ویژه خرداد ۱۴۰۲

فیلم تحلیل سوالات امتحانات پایان ترم

برای دیدن **فیلم حل نمونه سوالات** بزن رو لینک زیر

تحلیل نمونه سوالات ریاضی دهم تجربی

مشاهده فیلم ها

نام و نام خانوادگی: زمان برگزاری:

نام آزمون: ریاضی پایه دهم تجربی

تاریخ آزمون:

شرکت توسعه انتشارات

پرش_م۱۱

۱ می‌خواهیم ۴ مداد به شماره‌های ۱ تا ۴ را بین علی و حسن و رضا تقسیم کنیم به طوریکه مدادی باقی نماند. این کار به چند طریق ممکن است؟

۲ فرض کنید θ زاویه‌ای در ربع دوم دایره‌ی مثلثاتی باشد و $\sin\theta = \frac{۲\sqrt{۶}}{۷}$، مقدار $\tan\theta$ را بدست آورید.

۳ اگر اشتراک دو بازه $(x^۲ + ۲, ۸)$ و $(۳, ۲x + ۱)$ تهی باشد، آنگاه x کدام است؟

۴ مجموع جمله‌های اول و چهارم یک دنبالهٔ هندسی ۵۶ و مجموع جمله‌های دوم و سوم آن ۲۴ است. دنباله را مشخص کنید.

۵ با حروف کلمه‌ی «پارکینگ» و بدون تکرار حروف:

الف) چند کلمه‌ی ۷ حرفی می‌توان نوشت؟

ب) چند کلمه‌ی ۴ حرفی می‌توان نوشت؟

پ) چند کلمه‌ی ۶ حرفی که با «پاک» شروع شود می‌توان نوشت؟

ت) چند کلمه‌ی ۶ حرفی که با حروف کلمه‌ی «پاک» شروع شود می‌توان نوشت؟

ث) چند کلمه‌ی ۶ حرفی که با یک حرف از حروف کلمه‌ی «پاک» شروع شود می‌توان نوشت؟

ج) چند کلمه‌ی ۵ حرفی که با یک حرف نقطه‌دار شروع و با یک حرف بی نقطه تمام شود می‌توان نوشت؟

۶ عبارت $\frac{x - ۲}{x^۳ + ۱} + \frac{۱}{x + ۱}$ را به ساده‌ترین شکل ممکن بنویسید.

۷ نامعادله‌ای قدر مطلقی بنویسید که جواب آن بازه‌ی $(-\infty, -۲] \cup [۳, +\infty)$ باشد.

۸ اگر $(۰, ۲)$ و $(۱, ۲)$ دو نقطه بر روی یک سهمی باشند، خط تقارن این سهمی را بدست آورید.

۹ یک آزمون شامل ۱۰ سؤال ۴ گزینه‌ای و ۵ سؤال۲ گزینه‌ای (بله – خیر) است. فردی تصمیم دارد به سؤال‌ها به صورت اتفاقی پاسخ دهد. او به چند روش می تواند این کار را انجام دهد:

الف) اگر مجبور باشد به همه‌ی سؤال‌ها جواب دهد؟

ب) اگر بتواند سؤال‌ها را بدون جواب هم بگذارد؟

۱۰ عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن (حداکثر یک رادیکال) بنویسید.

الف) $\sqrt{۲\sqrt[۳]{۲^۴}}$ ب) $\sqrt{\sqrt{۲۵۶}}$ ج) $\sqrt[۴]{\sqrt[۳]{۲۰۴۸}}$

۱۱ مجموعه‌های $R - [۰, ۱)$ و $R - (-۱, ۱)$ را به صورت اجتماع دو بازه بنویسید.

۱۲ اگر با استفاده از ارقام ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶ ، اعداد ۵ رقمی بسازیم، در چه تعدادی از این اعداد، رقم‌های تکراری به چشم می‌خورد؟

۱۳ فرض کنید $u = \{a, b, c, d, e\}$ مجموعه مرجع باشد و $A = \{a, e\}$ و $B = \{b, c\}$ ؛ حاصل عبارت‌های زیر را بدست آورید.

الف) A' ب) B' پ) $A \cap B'$ ت) $A' \cup B$ ث) $A - B'$

۱۴ یک نقاش قوطی‌هایی از ۴ رنگ قرمز، آبی، زرد و مشکی دارد. اگر او با ترکیب دو یا چند قوطی از رنگ‌های متمایز بتواند دقیقاً یک رنگ جدید درست کند، او چند رنگ می‌تواند داشته باشد؟

چرا با این‌که در کارهای هنری فقط ازهمین ۴ رنگ استفاده می‌شود، اما تعداد رنگ‌های حاصل بیش‌تر از جواب شماست؟

۱۵ اگر n یک عدد طبیعی باشد، حاصلضرب اعداد طبیعی متوالی از ۱ تا n را چگونه نمایش می‌دهند؟

۱۶ شخصی برای رفتن به مهمانی ۳ پیراهن و ۲ شلوار دارد. او به چند طریق مختلف می تواند به مهمانی رود؟

۱۷) b و a را طوری تعیین کنید که روابط زیر تابع باشند.

الف) $f(x)=\left\{(۳,۲a-b),(\frac{۶}{۲},۲a+b),(۱,a),(۲,۳),(\frac{۲}{۱},\frac{۳}{a})\right\}$

ب) $g(x)=\{(a,a),(b,a),(۲a-b,۰),(b,۲a-b),(a,۲b)\}$

۱۸) اگر بدانیم $AB=۰$ ، آنگاه راجع به A و B چه می‌توان گفت؟

۱۹) درستی اتحاد زیر را بررسی کنید.

$$\frac{(۱+\tan^۲\alpha)\cos^۲\alpha}{\cot\alpha}=\tan\alpha$$

۲۰) خطی از نقطه‌ی $A(۲,۳)$ گذشته و محور xها را با زاویه‌ی ۴۵° قطع می‌کند، عرض نقطه‌ای به طول ۴ بر روی این خط کدام است؟

۲۱) $\sin\theta+\cos\alpha$ همواره عددی در بازه‌ی $[a,b]$است. مطلوبست محاسبه‌ی مقدار عددی $۳a-۵b$.

۲۲) جمله اول یک دنباله حسابی نصف جمله سوم است. جمله پانزدهم این دنباله چند برابر قدر نسبت آن است؟

۲۳) اگر جملات سوم و هفتم یک الگوی خطی برابر با ۸ و ۲۸ باشند، چندمین جمله ی این الگو برابر با ۵۳ خواهد بود؟

۲۴) در یک مدرسه ۱۲۲ نفری، ۸۲ نفر ساعت در دست دارند و ۷۹ نفر عینک می‌زنند که ۵۴ نفر هم عینک می‌زنند و هم ساعت در دست دارند. چند نفر:

الف) حداقل یکی از دو مورد را استفاده می‌کنند؟

ب) فقط ساعت در دست دارند؟

پ) دقیقاً یکی از دو مورد را استفاده می‌کنند؟

ت) نه ساعت می‌بندند و نه عینک می‌زنند؟

۲۵) فرض کنیم A و B زیر مجموعه‌هایی از مجموعه مرجع U باشد بطوریکه $n(u)=۱۲۰$ ، $n(A)=۷۵$ ، $n(B)=۵۰$ ، $n(A\cap B)=۳۵$

مطلوب است:

الف) $n(A\cup B)$ ب) $n(A\cap B')$

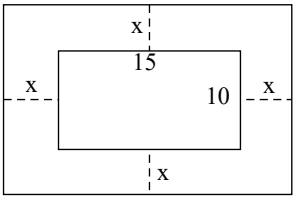
پ) $n(A'\cap B)$ ت) $n(A'\cap B')$

۲۶) نمودار هر یک از سهمی‌های زیر را رسم کنید.

الف) $y=-(x+۱)^۲-۳$ ب) $y=۳x^۲-۲$

پ) $y=x-x^۲$ ت) $y=\frac{x^۲}{۲}+x-۴$

۲۷) یک عکس به اندازهٔ ۱۰ در ۱۵ سانتی‌متر درون یک قاب با مساحت ۳۰۰ سانتی‌متر مربع، قرار دارد. اگر فاصلهٔ همهٔ لبه‌های عکس تا قاب برابر باشد، ابعاد این قاب عکس را پیدا کنید.



۲۸) مجموع مربعات دو عدد فرد متوالی ۲۹۰ است. این دو عدد را پیدا کنید.

۲۹) در هر یک از موارد زیر، نسبت مثلثاتی زاویه‌ای داده شده است. سایر نسبت‌های مثلثاتی را به‌دست آورید.

الف) $\cos\alpha=\frac{۳}{۷}$ (α در ربع چهارم)

ب) $\sin\beta=\frac{-۱}{۲}$ (β در ربع سوم)

۳۰) اگر حروف کلمه «موبایل» را تصادفی کنار هم قرار دهیم، احتمال این‌که دو حرف (ل) و (ی) کنار هم قرار بگیرند چه مقدار است؟

۳۱) از بین پنج کتاب ریاضی، فیزیک، شیمی، هندسه و ادبیات ۳ کتاب به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که کتاب ریاضی در بین این سه کتاب نباشد چند درصد است؟

۳۲ باتوجه به مجموعه‌ی $A = \{a, b, c, d, e\}$ به سؤالات زیر بدون نوشتن زیرمجموعه‌ها پاسخ دهید.

الف) تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی

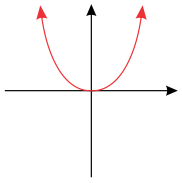
ب) تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی که a در آن‌ها نیست.

پ) تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی که a در آن‌ها هست.

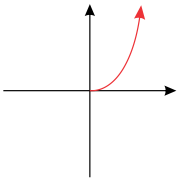
ت) تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی که c در آن‌ها نیست ولی a در آن‌ها هست.

۳۳ کدام یک از نمودارهای زیر نمایش صحیحی برای تابع $f(x) = x^۲$ است؟ چرا؟

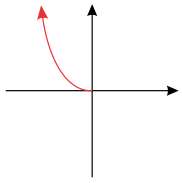
الف)



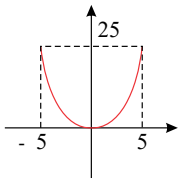
ب)



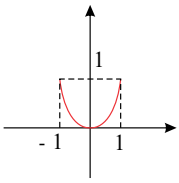
پ)



ت)



ث)



۳۴ آیا جدول مقابل نمایانگر یک تابع است؟ چرا؟

x	۱	۲	۳	۴	۵	۶
y	۱	۴	۸	۱۶	۲۵	۳۶

۳۵ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را تعیین کنید.

الف) $x^۲ = ۲۵ \rightarrow x = ۵$

ب) $x^۲ = ۲۵ \rightarrow x = -۵$

پ) $x^۲ = ۲۵ \rightarrow x = \pm ۵$

ت) $a^۲ = b \rightarrow a = \pm\sqrt{b}$

۳۶ معادلات زیر را به روش تجزیه حل کنید.

الف) $x^۲ - x = ۰$ ب) $x^۲ - ۱۶ = ۰$ پ) $x^۲ + ۴x - ۲۱ = ۰$ ت) $x^۲ - ۴x + ۴ = ۰$

۳۷ اگر $a^۲ - ۶a = -۱$ باشد حاصل عبارت $\frac{a+۱}{\sqrt{a}}$ را بدست آورید.

