \frac{\cos x \sin x + \cos^2 x - \cos x \sin x + \sin^2 x}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{(\sin x + \cos x)^2} \Rightarrow f'(0) = \frac{1}{(0 + 1)^2} = 1$$

$$f(x) = \cos x$$

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{6}\right)}{x - \frac{\pi}{6}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\cos x - \cos \frac{\pi}{6}}{x - \frac{\pi}{6}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}}{x - \frac{\pi}{6}}$$

با استفاده از تغییر متغیر مقابل داریم:

$$x - \frac{\pi}{6} = t \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + t, t \rightarrow 0$$

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{6} + t\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos \frac{\pi}{6} \cos t - \sin \frac{\pi}{6} \sin t - \frac{\sqrt{3}}{2}}{t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cos t - \frac{1}{2} \sin t - \frac{\sqrt{3}}{2}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}(1 - \cos t) - \frac{1}{2} \sin t}{t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) - \frac{1}{2} \sin t}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{\sin \frac{t}{2}}{\frac{t}{2}} \times \frac{t}{2}\right) - \frac{1}{2} \sin t}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{1}{2} t^2 - \frac{1}{2} \sin t}{t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\frac{\sqrt{3}}{8} t - \frac{1}{2} \sin t}{1} = \lim_{t \rightarrow 0} \left(-\frac{\sqrt{3}}{8} t - \frac{1}{2} \sin t\right) = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

۵۷

$$f(x) = \sin x, f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{6}\right)}{x - \frac{\pi}{6}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin x - \sin \frac{\pi}{6}}{x - \frac{\pi}{6}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin x - \frac{1}{2}}{x - \frac{\pi}{6}}$$

با استفاده از تغییر متغیر مقابل داریم:

$$x - \frac{\pi}{6} = t \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + t, t \rightarrow 0$$

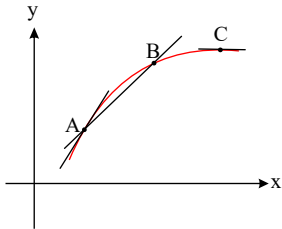
$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6} + t\right) - \frac{1}{2}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\pi}{6} \cos t + \cos \frac{\pi}{6} \sin t - \frac{1}{2}}{t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \cos t - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin t}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}(1 - \cos t) + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin t}{t}$$



$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{\sqrt{3}} \times \sqrt{3} \sin^2\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right) + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \sin t}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\left(\frac{\sin \frac{t}{\sqrt{3}}}{\frac{t}{\sqrt{3}}} \times \frac{t}{\sqrt{3}}\right) + \sqrt{3}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{t^2}{t} + \sqrt{3}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} t\right) + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 0 + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

۵۸ وتر AB و خطوط مماس بر منحنی f در نقاط A و C را رسم می‌کنیم.



شیب خط مماس در A < شیب وتر AB < شیب خط مماس در C
 $m_p < m_r < m_1$

۵۹

برای بررسی داشتن مجانب قائم، ریشه‌های مخرج را پیدا می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{3x + 2}{x - 4}, \quad x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{3x + 2}{x - 4} = \frac{14}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{3x + 2}{x - 4} = \frac{14}{0^+} = +\infty$$

خط $x = 4$ مجانب قائم تابع است.

برای داشتن مجانب افقی، حدتابع وقتی x به بی‌نهایت میل می‌کند را پیدا می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x + 2}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x}{x} = 3$$

خط $y = 3$ مجانب افقی تابع است.

۶۰ با توجه به قاعدهٔ پرتوان: $ax^n + bx^{n-1} + \dots + x \sim \pm\infty ax^n$ داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^n + mx^r + x^r - 1}{4x^r + x^r - 3} = -2$$

۱ حالت $n < 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{mx^r}{4x^r} = \frac{m}{4} = -2 \Rightarrow m = -8 \Rightarrow n < 3, m = -8$ جواب

۲ حالت $n = 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^r + mx^r}{4x^r} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(2+m)x^r}{4x^r} = \frac{2+m}{4} = -2$

$\Rightarrow 2 + m = -8 \Rightarrow m = -10 \Rightarrow n = 3, m = -10$ جواب

۳ حالت $n > 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^n}{4x^r} = \pm\infty \rightarrow$ غیر قابل قبول

۶۱ با توجه به قاعدهٔ پرتوان: $ax^n + bx^{n-1} + \dots + x \sim \pm\infty ax^n$ داریم:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^r + 3x^r + 3x + 1 + mx^r - 4x^r + 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} ((m+1)x^r - x^r + 3x + 3) = +\infty$$

۱ حالت $m = -1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^r + 3x + 3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^r)$

$= -(-\infty)^r = -(+\infty) = -\infty$ غیر قابل قبول

۲ حالت $m \neq -1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} ((m+1)x^r - x^r + 3x + 3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (m+1)x^r$

$\Rightarrow (m+1)(-\infty)^r = (m+1)(-\infty) = +\infty \Rightarrow m+1 < 0 \Rightarrow m < -1$

۶۲ با توجه به قاعدهٔ پرتوان: $ax^n + bx^{n-1} + \dots + x \sim \pm\infty ax^n$ داریم:



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (mx^r - (x-1)^r + x^r + 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (mx^r - x^r + 2x^r - 2x + 1 + x^r + 2)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} ((m-1)x^r + 2x^r - 2x + 2) = +\infty$$

حالت ۱ $m = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^r - 2x + 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^r = 2(-\infty)^r = 2(+\infty) = +\infty$ قابل قبول

حالت ۲ $m \neq 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} ((m-1)x^r + 2x^r - 2x + 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (m-1)x^r = (m-1)(-\infty)^r$

$$\Rightarrow (m-1)(-\infty) = +\infty \Rightarrow m-1 < 0 \Rightarrow m < 1$$

در کل باید $m \leq 1$ باشد.

۶۳

الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$

هر چه x به $+\infty$ میل می کند، مقادیر $f(x)$ به ۲ نزدیک تر می شوند.

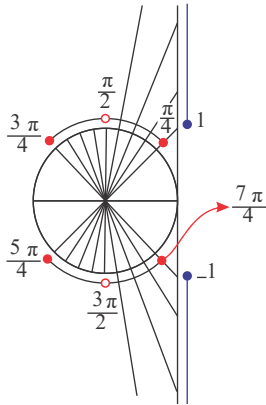
ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$

هر چه x به $-\infty$ میل می کند، مقادیر $f(x)$ به -۱ نزدیک تر می شوند.

۶۴

$$f(x) = \sqrt{\tan^r x - 1} \Rightarrow \tan^r x - 1 \geq 0 \Rightarrow \tan^r x \geq 1 \Rightarrow |\tan x| \geq 1$$

$$\Rightarrow \tan x \leq -1 \quad \text{یا} \quad \tan x \geq 1$$



با توجه به دایره مثلثاتی مقابل حدود x بصورت زیر است.

$$\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{3\pi}{4} \quad \text{یا} \quad \frac{5\pi}{4} \leq x \leq \frac{7\pi}{4} \quad \text{و} \quad x \neq \frac{\pi}{2} \quad \text{و} \quad \frac{3\pi}{2}$$

در حالت کلی داریم:

$$2k\pi + \frac{\pi}{4} \leq x \leq 2k\pi + \frac{3\pi}{4} \quad \text{یا} \quad 2k\pi + \frac{5\pi}{4} \leq x \leq 2k\pi + \frac{7\pi}{4} \quad \text{و} \quad x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$$

۶۵

$$-1 \leq \cos 2x \leq 1 \Rightarrow -\pi \leq \pi \cos 2x \leq \pi \Rightarrow -\pi - \frac{\pi}{2} \leq \pi \cos 2x - \frac{\pi}{2} \leq \pi - \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{3\pi}{2} \leq \pi \cos 2x - \frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow f(x) = \left[\pi \cos 2x - \frac{\pi}{2} \right] = \{-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}, \dots, 0, 1\}$$

$$R_f = \{-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}, \dots, 0, 1\}$$