۳۸ در صورتیکه a مقداری حقیقی بین صفر و منفی یک باشد، حاصل عبارت زیر را به صورت مضربی از ۳ بیان کنید.

$$\sqrt{a^۲} + \sqrt{a^۲ + ۱ - ۲a} + \sqrt{a^۲ + ۴ - ۴a}$$

۳۹ درستی اتحاد زیر را بررسی کنید.

$$(\frac{۱}{\cos\alpha} + \tan\alpha)(۱ - \sin\alpha) = \cos\alpha$$

۴۰ ربع هر یک از زوایای زیر را مشخص کنید.

-۱۵ , ۲۲۰ , ۱۴۵ , -۲۷۳

۴۱ در یک الگوی خطی جملات پنجم و هفتم به ترتیب برابر با ۲۳ و ۳۱ هستند. جمله عمومی آنرا بیابید.

۴۲ نمودار تابعی، یک سهمی است که از نقاط $(۱, -۲)$ و $(۲, -۳)$ می‌گذرد و محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع می‌کند. نمایش جبری این تابع را بیابید و نمودار آن را رسم و دامنه و برد تابع را مشخص کنید.

۴۳ اختلاف سنی دو برادر با یکدیگر ۴ سال است. اگر چهار سال دیگر حاصل‌ضرب سن آنها ۶۰ شود، سن هر کدام چقدر است؟

۴۴ هر یک از معادله‌های زیر را به روش دلخواه حل کنید.

۱) $۲x^۲ = ۲۵۰$

۲) $۹ - ۶z + z^۲ = ۰$

۳) $۴a^۲ + ۳a = ۱$

۴) $b^۲ + \sqrt{۲}b - ۴ = ۰$

۴۵ هر یک از معادله‌های زیر را با روش فرمول کلی حل کنید.

۱) $۴x^۲ - ۱۳x + ۳ = ۰$

۲) $r - r^۲ = ۳$

۳) $a^۲ + ۲\sqrt{۳}a = ۹$

۴) $\frac{t^۲}{۳} - \frac{t}{۲} - \frac{۳}{۲} = ۰$

۴۶ یک شیمیدان که در زمینه عطر فعالیت می‌کند، ۱۰ نوع ماده‌ی شیمیایی در اختیار دارد. او با استفاده از هر ۳ نوع ماده، یک رایحه‌ی مخصوص درست می‌کند.

این شیمیدان چند نوع عطر می‌تواند درست کند هرگاه:

الف) هیچ محدودیتی نداشته باشد؟

ب) دو نوع ماده باشند که با هم نتوانند ترکیب شوند؟

پ) سه ماده باشند که اگر هر سه با هم ترکیب شوند منفجر می‌شوند؟

ت) مواد به دو دسته ۴ تایی و ۶ تایی تقسیم شوند که هیچ یک از مواد دسته‌ی اول با مواد دسته‌ی دوم قابل ترکیب نباشند.

۴۷ جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.

به انتخاب r شئ از n شئ متمایز که در آن ترتیب انتخاب اهمیت ..... باشد یا به عبارتی به هر زیرمجموعه‌یr عضوی از یک مجموعه‌ی n عضوی یک ..... می‌گوییم که با ..... یا ..... نمایش می‌دهیم و برای محاسبه‌ی آن از رابطه‌ی ..... استفاده می‌کنیم که محدوده r در آن به صورت ..... است.

۴۸ با حروف کلمه‌ی «شهیدان» (بدون تکرار حروف):

الف) چند کلمه‌ی ۶ حرفی می‌توان نوشت؟

ب) چند کلمه‌ی ۶ حرفی که به حرف «ش» ختم شود می‌توان نوشت؟

پ) چند کلمه‌ی ۶ حرفی که در آن‌ها حروف «ش» و «د» کنار هم قرار بگیرند می‌توان نوشت؟

ت) چند کلمه‌ی ۵ حرفی که به «شهد» ختم شوند می‌توان نوشت؟

ث) چند کلمه‌ی ۶ حرفی که با حروف کلمه‌ی «شاد» شروع شوند می‌توان نوشت؟

ج) چند کلمه‌ی ۶ حرفی که حروف کلمه‌ی «هادی» کنار هم قرار بگیرند می‌توان نوشت؟

چ) چند کلمه‌ی ۶ حرفی که با یک حرف بی نقطه شروع شوند می‌توان نوشت؟

ح) چند کلمه‌ی ۴ حرفی می‌توان نوشت؟

۴۹ جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

الف) تعداد جایگشت‌های n شئ متمایز برابر است با ..... .

ب) تعداد جایگشت‌های r تایی از n شئ متمایز یا به عبارتی تعداد حالت‌های انتخاب r شئ از بین n شئ که در آن‌ها ترتیب قرار گرفتن مهم باشد را با ..... نمایش می‌دهیم که برای محاسبه‌ی آن از رابطه‌ی ..... استفاده می‌کنیم.

۵۰ برای هر یک از توابع زیر، مثالی بزنید.

الف) دامنه آنها تنها سه عضو داشته باشد.

ب) برد آن تنها یک عضو داشته باشد.

ج) دامنه آن یک عضو داشته باشد.

د) دامنه آن نامتناهی باشد ولی برد آن تنها یک عضو داشته باشد.

هـ) دامنه و برد آن نامتناهی باشد.

۵۱ تابع f با نمایش جبری $f(x) = ۳x + ۲$ و دامنه‌ی $D = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$ در دست است. با تعیین برد، نمودار پیکانی این تابع را رسم نمائید.

۵۲ تابع بودن یا نبودن روابط زیر را با نوشتن اعضاء مشخص کنید.

الف) $f(x)=\{(x,y)\,|\,x,y\in\mathbb{W},\ ۲x+۲y=۱۰\}$

ب) $h(x)=\left\{(x,۲y)\,|\,x,y\in\mathbb{Z},\ x^۲+y^۲=۱۸\right\}$

پ) $g(x)=\left\{(x,\frac{y}{۲})\,|\,x,y\in\mathbb{Z},\ x+y\leq ۳\right\}$

ت) $Z(x)=\{(x,y)\,|x,\ y\in\mathbb{Z},\ |x|+|y|=۳\}$

۵۳ یک رابطه که به صورت مجموعه زوج مرتب‌ها نشان داده شده است، در چه شرایطی تابع است؟

۵۴ تابع را تعریف کنید.

۵۵ نامعادله‌ی قدر مطلقی $|۲x-۱|<۳x\leq ۴$ را حل کنید.

۵۶ حدود m را طوری تعیین کنید که عبارت $y=x^۲-mx+۹$ همواره مثبت باشد.

۵۷ عبارت‌های زیر را تعیین علامت کنید.

الف) $\frac{-x+۳}{۲}$ ب) $\frac{-x+۳}{-۲}$

پ) $-x^۲+۲x-۱$ ت) $(۱-x)^۳$

۵۸ هر یک از عبارت‌های زیر را تعیین علامت کنید.

الف) $(۲x-۱)(۳x+۲)$ ب) $(x-۱)^۲$

پ) $(x+۱)^۳$ ت) $x^۲-۲x+۳$

۵۹ بدون حل معادله، در مورد تعداد جواب‌های هر معادله بحث کنید.

الف) $x^۲-۴x-۱۳=۰$ ب) $۲x^۲-۴x+۲=۰$ پ) $۷x^۲+۲x+۱=۰$

۶۰ معادلات زیر را به روش مربع کامل حل کنید.

الف) $۴x^۲-۲x-\frac{۱}{۲}=۰$ ب) $۳x^۲-۶x+۳=۱$

۶۱ عدد $\sqrt[۳]{-۳\sqrt[۳]{۳}}$ را به صورت یک رادیکال بنویسید.

۶۲ در جاهای خالی، علامت مساوی، کوچکتر یا بزرگتر قرار دهید.

الف) $(-۰/۱)^۵\square(-۰/۱)^۴$ ب) $\sqrt[۴]{۰/۰۰۰۱}\square ۰/۱$

پ) $(۳/۲)^۲\square(۳/۲)^۳$ ت) $(-۲)^۳\square(-۲)^۵$

ث) $(-۱/۱)^۴\square(۱/۱)^۴$ ج) $(-۲)^۵\square(-۲)^۷$

چ) $۲^۳\square۳^۲$ ح) $(\frac{۱}{۲})^۲\square(\frac{۱}{۲})^۳$

۶۳ در هر یک از حالات زیر a چه اعدادی می‌تواند باشد؟ برای هر یک مثالی بزنید.

الف) $\sqrt[۳]{a}>a$ $a>۰$ پ) $\sqrt[۳]{a}=a$ $a\geq ۰$ ث) $\sqrt[۳]{a}<a$ $a>۰$

ب) $\sqrt[۳]{a}>a$ $a<۰$ ت) $\sqrt[۳]{a}=a$ $a<۰$ ج) $\sqrt[۳]{a}<a$ $a<۰$

۶۴ با یک مثال نشان دهید وقتی صحبت از متمم مجموعه‌ای می‌شود، حتماً باید مجموعه‌ی مرجع مشخص باشد.

۶۵ اگر $A_n=\left[\frac{-۳}{n},\frac{n-۱}{۲}\right)$ باشد، آنگاه حاصل $A_۱\cup(A_۲\cap A_۳)$ را بدست آورید و تعداد اعداد صحیح در بازه‌ی بدست آمده را معین کنید.

۶۶ ساده شدهٔ عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف

$$(\frac{۱}{۱-\cos\theta}-\frac{۱}{۱+\cos\theta})(\frac{۱}{\cos\theta(۱+\cot^۲\theta)})$$

ب

$$(\frac{۱}{۱-\sin\theta}+\frac{۱}{۱+\sin\theta})-۲\tan^{۲}\theta$$

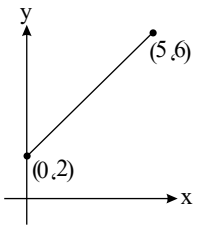
۶۷ کدام جمله درست و کدام جمله نادرست است:

الف) اندازهٔ جامعه کمتر از اندازهٔ نمونه است

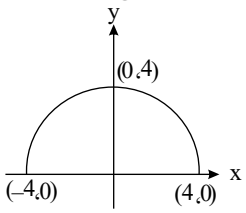
ب) اعضای نمونه، همان اعضای جامعه‌اند

پ) نمونه زیر مجموعه‌ای از جامعه است

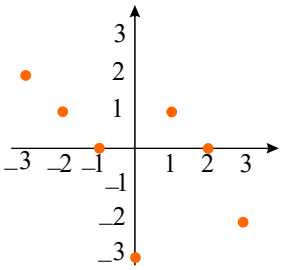
۶۸ در شکل‌های زیر نمودار تعدادی از توابع رسم شده‌اند. دامنه و برد هر یک از این توابع را به کمک نمودار آنها مشخص کنید. در هر مورد که امکان دارد، دامنه و برد را به‌صورت یک بازه نمایش دهید. نمایش جبری (الف) و (ج) را بنویسید.