۶۶

الف) $\frac{(x^5 + 1)(x-1)}{x^2 - 1} = \frac{(x+1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)(x-1)}{(x-1)(x+1)} = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$

ب) $\frac{(x^8 + x^7 + \dots + 1)(x^8 - x^7 + \dots - x + 1)}{x^{16} - 1} = \frac{(x^8 + x^7 + \dots + 1)(x^8 - x^7 + \dots - x + 1)}{(x^8 - 1)(x^8 + 1)}$

$$= \frac{(x^8 + x^7 + \dots + x + 1)(x^8 - x^7 + \dots - x + 1)}{(x-1)(x^8 + x^7 + \dots + x + 1)(x+1)(x^8 - x^7 + \dots - x + 1)} = \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x^2 - 1}$$

نکته: اگر تابع f اکیداً نزولی باشد و $f(a) \leq f(b)$ آنگاه $a \geq b$.

۶۷

$$g(x) = \sqrt{f(|x-3|) - f(|x+2|)} \Rightarrow f(|x-3|) - f(|x+2|) \geq 0$$

$$\Rightarrow f(|x-3|) \geq f(|x+2|) \xrightarrow{\text{f اکیداً نزولی}} |x-3| \leq |x+2|$$

$$(x-3)^2 \leq (x+2)^2 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 \leq x^2 + 4x + 4 \Rightarrow 9 - 4 \leq 4x + 6x$$



$$= [3 - \frac{5}{+\infty}] = [3 - 0^+] = [3 - \varepsilon] = 2$$

ب) می‌دانیم $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+2}{x-1} = 1$ ، حال باید ببینیم کسر $\frac{x+2}{x-1}$ چگونه به یک میل می‌کند، برای این کار مخرج را در صورت ایجاد می‌کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x+2}{x-1} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x-1+3}{x-1} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x-1}{x-1} + \frac{3}{x-1} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[1 + \frac{3}{x-1} \right]$$

$$= [1 + \frac{3}{-\infty}] = [1 + 0^-] = [1 - \varepsilon] = 0$$

۷۴

$$\text{دوره تناوب } T = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow 3 = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = \frac{2\pi}{3}$$

$$|a| = 1, c = 4 \Rightarrow y = \sin \frac{2\pi}{3}x + 4 \text{ یا } y = -\sin \frac{2\pi}{3}x + 4$$

۷۵) یکنوا

۷۶

برای بررسی داشتن مجانب قائم، ریشه‌های مخرج را پیدا می‌کنیم:

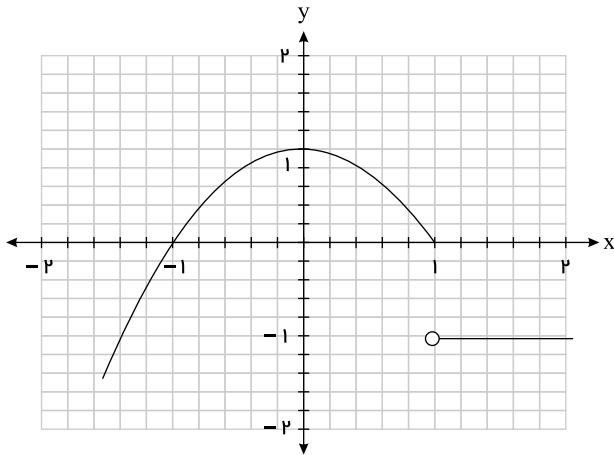
$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) = \infty$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{1}{2} 2x^2 + x = 0 \end{cases}$$

برای داشتن مجانب افقی، حد تابع وقتی x به بی‌نهایت میل می‌کند را پیدا می‌کنیم:

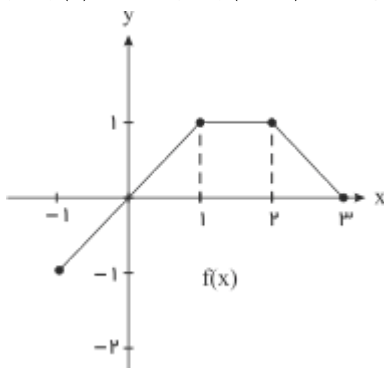
$$y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x^2 + 1}{2x^2 + x} = 2 \Rightarrow y = 2 \text{ (مجانب افقی)}$$

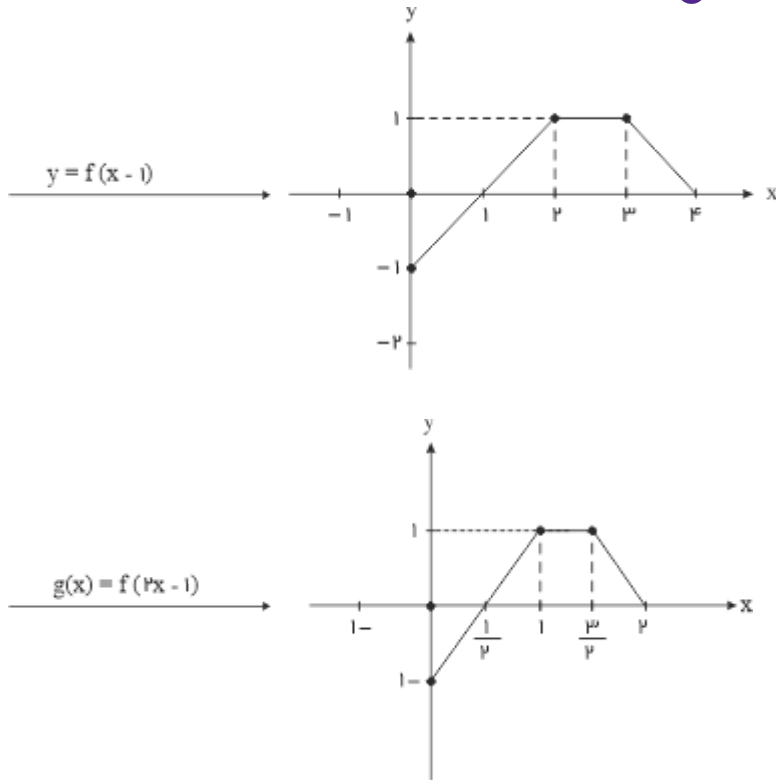
۷۷) با توجه به نمودار در بازه $(1, +\infty) \cup [-\infty, 0]$ صعودی و در بازه $[0, +\infty)$ نزولی است.



۷۸

$$y = f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x-1} y = f(x-1) \xrightarrow{x \rightarrow 2x} g(x) = f(2x-1)$$





با توجه به نمودار داریم:

$$D_g = [0, 2], R_g = [-1, 1]$$

۷۹ می‌دانیم: در تابع $y = a \cos bx + c$ مقدار ماکزیمم $|a| + c$ و مقدار مینیمم $-|a| + c$ و دوره تناوب $\frac{2\pi}{|b|}$ است.

$$y = \sqrt{5} - \pi \cos \frac{1}{2}x$$

$$\text{ماکزیمم: } \max(y) = \pi + \sqrt{5}$$

$$\text{مینیمم: } \min(y) = -\pi + \sqrt{5}$$

$$\text{دوره تناوب: } T = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$$

۸۰ الف

$$g(x) = f(2-x) = f(-x+2)$$

از $x, 2$ تا کم و سپس قرینه‌اش می‌کنیم، پس:

$$(2, 2) \xrightarrow{x-2} (1, 2) \Rightarrow (-1, 2)$$

ب

$$y = -\sqrt{-(x-2)} = -\sqrt{-x+2}$$

۸۱ گزینه «ب» α, β نقاط اکسترمم تابع مشتق و نقاط عطف تابع اصلی‌اند.تابع h به (ب)تابع g به (الف)۸۲ تابع f به (ب)