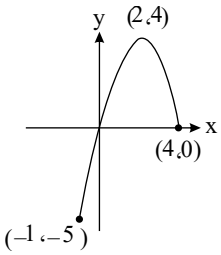
(الف)



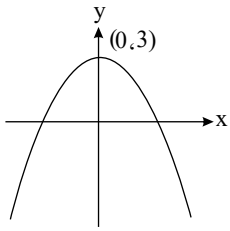
(ب)



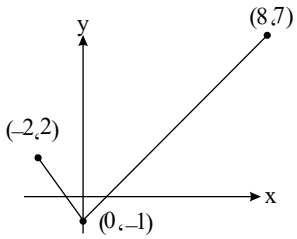
(پ)



(ت)



(ث)



(ج)

۶۹ اگر $n(A)=۱۵$، $n(A\cap B)=۵$ و $n(A\cup B)=۳۰$ آنگاه $n(B)$ را محاسبه کنید.

۷۰ انواع متغیرهای کیفی را نام برده و هر یک را توضیح دهید.

۷۱ مفاهیم زیر را تعریف کنید.

الف) آمار

ب) علم آمار

۷۲ اگر A, B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند و $A\subseteq B$ ، ثابت کنید: $P(A)\leq P(B)$

۷۳ اصل ضرب و تعمیم‌یافته اصل ضرب را تعریف کنید.

۷۴ هر تابع که بتوان آنرا به فرم ..... نمایش داد، یک تابع خطی نامیده می‌شود.

۷۵ مفاهیم زیر را تعریف کنید.

الف) دامنه ب) برد ج) نمایش جبری تابع

۷۶ دو رابطه از A به B بنویسید که تابع باشند و دو رابطه از B به A بنویسید که تابع نباشند.

$A=\{a,b,c,d\}$ $B=\{e,f,g,h\}$

۷۷ در یک مسابقه کاراته، اگر تک تک شرکت‌کنندگان با هم مبارزه کنند و در نهایت ۳۶ مبارزه انجام شده باشد تعداد شرکت‌کنندگان و همچنین الگویی بین تعداد شرکت‌کنندگان و تعداد مبارزات را بدست آورید.

۷۸ معادله‌ی درجه‌ی دومی بنویسید که ریشه‌های آن ۱− و ۳ باشد.

۷۹ اگر داشته باشیم $\sqrt{\sqrt{x\sqrt[۳]{x}}}=y^{\frac{۱}{۳}}$، چه رابطه‌ی بین y و x برقرار است؟

۸۰ عدد $۵\sqrt[۳]{۳}$ را به صورت یک رادیکال بنویسید.

۸۱) اگر $\sqrt[۴]{A}=۲$ باشد، آنگاه حاصل $\sqrt[۳]{A^۲}$ را بدست آورید.

۸۲) حاصل هر یک از عبارات زیر را بدست آورید.

الف) $\sqrt[۳]{\left(\frac{۳}{۲}\right)^{-۳}}$ ب) $\sqrt[۸]{(۲۵۶)^{\frac{-۱}{۲}}}$

۸۳) اگر $\cos\alpha=\sqrt[۴]{۳}$، حاصل عبارت $(\sin^۲\alpha+۱)(۲+\cos^۲\alpha)$ را بیابید.

۸۴) θ زاویه‌ای در ربع دوم است؛ حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$\frac{\sin\theta\,|\cos\theta|-|\sin\theta|\cos\theta}{|\sin\theta\cos\theta|}$$

۸۵) صرف نظر از تغییر علامت، در مسیرهای زیر مقدار سینوس و کسینوس چگونه تغییر می‌کنند؟

۱) افزایش زاویه از ۳۰ به ۱۲۰ ۲) کاهش زاویه از ۲۷۵ به ۲۶۵

۳) افزایش زاویه از ۱۲۰ به ۱۹۰ ۴) کاهش زاویه از ۳۷۰ به ۱۹۰

۸۶) شخصی به طول قد $۱۸۰cm$ در فاصله‌ی ۲ متری چراغی به طول ۳ متر قرار گرفته است، طول سایه‌ی شخص چند متر است؟

۸۷) حاصل عبارت‌های زیر را بیابید.

الف

$$(\tan ۶۰^\circ-\cos ۳۰^\circ)(\cot ۶۰^\circ\sin ۳۰^\circ)+\tan ۴۵^\circ$$

ب

$$\frac{\cos^۲ ۴۵^\circ-\cos^۲ ۶۰^\circ+\tan ۱۸۰^\circ}{\sin^۲ ۳۲^\circ-\cot ۹۰^\circ+\cot^۲ ۶۰^\circ+\cos^۲ ۳۲^\circ}$$

۸۸) مسئله زیر را در نظر گرفته و جدول مربوط به آن را پر کنید.

در یک شرکت تولید اتومبیل که در آن در یک ماه ۱۰۰۰ دستگاه خودرو تولید می‌شود، ۱۵۰ خودرو به طور تصادفی انتخاب شده‌اند و به جهت بررسی میزان حداقل و حداکثر سرعت، آن‌ها را مورد آزمایش قرار دادند.

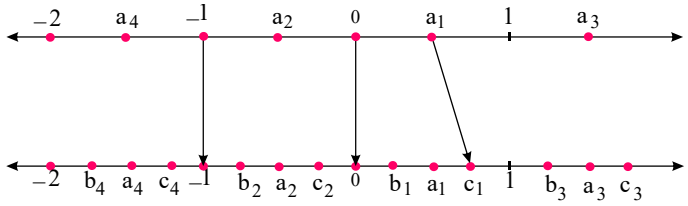
جامعه	اندازه جامعه	نمونه	اندازه نمونه	ویژگی مورد بررسی

۸۹) حاصل عبارت مقابل را به‌دست آورید.

$$A=\sqrt{۶+\sqrt{۶+\sqrt{۶+\cdots}}}$$

۹۰) طول یک مستطیل ۳ واحد بیشتر از عرض آن است. رابطه‌ای ریاضی بنویسید که محیط این مستطیل برحسب تابعی از عرض آن بیان کند.

۹۱) مانند نمونه در شکل زیر، هر یک از نقاط مشخص شده روی محور بالا را به یکی از نقاط مشخص شده روی محور پایین که متناظر با ریشهٔ سوم آن عدد است، وصل کنید (یک مثال عددی از هر مورد ارائه کنید.).



۹۲) هر یک از اعداد ۱ تا ۱۰ را روی یک کارت می‌نویسیم و در کیسه‌ای قرار می‌دهیم. دو کارت را با هم به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که مجموع اعداد رو شده روی کارت‌ها، عددی زوج باشد چه‌قدر است؟

۹۳) در یک باشگاه تیراندازی، ۳۰٪ افراد با سلاح نوع A، ۵۰٪ با سلاح نوع B و ۱۰٪ با هر دو سلاح تیراندازی می‌کنند. مطلوبست احتمال این‌که یک نفر:

الف) حداقل با یکی از دو سلاح تیراندازی کند.

ب) فقط با سلاح A تیراندازی کند.

ج) با هر دو سلاح تیراندازی کند.

۹۴ خانواده‌ای دارای ۴ فرزند است، پیشامد آن‌که حداقل دو تن از فرزندان پسر باشند را مشخص کنید.

۹۵ نامعادلات زیر را حل کنید.

الف) $۳x - ۲ > ۵x + ۷$ ب) $۲ - ۳x \leq -۳ + ۷x$

۹۶ عبارات زیر را تعیین علامت کنید.

الف) $-x^۲ + ۳x + ۴$ ب) $-۳x^۲ + ۴x - ۱$

پ) $\frac{-x^۲}{۴} - ۳x - ۹$ ت) $-x^۲ + ۳x - ۵$

۹۷ اگر مساحت زمینی مستطیل شکل که طول آن دو برابر عرض آن است برابر با ۸ واحد باشد، محیط این زمین چند واحد است؟

۹۸ اعداد زیر را با هم مقایسه کنید.

الف) $\sqrt[۲]{۲} \square \sqrt[۳]{۵}$ ب) $\sqrt[۴]{۸} \square \sqrt[۳]{۶}$ پ) $\sqrt[۴]{۹} \square \sqrt[۵]{۱۲}$

۹۹ درستی اتحاد زیر را بررسی کنید.

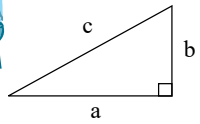
$$\frac{\sin^۲\alpha - \cos^۲\alpha}{\cos\alpha(\tan\alpha - ۱)} = \sin\alpha + \cos\alpha$$

۱۰۰ درستی اتحاد زیر را بررسی کنید.

$$\sqrt{\frac{\left(\frac{۱}{\sin\alpha} - \sin\alpha\right)\cot\alpha}{\cos\alpha}} = |\cot\alpha|$$

۱۰۱ در صورتیکه $\cot\alpha = \frac{۱}{۵}$، حاصل $۱ - \frac{۱}{\cos^۲\alpha}$ را بدست آورید.

۱۰۲ در مثلث روبرو اگر $\frac{b}{c} = \frac{۱}{۳}$ باشد، نسبت $\frac{a}{b}$ را بیابید.



۱۰۳ اگر داشته باشیم $\sin\alpha = ۰/۶$، $\cot\alpha$ را بدست آورید.

۱۰۴ مقایسه کنید:

۱) $\sin ۷۵ \square \sin ۸۵$ ۲) $\cos ۴۰ \square \cos ۳۲۰$

۳) $\cos ۳۰ \square \sin ۶۰$ ۴) $|\sin ۱۲۳| \square |\sin ۳۲۱|$

۱۰۵ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

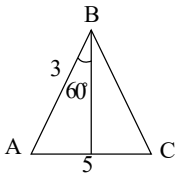
الف) زاویه‌ی ۹۰° در ربع اول است.

ب) زاویه‌ی ۱۸۰° در ربع سوم است.

۱۰۶ در دایره‌ی مثلثاتی، محل زوایای زیر را نشان دهید.

۳۷ , -۵۳ , ۲۴۵ , -۲۷۰

۱۰۷ مساحت مثلث روبرو را بدست بیاورید.



۱۰۸ مثلث قائم‌الزاویه‌ای با وتر ۱۰ داریم که در آن کسینوس یک زاویه‌ی حاده ۰/۸ است. مساحت مثلث را بدست آورید.

۱۰۹ یک صخره اورانیومی بزرگ به جرم $۲۰۰kg$، هر روز $\frac{۱}{۴}$ جرم خود را از دست می‌دهد، پس از چند روز جرم این صخره به $۵۰kg$ می‌رسد؟

۱۱۰ واسطه حسابی بین اعداد زیر را بنویسید.

الف) $۱۱, ۱۵$ ب) $-۱, ۱$ پ) $-۳, -۱۲$

۱۱۱ باتوجه به دنباله‌ی ۲, ۵, ۸, ۱۱, ۱۴, ... :

الف) نوع دنباله را مشخص کنید.

ب) جمله عمومی دنباله را بدست آورید.

پ) جمله دوازدهم دنباله را بدست آورید.