۸۳

با توجه به قاعده پرتوان داریم:

$$\text{قاعده پرتوان: } ax^n + bx^{n-1} + \dots + x \sim \pm \infty ax^n$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n + 3x^2 - x^2 + 1}{2x^n - x^2 + 5} = \begin{cases} n < 4 & \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{-x^2} = -3 \\ n = 4 & \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 + 3x^2}{2x^4 - x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2}{x^2} = 4 \\ n > 4 & \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{2x^n} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$f'(x) = -2x + 10, f'(2) = 6, f(2) = 16$$

در نتیجه $A(2, 16)$ است و شیب برابر ۱۶ است؛ پس معادله خط برابر است با:

$$y - y_A = f'(2)(x - x_A) \Rightarrow y - 16 = 16(x - 2) \Rightarrow y = 16x + 4$$

۸۵

$$\text{الف) } y' = \frac{2(x^3 - 2x^2) - (3x^2 - 4x)(2x + 3)}{(x^3 - 2x^2)^2}$$

$$\text{ب) } y' = 3 \times 2 \sin^2(2x + 1) \cos(2x + 1)$$

۸۶

$$\cos 3x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{6} \Rightarrow 3x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \pm \frac{\pi}{18} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

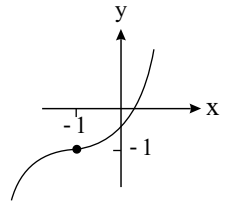
۸۷

الف) درست

$$\text{ب) درست- } y = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 1 = (x + 1)^3 - 1$$

با توجه به شکل تابع x^3 کافی است x^3 یعنی X را یک واحد به چپ و یک واحد به پایین منتقل کنیم.

که با توجه به شکل تابع صعودی اکید و در نتیجه، صعودی است.

ب) نادرست - چندجمله‌ای $x^n + a$ بر $x + a$ در صورتی بخش پذیر است که n فرد باشد.

۸۸

$$\text{اگر } u = \tan^n x, y = \tan^n u \text{ آنگاه } y' = nu'(1 + \tan^2 u) \tan^{n-1} u$$

الف)

$$y = \sqrt[3]{\sin^2 \sqrt{x}} + 4 \tan^{\sqrt{x}} x$$

$$y'_1 = \frac{2 \times \sqrt{\sin \sqrt{x}} \cos \sqrt{x}}{3 \sqrt[3]{\sin^2 \sqrt{x}}} = \frac{14 \cos \sqrt{x}}{\sqrt[3]{\sin \sqrt{x}}}, \quad y_2 = 4 \tan^{\sqrt{x}} x \Rightarrow y'_2 = 4 \times \sqrt{x} \tan^{\sqrt{x}} (1 + \tan^2 x) \Rightarrow y' = \frac{14 \cos \sqrt{x}}{\sqrt[3]{\sin \sqrt{x}}} + 12 \tan^{\sqrt{x}} x (1 + \tan^2 x)$$

ب)

$$y = 3x^{\sqrt{\cos x}} \Rightarrow y' = 6x \sin^{\sqrt{\cos x}} - 2 \sin x \sin(\cos x) (3x^{\sqrt{\cos x}})$$

پ)

$$y = 3(2x - 5)^{\sqrt{x}} + \sqrt[3]{x} \Rightarrow y' = 3 \times \sqrt{x} \times 2(2x - 5)^{\sqrt{x}-1} + \frac{1}{3 \sqrt[3]{x^2}}$$

۸۹

با توجه به نمودار هرچه x از سمت راست به ۲ نزدیک تر می شود، مقادیر $f(x)$ به سمت $+\infty$ می روند:

الف)

+

ب)

-

با توجه به نمودار هرچه x از سمت چپ به ۲ نزدیک تر می شود، مقادیر $f(x)$ به سمت $-\infty$ می روند:

۹۰

الف)

۸

ب) -۴

پ) ۴

ت) ۲