ت) جمله چندم این دنباله برابر با ۲۰ است؟

۱۱۲ یک دستگاه کددهی به هر مراجعه‌کننده یک کد شناسایی می‌دهد به اینصورت که با توجه به زمان مراجعه هر فرد ساعت مراجعه را دو برابر کرده و نصف دقیقه زمان مراجعه را به آن می‌افزاید و عدد حاصل را به صورت یک کد به مراجعه‌کننده می‌دهد؛ اگر مراجعه‌کننده‌ای در ساعت ۱۱ مراجعه کرده باشد و کد دریافتی او ۳۴ باشد، زمان دقیق مراجعه او را معلوم کنید؟

۱۱۳ تفاضل دو جمله متوالی از الگوی غیر خطی زیر برابر ۲۸ است، آن دو جمله را بیابید؟

$a_n = ۴n^۲ - ۱$

۱۱۴ ۱۴ نفر به آزمایشگاهی مراجعه کرده‌اند که از بین آنها ۹ نفر برای انجام آزمایش خون و ۵ نفر برای انجام آزمایش قند خون مراجعه کرده‌اند که در این میان ۳ نفر هر دو آزمایش را داده‌اند مطلوب است تعداد کسانی که:

الف) آزمایش خون یا قند انجام داده‌اند.

ب) هیچ از دو یک آزمایش را انجام نداده‌اند.

۱۱۵ با فرض $U = \{a, b, c, d, e, f\}$ به عنوان مجموعه‌ی مرجع و $A = \{a, b, c\}$ و $B = \{c, d, f\}$ ، درستی روابط زیر را نشان دهید:

الف) $A - B = A \cap B'$

ب) $(A')' = A$

پ) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

ت) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

ث) $A - A' = A$

۱۱۶ اگر $\mathbb{N}$ (مجموعه اعداد طبیعی) را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیریم، آیا می‌توان مجموعه‌های زیر را مثال زد؟

الف) مجموعه نامتناهی A که A' هم نامتناهی باشد.

ب) مجموعه نامتناهی B که B' متناهی باشد.

پ) مجموعه متناهی C که C' هم متناهی باشد.

۱۱۷ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

الف) اگر B و A نامتناهی باشند، $A \cap B$ می‌تواند متناهی باشد.

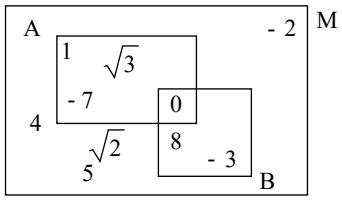
ب) اگر $A \cap B$ نامتناهی باشد، B و A هر دو نامتناهی هستند.

پ) اگر A متناهی و B نامتناهی باشد آنگاه $B - A$ متناهی است.

ت) اگر A نامتناهی و B متناهی باشد آنگاه $A \cup B$ متناهی است.

۱۱۸ اگر A دارای یک زیرمجموعه‌ی متناهی باشد، راجع به A چه می‌توان گفت؟

۱۱۹ نمودار ون را در نظر بگیرید و هر یک از مجموعه‌های زیر را با اعضا مشخص کنید.



الف

B' و A'

ب

$(A \cap B)'$

پ

$(A \cup B)'$

ت

$A' - B'$

۱۲۰ درستی رابطه‌های زیر را ثابت کنید.

الف

$$\frac{۲\tan\theta}{۱+\tan^۲\theta} = ۲\sin\theta\cdot\cos\theta$$

ب

$$\frac{۱}{\cos\theta} - \cos\theta = \tan\theta \times \sin\theta$$

پ

$$\frac{\sin^۲ x}{۱-\sin x} + \frac{\sin^۲ x}{۱+\sin x} = ۲\tan^۲ x$$

ت

$$۱ - \frac{\cos^۲\alpha}{۱+\sin\alpha} = \sin\alpha$$

۱۲۱ عبارت‌های زیر را تعیین علامت کنید.

الف

$$P = \frac{(x-۲)^{۱۰۰}(x+۳)^{۱۰۱}}{(x+۱)^{۱۰۲}}$$

ب

$$P = \frac{(۱-۲x)(۳x^۲+۲x-۱)}{x^۲+۸}$$

پ

$$P = \frac{(-۲x^۲+x-۱)(x+۱)^۳}{(-x^۲+۵x-۶)(x^۲+۶x+۹)}$$

۱۲۲ درستی یا نادرستی روابط زیر را تعیین کنید.

الف

$$a_n = (\frac{۱}{۵})^n - ۱ \Rightarrow a_۳ = \frac{۱۲۴}{۱۲۵}$$

ب

$$a_n = \frac{۳n+۴}{n-۲} \Rightarrow a_۵ = \frac{۱۹}{۳}$$

۱۲۳ حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف

$$\frac{۲}{x^۲-۱} - \frac{x}{x^۲-۳x+۲} =$$

ب

$$\frac{x}{x-۱} + \frac{۳}{x+۱} - \frac{۴x-۲}{x^۲-۱} =$$

پ

$$\frac{a^۲-b^۲}{ab-b^۲}-\frac{ab-b^۲}{b^۲}=$$

ت

$$\frac{a+۱}{a-۱}+\frac{a+۲}{a+۳}-\frac{a+۷}{a^۲+۲a-۳}=$$

۱۲۴ نامعادلات زیر را حل کنید و مجموعه جواب آن را به صورت بازه نشان دهید.

الف

$$\frac{x^۲-۳x+۲}{x+۱}>۰$$

ب

$$-۱<\frac{۲x+۱}{۳x-۱}<۲$$

پ

$$۱+\frac{x^۲}{۳x-۴}\leq\frac{۸x+۱۰}{۳x-۴}$$

ت

$$\begin{cases}۲x-۵\geq ۱\\ \frac{x}{۲}+۳\leq ۷\end{cases}$$

۱۲۵ کدامیک از موارد زیر درست و کدامیک نادرست است؟

الف رابطهٔ $\{(۲,۵),(۴,-۱),(۳,۲)\}$ تابع است.

ب به ۶ طریق می‌توان ۶ کتاب را در یک قفسه کنار هم قرار داد.

پ معادلهٔ $-۴x^۲+۴x-۱=۰$ ریشهٔ مضاعف دارد.

ت رنگ مورد علاقه افراد یک متغیر کیفی اسمی است.

۱۲۶ با پر کردن جاهای خالی، اسمی یا ترتیبی بودن متغیرهای زیر را مشخص کنید.

الف) مراحل رشد یک انسان (نوزاد، کودک، نونهال، نوجوان، جوان، میان‌سال، کهن‌سال) ☐ اسمی ☐ ترتیبی

ب) نژاد افراد (سفیدپوست، زردپوست، سیاه‌پوست) ☐ اسمی ☐ ترتیبی

پ) رنگ موی افراد (مشکی، قهوه‌ای، طلایی) ☐ اسمی ☐ ترتیبی

ت) کیفیت میوهٔ هلو (درجه ۱، درجه ۲، درجه ۳) ☐ اسمی ☐ ترتیبی

۱۲۷ در شکل زیر، دانش‌آموزان یک مدرسه در صف صبحگاهی مشاهده می‌شوند. هر صف افقی نشان‌دهندهٔ تعداد دانش‌آموزان یک کلاس است. جامعه و اعضای آن را مشخص کنید و دو نمونهٔ دلخواه از این جامعه را ارائه کنید.

۱۲۸ هر یک از اعداد طبیعی و زوجِ کوچک‌تر از ۱۱ را روی یک کارت می‌نویسیم و یکی از این کارت‌ها را به‌تصادف برمی‌داریم:

الف) فضای نمونه‌ای این آزمایش یا پدیدهٔ تصادفی را مشخص کنید.

ب) چه تعداد پیشامد تصادفی را روی این فضای نمونه‌ای می‌توان تعریف کرد؟

پ) پیشامد A را که در آن «عدد روی کارت انتخاب شده بر ۴ بخش‌پذیر باشد»، مشخص کنید.

۱۲۹ در یک کلاس تعدادی از دانش‌آموزان که همگی دارای شرایط علمی خوبی‌اند، داوطلب حضور در مسابقات علمی مدرسه هستند. معلم قصد دارد ۲ نفر را به تصادف انتخاب کند. او این دو نفر را به ۲۸ روش می‌تواند از بین داوطلبان انتخاب کند. تعداد داوطلبان چند نفر بوده است؟

۱۳۰ در هریک از نامعادله‌های زیر، مجموعه جواب را به شکل بازه بنویسید.

الف) $۳ \leq ۲x - ۲ < ۱$

ب) $x + ۱ \leq ۵ - x < ۲x + ۳$

پ) $-۲ < \frac{۵ - x}{۲} < ۰$

ت) $\frac{۴ - ۲x}{۳x + ۱} \geq ۰$

ث) $x(x^۲ + ۴) < ۰$

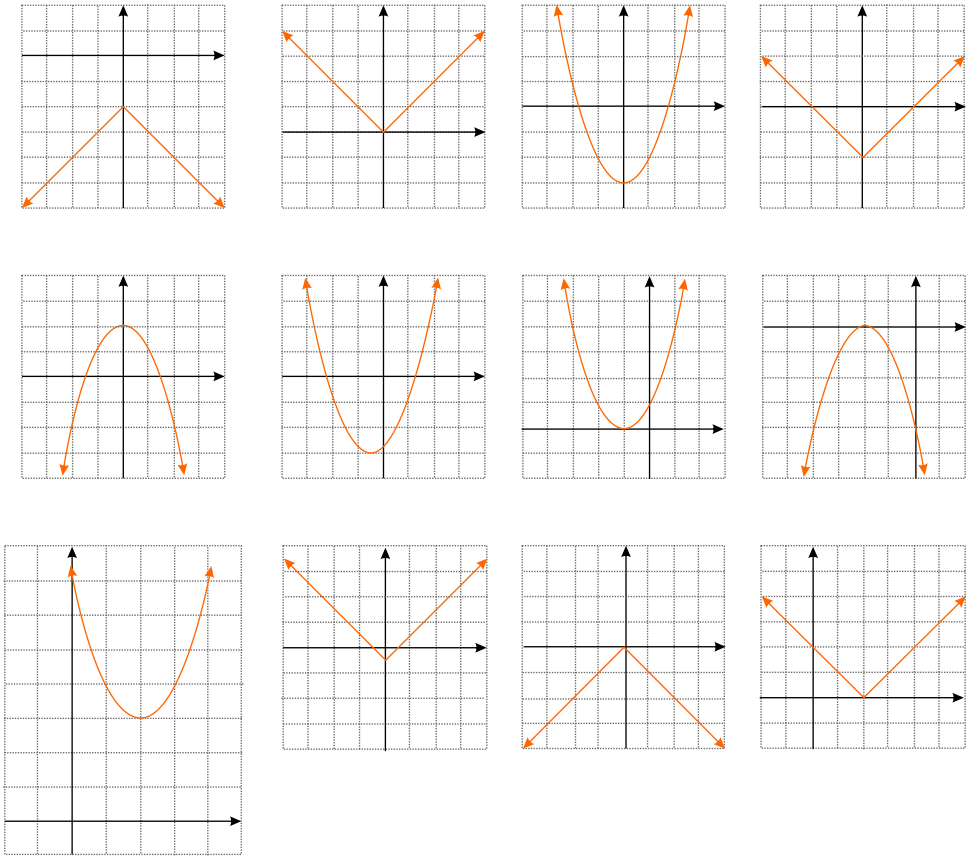
ج) $\frac{x^۳ - x}{x^۲ - ۲x + ۲} \leq ۰$

چ) $|۷ - ۲x| < ۱$

ح) $\left|\frac{x - ۱}{۲} - ۱\right| \geq ۳$

۱۳۱ فرض کنیم دامنهٔ هریک از توابع تمرین ۵ به بازهٔ $[-۲, ۳]$ محدود شده باشد. در این‌صورت برد هر تابع را پیدا کنید. از نمودارها کمک بگیرید.

۱۳۲ هریک از نمودارهای زیر کدام‌یک از تابع‌های (الف) تا (ر) را نمایش می‌دهد؟ دامنه و برد این توابع چیست؟



الف) $y = x^۲ - ۳$ ب) $y = -x^۲ + ۲$ پ) $y = |x|$ ت) $y = -|x|$

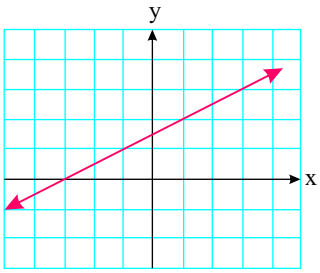
ث) $y = (x + ۱)^۲$ ج) $y = |x| - \frac{۱}{۲}$ چ) $y = |x - ۲|$ ح) $y = -(x + ۲)^۲$

خ) $y = -|x| - ۲$ د) $y = (x - ۲)^۲ + ۳$ ذ) $y = |x| - ۲$ ر) $y = (x + \frac{۱}{۲})^۲ - ۳$

۱۳۳ دو تابع مثال بزنید که دامنه و برد آنها یکی باشد، ولی هیچ زوج مرتب مشترکی نداشته باشند.

۱۳۴ اگر دربارهٔ تابع g داشته باشیم: $g(۴) = ۳, g(-۲) = \frac{۱}{۳}, g(۱) = ۵, g(۰) = ۲$ ، g را به‌صورت مجموعه‌ای مرتب بنویسید و نمودار آن را رسم کنید.

۱۳۵ نمایش جبری تابع زیر را که نمودار آن ارائه شده است، به دست آورید. از بین نمایش‌های مختلفی که برای این تابع می‌دانید، کدام‌یک مناسب‌تر است؟



۱۳۶ آیا خط $x = ۲$ را می‌توان به عنوان یک تابع در نظر گرفت؟ چرا؟ خط $y = ۵$ را چطور؟ در حالت کلی چه موقع یک خط را می‌توان یک تابع نیز در نظر گرفت؟

۱۳۷ در یک نوع ماشین حساب کوچک که دارای ۲۰ کلید است، برای انجام یک دستور خاص باید سه کلید مشخص با ترتیبی مشخص فشار داده شوند. اگر فردی نداند سه کلید مورد نظر کدام‌اند و بخواهد به طور تصادفی این کار را انجام دهد و فشردن هر سه کلید ۲ ثانیه زمان بخواهد، این فرد حداکثر (در بدترین حالت) در چه زمانی می‌تواند دستور موردنظر را اجرا کند؟

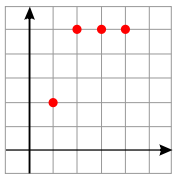
۱۳۸ مسئله زیر را به گونه‌ای کامل کنید که جواب ارائه شده، درست باشد.

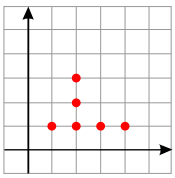
مسئله: چند عدد دو رقمی زوج می‌توان نوشت؛ به‌طوری که ..... ؟

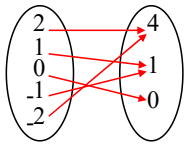
حل: تعداد راه‌های نوشتن یکان برابر ۵ تاست و تعداد راه‌های نوشتن دهگان برابر ۴ تاست. لذا با توجه اصل ضرب ۲۰ عدد با شرایط موردنظر وجود دارد.

۱۳۹ کدام یک تابع است؟

دامنه و برد هر تابع را معلوم کنید.







۱۴۰ کدام‌یک از روابط زیر یک تابع را معلوم می‌کند؟ توضیح دهید.

الف) رابطه‌ای که به ضلع یک مربع، محیط مربع را نسبت می‌دهد.

ب) رابطه‌ای که به هر فرد، دمای بدن او را در یک زمان معین نسبت می‌دهد.

ج) رابطه‌ای که به هر فرد، گروه خونی او را نسبت می‌دهد.

د) رابطه‌ای که به هر دانش‌آموز، دوستان او را نسبت می‌دهد.

هـ) رابطه‌ای که به هر فرد، ریشه‌های دوم آن عدد را نسبت می‌دهد.

و) رابطه‌ای که به هر عدد، ریشهٔ سوم آن را نسبت می‌دهد.

۱۴۱ با فرض با معنی بودن هر کسر، درستی هر یک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $\frac{۱}{\sin\theta} \times \tan\theta = \frac{۱}{\cos\theta}$

ب) $\frac{\cos\theta}{۱+\sin\theta} = \frac{۱-\sin\theta}{\cos\theta}$

پ) $\frac{۱+\tan\alpha}{۱+\cot\alpha} = \tan\alpha$

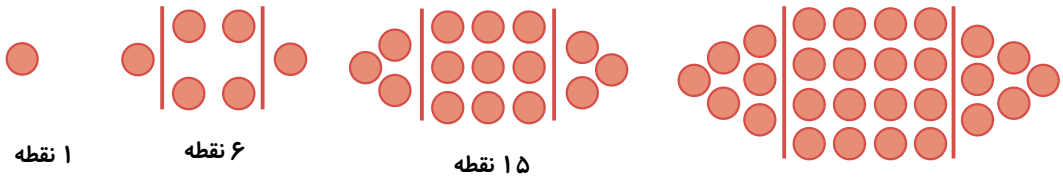
ت) $۱ - \frac{\cos^۲ x}{۱+\sin x} = \sin x$

ث) $\frac{۱}{\cos x} - \tan x = \frac{\cos x}{۱+\sin x}$

۱۴۲ زاویه‌ای مثل α پیدا کنید به‌طوری که $\tan\alpha > \cot\alpha$، اکنون زاویه‌ای مثل β پیدا کنید، به‌طوری که $\cot\beta > \tan\beta$، از این تمرین چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۱۴۳ الگوی زیر را در نظر بگیرید.

شکل(۱) شکل(۲) شکل(۳) شکل(۴)



۱ نقطه ۶ نقطه ۱۵ نقطه

الف) شکل بعدی را رسم کنید، سپس تعداد نقاط هر مرحله را به‌صورت یک دنباله تا جملهٔ ششم آن بنویسید.

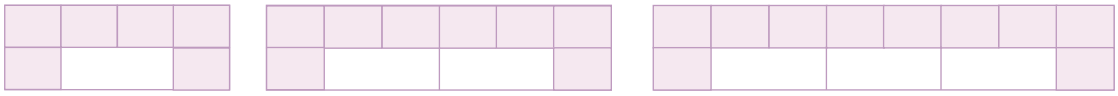
ب) جملهٔ عمومی الگو را بیابید.

پ) شکل دهم در این الگو چند نقطه دارد؟

۱۴۴ هر یک از زاویه‌های زیر را روی دایرهٔ مثلثاتی رسم کنید، سپس مشخص کنید در کدام یک از نواحی چهارگانه قرار می‌گیرد.

الف) $+۲۷۰^\circ$ ب) ۲۲۵° پ) -۱۳۵° ت) ۱۸۵°

۱۴۵ به الگوی روبه‌رو توجه کنید.



۱۰ کاشی تیره ۸ کاشی تیره ۶ کاشی تیره

۳ کاشی سفید ۲ کاشی سفید ۱ کاشی سفید

الف) شکل بعدی را رسم کنید و تعداد کاشی‌های تیرهٔ آن را مشخص کنید.

ب) تعداد کاشی‌های تیره در هر مرحله را به صورت یک دنباله تا جملهٔ هفتم آن بنویسید.

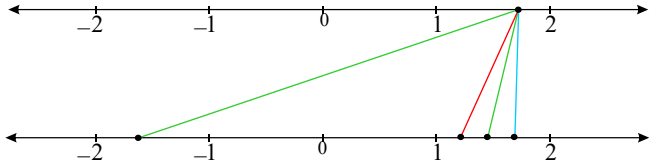
پ) اگر n تعداد کاشی‌های سفید و t_n تعداد کاشی‌های تیره باشد، مقدار t_n را برحسب n بنویسید.

ت) برای ۱۰۰ کاشی سفید، چند کاشی تیره لازم است؟

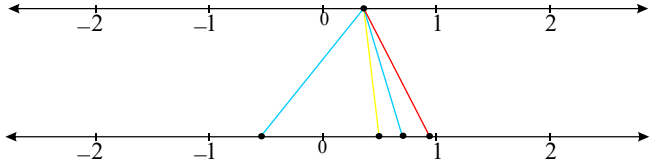
ث) آیا در این الگو شکلی وجود دارد که شامل ۵۰ کاشی تیره باشد؟ اگر هست، تعداد کاشی‌های سفید آن چندتاست؟

۱۴۶ در هر یک از شکل‌های زیر، نقطه‌ای از محور بالا به ریشه‌های سوم، چهارم و پنجم خود وصل شده است. مشخص کنید هر رنگ مربوط به کدام ریشه است.

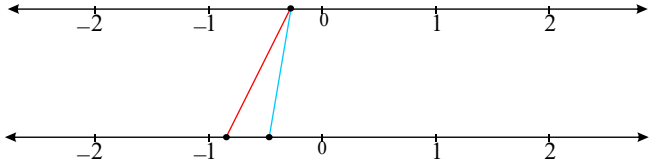
(الف)



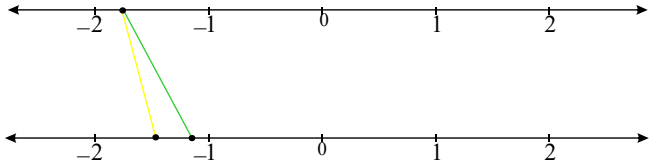
(ب)



(پ)



(ت)



۱۴۷ مقدار تقریبی هر کدام از اعداد رادیکالی زیر را با یک رقم اعشار مشخص کنید (می‌توانید از ماشین‌حساب استفاده کنید).

$\sqrt{۱۰}$ $\sqrt[۳]{۷/۲۵}$ $\sqrt[۵]{۱۶}$ $\sqrt[۵]{۶۴}$

۱۴۸ روی محیط دایره‌ای ۲۰ نقطه‌ی متمایز وجود دارد. از هر نقطه به نقاط دیگر وصل می‌کنیم. تعداد کل وترهای متمایز را به دست آورید.

۱۴۹ انواع متغیرهای کمّی را نام برده و هر یک را توضیح دهید.

۱۵۰ متغیرهای کیفی را تعریف کرده و مثال بزنید.

۱۵۱ متغیرهای کمّی را تعریف کرده و مثال بزنید.

۱۵۲ متغیر و مقدار متغیر را تعریف کرده و برای هر یک مثالی بزنید.

۱۵۳ درست یا نادرست بودن جملات زیر را تعیین کنید.

الف) اولین قدم در استفاده از علم آمار، جمع‌آوری داده‌هاست.

ب) پیش‌بینی و تصمیم‌گیری برای آینده، نتیجه‌ی استفاده از علم آمار است.

ج) علم آمار، همان اعداد و ارقام است.

۱۵۴ سکه‌ای را دو بار پرتاب می‌کنیم. اگر هر دو پرتاب مثل هم بود تاس می‌ریزیم و اگر مثل هم نبود یک بار دیگر سکه را پرتاب می‌کنیم. احتمال این‌که پرتاب‌ها یک در میان مثل هم باشند کدام است؟

۱۵۵ سکه‌ای را پرتاب می‌کنیم و سپس تاسی می‌ریزیم. مطلوبست احتمال آن‌که:

الف) تاس زوج بیاید.

ب) سکه رو بیاید.

ج) تاس فرد و سکّه پشت بیاید.

د) تاس فرد یا سکّه پشت بیاید.

۱۵۶ در یک کارخانه ۵ نوع کالای A, B, C, D, E تولید می‌شوند. می‌خواهیم برای آزمایش دو نوع از این پنج نوع کالا را به تصادف انتخاب کرده و آزمایش کنیم. مطلوبست احتمال آن‌که:

الف) A انتخاب شود.

ب) A, B انتخاب نشوند.

پ) C انتخاب شود ولی D انتخاب نشود.

۱۵۷ یک تاس را دو بار پرتاب می‌کنیم. احتمال اینکه عدد رو شده در پرتاب اول از عدد رو شده در پرتاب دوم کم‌تر باشد چه قدر است؟

۱۵۸ در پرتاب دو تاس با رنگ‌های قرمز و آبی به‌طور همزمان مطلوبست:

الف) تعداد اعضای فضای نمونه‌ای

ب) پیشامدهای زیر:

$A =$ پیشامد آن‌که هر دو تاس فرد بیایند

$B =$ پیشامد آن‌که تاس آبی زوج بیاید

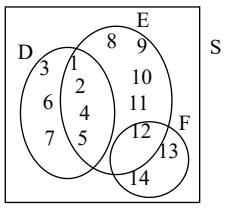
$C =$ پیشامد آن‌که مجموع دو تاس از ۶ بیش‌تر باشد

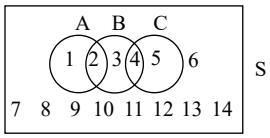
پ) پیشامدهای زیر:

$A - B$
$A \cap C$
$B \cup C$
$A' - B'$
$A' \cap C$

ت) تعیین ناسازگار بودن یا نبودن یکی از پیشامدهای قسمت ب و یک پیشامد دلخواه از قسمت ج با یکدیگر (برای مثال $A - B$ و A)

۱۵۹ اجتماع دو پیشامد ناسازگار در فضای نمونه‌ای S در شکل سمت راست، برابر با اشتراک کدام پیشامدها در فضای نمونه‌ای شکل سمت چپ است؟





۱۶۰ در کیسه‌ای ۵ مهره با شماره‌های ۱ تا ۵ داریم. پیشامد این‌که دو مهره بیرون بیاوریم و مجموع شماره‌ها فرد باشد را بنویسید.

۱۶۱ فضای نمونه‌ای و پیشامد را تعریف کنید.

۱۶۲ عبارت‌های زیر را تا حد امکان ساده کنید.

الف) $\frac{۲n}{n!} - \frac{۱}{(n-۱)!}$

ب) $\frac{۳}{۴!} + \frac{۵}{۵!}$

پ) $(n+۲)! - (n+۱)!$

ت) $\frac{۱}{۱۲}(۱۰! + ۱۱!)$

۱۶۳ درستی رابطه‌ی $P(n,r) = \binom{n}{r} \times r!$ را بررسی کنید.

۱۶۴ نمودار تابعی، یک سهمی است که از نقاط $(-۴, ۱)$ و $(-۳, ۲)$ می‌گذرد و محور yها را در نقطه‌ای به عرض -۳ قطع می‌کند. نمایش جبری این تابع را بیابید و با رسم آن، دامنه و بردش را معلوم کنید.

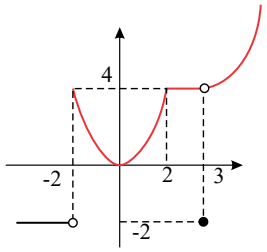
۱۶۵ نمودار تابع f به شکل زیر است؛ ضابطه‌ی این تابع را بنویسید و مقادیر خواسته شده را حساب کنید.

$f(۴)$

$f(-۳)$

$f(۳)$

$f(۱)$



۱۶۶ برای هر یک از موارد زیر، مثالی بنویسید و بیان کنید آیا نوشتن مثال دیگر امکان‌پذیر است یا خیر.

الف) یک تابع چند جمله‌ای درجه‌ی سوم

ب) یک تابع همانی با برد $\{۱, ۲, ۳, ۴\}$

ج) تابعی با دامنه و برد برابر به غیر از توابع همانی

د) یک تابع ثابت با دامنه‌ی ۵ عضوی (عضو صحیح)

۱۶۷ جاهای خالی را با کلمات مناسب پر کنید.

الف) توابعی را که نمایش جبری آنها، ..... هستند، توابع چند جمله‌ای می‌نامیم.

ب) اگر دامنه و برد یک تابع برابر باشند و هر عضو از دامنه‌ی تابع دقیقاً به همان عضو در برد نظیر شود، تابع را ..... می‌نامند و اگر دامنه را $\mathbb{R}$ در نظر بگیریم، نمایش جبری آن به صورت ..... خواهد بود.

ج) تابعی را که برد آن ..... است، تابع ثابت می‌نامیم و معمولاً این تابع را با معادله‌ی ..... نمایش می‌دهیم.

د) تابعی که ..... را به ..... نظیر می‌کند تابع قدر مطلق نامیده می‌شود و با $f(x) = |x|$ نمایش داده می‌شود.

۱۶۸ الف) دو تابع با دامنه و برد یکسان مثال بزنید که هیچ دو زوج مرتب مشترکی نداشته باشند.

ب) نمودار تابع با دامنه‌ی $(-۱, ۱]$ و برد $[-۳, ۰]$ رسم کنید. چه تعداد از این تابع می‌توان رسم کرد؟

۱۶۹ در یک مثلث متساوی‌الساقین، طول هر یک از دو ساق از قاعده‌ی مثلث ۳ واحد بیشتر است؛ رابطه‌ای که محیط این مثلث را برحسب تابعی از طول قاعده‌ی آن بیان می‌کند بنویسید.

۱۷۰ نامعادله‌ی زیر را حل کنید و جواب را به صورت بازه نشان دهید.

$$|x - ۱| < ۵x^۲$$

۱۷۱ نامعادله‌ی $\frac{x-۱}{x} > \frac{x+۱}{x+۲} > \frac{x+۳}{x+۴}$ را حل کنید.

۱۷۲ حدود a را طوری تعیین کنید که عبارت $y = ax^۲ + (a-۱)x - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲a}$ همواره منفی باشد.

۱۷۳ معادله‌ی درجه‌ی دوم را تعریف کنید.

۱۷۴ عبارت زیر را تا حد امکان ساده کنید.

الف) $\frac{x^۳ - ۲۷}{x^۲ - ۹}$ ب) $\frac{x^۲ + ۳x}{x^۲ - ۹}$

پ) $\frac{a^۳ - b^۳}{a^۲ - b^۲}$ ت) $\frac{(a+b)(a^۳ - b^۳)}{a^۴ - b^۴}$

۱۷۵ حاصل عبارت‌های زیر را با استفاده از اتحادها بدست آورید.

الف) $(۲x - \frac{y}{۲})^۳$ ب) $(۳ + ۲y)^۳$ پ) $(x+۲)(x^۲ - ۲x + ۴)$

ت) $(x - \frac{۱}{۲})(x^۲ + \frac{x}{۲} + \frac{۱}{۴})$ ث) $(x^۲ + ۲)(x^۴ + ۲x^۲ + ۴)(x^۲ - ۲)(x^۴ - ۲x^۲ + ۴)$

۱۷۶ حاصل $\sqrt{(\sqrt{۲} - ۱)\sqrt[۴]{۳ + ۲\sqrt{۲}}}$ را بدست آورید.

۱۷۷ تا حد ممکن اعداد زیر رادیکال را خارج کنید.

مثال: $\sqrt{۸}=\sqrt{۲\times ۴}=\sqrt{۲}\times\sqrt{۴}=۲\sqrt{۲}$

الف) $\sqrt{۳۲}$ ب) $\sqrt{۲۰}$ پ) $\sqrt{۳۷}$ ت) $\sqrt{۵۲}$

ث) $\sqrt{۷۲}$ ج) $\sqrt{۳۶}$ چ) $\sqrt{۴۴}$ ح) $\sqrt{۳۳}$

خ) $\sqrt{۲۴}$ د) $\sqrt{۱۲}$

۱۷۸ راجع به تساوی $\sqrt[n]{a^n}=(\sqrt[n]{a})^n$ باتوجه به مثبت یا منفی بودن a و زوج یا فرد بودن n چه می‌توان گفت و این تساوی چه مواقعی برقرار است؟

۱۷۹ جاهای خالی را با کلمات مناسب پر کنید.

الف) ..... $(n$ زوج$)$ $\sqrt[n]{a^n}=$

ب) ..... $(n$ فرد$)$ $\sqrt[n]{a^n}=$

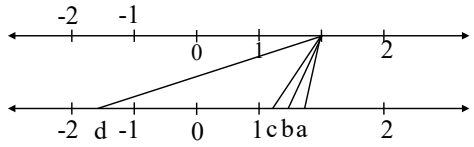
۱۸۰ جاهای خالی را پر کنید.

الف) اعداد ۴ و ..... ریشه‌های چهارم عدد ..... هستند.

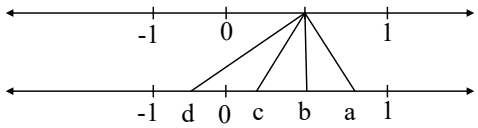
ب) اگر a ریشه‌ی مثبت چهارم عدد ۸۱ باشد، حاصل $a^۲-۷$ برابر است با ..... .

۱۸۱ در هر یک از اشکال زیر، نقطه‌ای از محور بالا به ریشه‌های سوم، چهارم و پنجم خود در محور پایین وصل شده است. مشخص کنید هر کدام از اعداد a و b و c و d مربوط به کدام ریشه است.

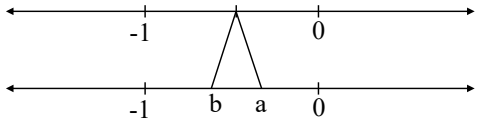
الف)



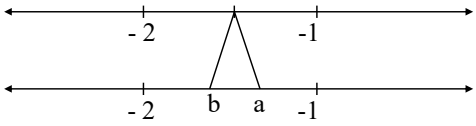
ب)



پ)



ت)



۱۸۲ مقدار تقریبی هر یک از اعداد زیر را با دو رقم اعشار مشخص کنید. (استفاده از ماشین‌حساب مجاز است)

الف) $\sqrt{۱۲}$ ب) $\sqrt[۳]{۱۲}$ پ) $\sqrt[۴]{۱۲}$ ت) $\sqrt[۵]{-۱۲}$

ث) $\sqrt[۳]{۲۵}$ ج) $\sqrt[۳]{-۲۷}$ چ) $\sqrt{۳۰}$

۱۸۳ پاسخ عبارت‌های زیر را بیابید (در صورت صحیح نبودن پاسخ، آن‌را به صورت دو عدد صحیح که پاسخ حقیقی بین آن دو است، بنویسید.)مثال :

عددی بین ۴ و ۵ $=\sqrt{۱۷}$ $\sqrt{۱۶}=۴$

الف) $\sqrt{۳۰}$ ب) $-\sqrt{۳۷}$ پ) $\sqrt{۸۵}$ ت) $\sqrt[۳]{۸}$

ث) $\sqrt[۳]{-۸}$ ج) $\sqrt[۳]{۳۰}$ چ) $\sqrt[۳]{-۲۷}$ ح) $\sqrt{۲۷}$

خ) $\sqrt[۴]{۲۵۶}$ د) $\sqrt{۲۵۶}$ ذ) $\sqrt[۳]{۱}$ ر) $\sqrt[۵]{-۱}$

ز) $\sqrt{۱}$ ژ) $\sqrt[۳]{-۱}$

۱۸۴ شهاب سنگی به صورت مایل در حال سقوط به سطح زمین است که با افق زاویه‌ی ۳۰° می‌سازد و در ارتفاع ۴۰ متری سطح زمین قرار دارد. تا زمانی که این شهاب سنگ با زمین برخورد کند، چند متر در راستای افق به سمت جلو حرکت کرده است؟

۱۸۵ درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

الف) اگر $\alpha+\beta=۹۰$ باشد آنگاه $\sin\alpha=\cos\beta$.

ب) در مثلث قائم‌الزاویه، ضلع روبه‌رو به زاویه‌ی ۳۰° نصف وتر است.

۱۸۶ جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. $(۰ < \alpha < ۹۰)$

الف) تنها زاویه α که $\sin$ و $\cos$ برابر دارد ..... است.

ب) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ، تانژانت زاویه‌ی ..... است.

پ) سینوس زاویه‌ی ..... برابر $\cos ۳۰^\circ$ است.

۱۸۷ درستی یا نادرستی گزاره زیر را با یک مثال نشان دهید.

"نسبت‌های مثلثاتی برای هر زاویه یکتاست."

۱۸۸ یک شرکت برای معرفی محصولات خود از این طرح استفاده می‌کند که هر یک از کارکنانش محصول مورد نظر را به ۲ نفر معرفی کنند و هر یک از آن دو به دو نفر دیگر و... اگر این شرکت ۲۰ نفر کارمند داشته باشد، در دهمین مرتبه اطلاع‌رسانی، چند نفر از محصولات این شرکت مطلع می‌شوند؟

۱۸۹ خطی یا غیر خطی بودن الگوهای زیر را مشخص کنید؟

الف) $۲, ۵, ۸, \cdots$ ب) $۴, ۱۰, ۱۸, ۲۸, \cdots$

۱۹۰ هر یک از بازه‌های ستون چپ، شامل یک یا چند تا از اعداد ستون راست هستند. هر عدد را به بازه‌ی مربوط به خود وصل کنید.

بازه‌ها	اعداد
$(-۳, ۲]$	۵
$(۱, +\infty)$	$\sqrt{۷}$
$[۰, ۲]$	۲٫۵
$(\frac{۱}{۲}, \frac{۳}{۲})$	$۶٫۰۲۲ \times ۱۰^{۲۳}$
$(-۲, \frac{۵}{۲})$	$-\frac{۲}{۳}$
$(-۱, ۱)$	$\sqrt{۲}$
$(-\infty, +\infty)$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$
	۱۰۰۰
	-۱۰۰۰
	$-\sqrt{۳}$
	$\frac{۱}{۲}$
	۰٫۷

۱۹۱ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

الف) $\frac{۳}{۵} \in [\frac{۱}{۳}, ۱)$ ب) $-۳ \in [-۱, ۳)$ پ) $۰ \in \{-۱, ۱\}$

ت) $۰ \in [-۱, ۱)$ ث) $[-۳, ۲) \subset (-۳, ۲]$ ج) $\varnothing \subset [۳, +\infty)$

چ) $\{۱, ۲\} \in [۱, ۲]$ ح) $\sqrt{۵} \in [-\sqrt{۵}, +\sqrt{۵})$ خ) $\frac{۱}{۲} \in (-۱, ۱)$

۱۹۲ درستی یا نادرستی هر یک از عبارت‌های زیر را تعیین کنید.

الف) $-۳٫۱۷$ در بازهٔ $[-۳ , ۲)$ قرار دارد.

ب) مقدار کسینوس کمان ۲۳۰° عددی منفی است.

پ) همیشه حاصل $C(n , ۱)$ معادل n است.

ت) فضای نمونه‌ای در پرتاب دو تاس با هم به صورت $n(S) = ۳۶$ است.

۱۹۳ متغیرهایی که قابل اندازه‌گیری نیستند، ..... هستند.

۱۹۴ ۴ جفت جوراب کنار هم در یک سبد قرار گرفته‌اند، ۲ لنگه از آن‌ها را به تصادف بیرون می‌آوریم. احتمال آن که ۲ لنگه به هم مربوط باشند، چه قدر است؟

۱۹۵ مجموعهٔ $\{۱ , ۲ , ۳ , ۴ , ۵\}$ را در نظر بگیرید:

الف. چند زیرمجموعه ۳ عضوی دارد؟

ب. چند زیرمجموعه ۳ عضوی شامل ۴ دارد؟

پ. چند زیرمجموعه ۳ عضوی شامل ۴ و ۵ دارد؟

۱۹۶ با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ : (بدون تکرار)

الف. چند رمز ۴ رقمی می‌توان ساخت؟

ب. چند کد تلفن بین شهری ۴ رقمی می‌توان ساخت؟

پ. چند عدد چهار رقمی می‌توان ساخت؟

۱۹۷ جواب دستگاه $\begin{cases} \frac{x}{۲}+\frac{۱}{۳}>\frac{x-۱}{۶} \\ \frac{x+۱}{۲}<\frac{x+۲}{۳} \end{cases}$ کدام است؟

۱) $۱<x<\frac{۳}{۲}$ ۲) $-\frac{۳}{۲}<x<۱$

۳) $-۱<x<\frac{۳}{۲}$ ۴) $-\frac{۳}{۲}<x<-۱$

۱۹۸ صورت و مخرج کسرهای زیر را تجزیه کرده و حاصل را تا حد امکان ساده کنید.

الف

$$\frac{x^۲-۵x+۶}{x^۲-۵x-۶}\times\frac{x^۲-۴x-۱۲}{x^۲-۷x+۱۲}\times\frac{x^۲-۴x}{x^۲-۴}=$$

ب

$$\frac{۴a+۱۲b}{۴a-۱۲b}\times\frac{۶a-۳b}{۵a+۱۵b}=$$

پ

$$\frac{x^۲+۷x+۱۲}{x^۲-۹}\div\frac{x^۲+۸x+۱۶}{۲x+۸}=$$

ت

$$\frac{۶x^۲y^۲+۴xy^۳}{۹x^۲-۴y^۲}\div\frac{۱۲x^۲y}{۹x^۲-۶xy}=$$

۱۹۹ درستی یا نادرستی هر یک از عبارت‌های زیر را تعیین کنید.

الف دامنهٔ تابع ثابت تک عضوی است.

ب تابع همانی هر عدد را به خودش نسبت می‌دهد.

پ دامنه و برد تابع قدرمطلق همواره برابر است.

ت نمودار سهمی‌ها همواره از هر ۴ ناحیه محورهای مختصات می‌گذرد.

ث دامنه تابع $f(x)=۲|x|-۱$ است $\mathbb{R}$.

ج برد تابع $g(x)=|x|+۳$، اعداد مثبت است.

۲۰۰ به موارد زیر پاسخ دهید.

الف اگر A و B و C پیشامدهایی از فضای نمونه‌ای S باشند، عبارت زیر را به صورت ریاضی نوشته و با نمودار ون نمایش دهید.

«A یا C رخ بدهند ولی B رخ ندهد.»

ب اعداد از ۱ تا ۱۲ را روی توپ‌هایی نوشته و درون جعبه‌ای قرار داده‌ایم، سپس دو توپ با هم از این جعبه خارج می‌کنیم، چه‌قدر احتمال دارد که حداقل یک توپ عدد اول باشد؟

پاسخ‌نامه تشریحی

۱ هر مداد ۳ حالت دارد:

$$\underline{۳},\underline{۳},\underline{۳},\underline{۳} = ۳^۴$$

۲

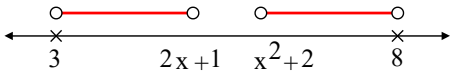
$$\sin^۲\theta + \cos^۲\theta = ۱ \rightarrow \cos^۲\theta = ۱ - \frac{۲۴}{۴۹} = \frac{۲۵}{۴۹}$$

$$\rightarrow \cos\theta = \pm\frac{۵}{۷}$$

از آن‌جا که θ در ربع دوم است، کسینوس آن منفی است؛ پس:

$$\cos\theta = -\frac{۵}{۷} \rightarrow \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{۲\sqrt{۶}}{۷}}{-\frac{۵}{۷}} = -\frac{۲\sqrt{۶}}{۵}$$

۳ باتوجه به شکل مشخص است برای تهی بودن اشتراک دو بازه، باید انتهای بازه سمت چپ، مقدار عددی کمتر از ابتدای بازه سمت راست روی محور داشته باشد.



بنابراین :

$$x^۲ + ۲ > ۲x + ۱ \Rightarrow x^۲ - ۲x + ۲ - ۱ > ۰$$
$$\Rightarrow x^۲ - ۲x + ۱ > ۰ \Rightarrow (x-۱)^۲ > ۰$$
$$\left.\begin{array}{l} ۲x + ۱ > ۳ \Rightarrow x > ۱ \\ ۸ > x^۲ + ۲ \Rightarrow x^۲ < ۶ \Rightarrow -۶ < x\sqrt{۶} \end{array}\right\} \Rightarrow ۱ < x < \sqrt{۶}$$

۴

$$a_۱ + a_۴ = ۵۶ \Rightarrow a + ar^۳ = ۵۶ \Rightarrow a(۱ + r^۳) = ۵۶$$
$$a_۲ + a_۳ = ۲۴ \Rightarrow ar + ar^۲ = ۲۴ \Rightarrow ar(۱ + r) = ۲۴$$
$$\frac{a(۱ + r^۳)}{ar(۱ + r)} = \frac{۵۶}{۲۴} \xrightarrow[\text{اتحاد تفاضل}]{\text{مکعبات}} \frac{\cancel{(۱ + r)}\,(۱ - r + r^۲)}{r\,\cancel{(۱ + r)}}$$
$$\Rightarrow ۳r^۲ - ۱۰r + ۳ = ۰ \xrightarrow{\text{حل معادلهٔ درجهٔ ۲}} r = ۳\ ,\ \frac{۱}{۳}$$

حالت اول: $r = \frac{۱}{۳} \Rightarrow a(\frac{۱}{۳})(\frac{۴}{۳}) = ۲۴ \Rightarrow a = ۵۴ \Rightarrow a_n = ۵۴(\frac{۱}{۳})^{n-۱}$

حالت دوم: $r = ۳ \Rightarrow a(۳)(۴) = ۲۴ \Rightarrow a = ۲ \Rightarrow a_n = ۲(۳)^{n-۱}$

۵

الف) $۷!$

ب) $P(۷,۴) = \frac{۷!}{۳!} = \frac{۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳!}{۳!} = ۸۴۰$

پ) سه حرف اول وضعشان مشخص شده است. پس باید جایگشت‌های ۳ حرف دیگر را محاسبه کنیم که حاصل برابر است با $P(۴,۳)$

ت) سه کلمه اول خودشان $۳!$ حالت دارند و برای سه حرف دیگر $P(۴,۳)$ حالت داریم و طبق اصل ضرب در مجموع $P(۴,۳) \times ۳!$ حالت داریم.

ث) حرف اول ۳ حالت دارد و برای ۵ حرف دیگر $P(۶,۵)$ حالت داریم و طبق اصل ضرب در مجموع $P(۶,۵) \times ۳$ حالت داریم.

ج) اگر کلمه با حرف "ی" شروع شود برای حرف آخر ۴ حالت و برای سه حرف میانی $P(۵,۳)$ حالت داریم. یعنی $۱ \times ۴ \times ۶۰$

حال فرض کنید حرف ابتدایی یکی از حروف "پ" یا "ن" باشد. در این صورت برای حرف آخر ۵ حالت و برای سه حرف میانی $P(۵,۳)$ حالت داریم، یعنی $۲ \times ۵ \times ۶۰$

پس در نتیجه داریم: $۱ \times ۴ \times ۶۰ + ۲ \times ۵ \times ۶۰ = ۸۴۰$

۶

$$\frac{۱}{x+۱} + \frac{x-۲}{x^۳+۱} = \frac{x^۲ - x + ۱ + x - ۲}{(x+۱)(x^۲ - x + ۱)} = \frac{x^۲ - ۱}{(x+۱)(x^۲ - x + ۱)}$$
$$= \frac{(x-۱)(x+۱)}{(x+۱)(x^۲ - x + ۱)} = \frac{(x-۱)}{(x^۲ - x + ۱)}$$

۷

$$|x| \geq a \rightarrow \begin{cases} x \geq a \\ x \leq -a \end{cases}$$

$[-\infty,-۲] \sim x \le -۲$ ، $[۳,+\infty) \sim x \ge ۳$

$$\left.\begin{array}{l} x \le -۲ \xrightarrow{-\frac{۱}{۲}} x-\frac{۱}{۲} \le \frac{-۴}{۲}-\frac{۱}{۲} \Rightarrow x-\frac{۱}{۲} \le \frac{-۵}{۲} \\ x \ge ۳ \xrightarrow{-\frac{۱}{۲}} x-\frac{۱}{۲} \ge \frac{۶}{۲}-\frac{۱}{۲} \Rightarrow x-\frac{۱}{۲} \ge \frac{۵}{۲} \end{array}\right\} \rightarrow \boxed{|x-\frac{۱}{۲}| \ge \frac{۵}{۲}}$$

۸ با نوشتن معادله‌ی سهمی و جایگذاری نقطه‌ها در آن داریم:

$$y=ax^۲+bx+c$$
$$\xrightarrow{(۰,۲)} ۲=a\times ۰+b\times ۰+c \Rightarrow \boxed{۲=c}$$
$$\xrightarrow{(۱,۲)} ۲=a+b+۲ \Rightarrow \boxed{a+b=۰} \Rightarrow \boxed{a=-b}$$
$$\text{خط تقارن } x=\frac{-b}{۲a} \xrightarrow{a=-b} x=\frac{-b}{۲(-b)}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow \boxed{x=\frac{۱}{۲}}$$

۹ الف) دقت کنید چون پاسخ به سؤالات، مرحله به مرحله است و هر کدام از سؤالات چهارگزینه‌ای، ۴ حالت دارد بنابر اصل ضرب داریم:

$$۴\times ۴\times ۴\times ۴\times ۴\times ۴\times ۴\times ۴\times ۴\times ۴=۴^{۱۰}$$

و برای سؤال‌های دو گزینه‌ای داریم:

$$۲\times ۲\times ۲\times ۲\times ۲=۲^۵$$

و چون به هر دو سری از سؤالات با هم جواب می‌دهد تعداد حالات کل برابر است با:

$$۴^{۱۰}\times ۲^۵$$

ب) اگر بتواند به هر سؤال پاسخ بدهد یا ندهد آن وقت برای سؤال‌های ۴ گزینه‌ای، ۵ حالت وجود دارد: یکی از ۴ گزینه یا اینکه اصلاً جواب ندهد و برای سؤال‌های ۲ گزینه‌ای هم ۳ حالت وجود دارد: یکی از دو گزینه یا جواب ندادن به سؤال پس داریم:

$$۵^{۱۰}\times ۳^۵$$

۱۰

$$\boxed{\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=(a^{\frac{۱}{m}})^{\frac{۱}{n}}=a^{\frac{۱}{mn}}=\sqrt[mn]{a}}$$

الف) $\sqrt[۲]{\sqrt[۳]{۲^۴}}=\sqrt{۲^{\frac{۴}{۳}}}=\left(۲^{\frac{۴}{۳}}\right)^{\frac{۱}{۲}}=۲^{\frac{۲}{۳}}=\sqrt[۳]{۲^۲}=\sqrt[۳]{۴}$

ب) $\sqrt{\sqrt{۲۵۶}}=\sqrt{\sqrt{۲^۸}}=\sqrt{۲^{\frac{۸}{۲}}}=\left(۲^{\frac{۸}{۲}}\right)^{\frac{۱}{۲}}=۲^{\frac{۸}{۴}}=۲^۲=۴$

ج) $\sqrt[۴]{\sqrt[۳]{۲۰۴۸}}=\sqrt[۴]{\sqrt[۳]{۲^{۱۱}}}=\sqrt[۴]{۲^{\frac{۱۱}{۳}}}=(۲^{\frac{۱۱}{۳}})^{\frac{۱}{۴}}=۲^{\frac{۱۱}{۱۲}}=\sqrt[۱۲]{۲^{۱۱}}$

راه دوم: تمام فرجه ها را در هم ضرب کرده و به صورت یک رادیکال می نویسیم: $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[mn]{a}$

الف) $\sqrt[۲]{\sqrt[۳]{۲^۴}}=\sqrt[۶]{۲^۴}=۲^{\frac{۴}{۶}}=۲^{\frac{۲}{۳}}=\sqrt[۳]{۲^۲}=\sqrt[۳]{۴}$

ب) $\sqrt{\sqrt{۲۵۶}}=\sqrt[۴]{۲۵۶}=\sqrt[۴]{۲^۸}=۲^{\frac{۸}{۴}}=۲^۲=۴$

ج) $\sqrt[۴]{\sqrt[۳]{۲۰۴۸}}=\sqrt[۱۲]{۲۰۴۸}=\sqrt[۱۲]{۲^{۱۱}}$

۱۱

الف) $R-[۰,۱)=(-\infty,۰)\cup[۱,+\infty)$

ب) $R-(-۱,۱)=(-\infty,-۱]\cup[۱,+\infty)$

۱۲ کلیه‌ی اعداد ۵ رقمی را منهای اعداد ۵ رقمی بدون تکرار می‌کنیم:

اعداد ۵ رقمی با تکرار ارقام $\underline{۵}\,\underline{۵}\,\underline{۵}\,\underline{۵}\,\underline{۵}=۵^۵$

اعداد ۵ رقمی بدون تکرار ارقام $\underline{۵}\,\underline{۴}\,\underline{۳}\,\underline{۲}\,\underline{۱}=۵\times ۴\times ۳\times ۲\times ۱=۱۲۰$

اعداد ۵ رقمی که در آن‌ها ارقام تکراری به چشم می‌خورد $=۵^۵-۱۲۰$

۱۳

اگر M مجموعه مرجع باشد متمم مجموعه ی A را به صورت $M - A$ تعریف می‌کنیم و با A' نشان می‌دهیم.

الف) $A' = \{b, c, d\}$

ب) $B' = \{a, d, e\}$

پ) $A \cap B' = \{a, e\} \cap \{a, d, e\} = \{a, e\}$

ت) $A' \cup B = \{b, c, d\} \cup \{b, c\} = \{b, c, d\}$

ث) $A - B' = \{a, e\} - \{a, d, e\} = \varnothing$

۱۴ از ترکیب هر ۲ رنگ، هر ۳ رنگ و هر ۴ چهار رنگ، رنگ‌های جدید به وجود می‌آید. بنابراین داریم:

$$\binom{۴}{۲} + \binom{۴}{۳} + \binom{۴}{۴} = \frac{۴!}{۲!\,۲!} + \frac{۴!}{۳!\,۱!} + \frac{۴!}{۴!\,۰!} = ۶ + ۴ + ۱ = ۱۱$$

۱۱ رنگ از ترکیب ۴ رنگ اصلی بوجود می‌آید.

مجموع رنگ‌ها:

۱۵ رنگ = ۴ رنگ اصلی + ۱۱ رنگ ترکیبی

دقت کنید زمانی که نقاشی کشیده می‌شوند؛ خود رنگ‌های ترکیبی و اصلی دوباره با یکدیگر ترکیب می‌شوند و رنگ‌های جدیدتری بوجود می‌آیند.

پس در عمل، تعداد رنگ‌ها بیش‌تر از ۱۵ رنگ است.

۱۵ $n!$ (n فاکتوریل)

$$۱ \times ۲ \times ۳ \times ۴ \times \cdots \times n = n!$$

۱۶ چون انتخاب پیراهن و شلوار هر دو برای مهمانی لازم است؛ پس طبق اصل ضرب داریم

کل انتخاب‌های ممکن ۶ = ۲ (شلوار) × ۳ (پیراهن)

۱۷ برای اینکه یک رابطه که به صورت زوج مرتب نوشته شده است تابع باشد، باید مؤلفه‌های اول یکسان، مؤلفه‌های دوم یکسان نیز داشته باشند، در واقع زوج مرتب تکراری باشد پس:

الف) $\begin{cases} (۳, ۲a - b) \\ (\frac{۶}{۲}, ۲a + b) \end{cases} \Rightarrow ۲a - b = ۲a + b \Rightarrow b = ۰ \quad \begin{cases} (۲, ۳) \\ (\frac{۲}{۱}, \frac{۳}{a}) \end{cases} \Rightarrow \frac{۳}{a} = ۳ \Rightarrow a = ۱$

ب) $\begin{cases} (b, a) \\ (b, ۲a - b) \end{cases} \Rightarrow a = ۲a - b \Rightarrow a = b \;\; (I) \quad \begin{cases} (a, a) \\ (a, ۲b) \end{cases} \Rightarrow a = ۲b \Rightarrow a = b = ۲b \;\; (II)$

$$\xrightarrow{I, II} a = b = ۲b \Rightarrow \begin{matrix} a = ۰ \\ b = ۰ \end{matrix}$$

۱۸

$$AB = ۰ \rightarrow A = ۰ \text{ یا } B = ۰ \text{ یا } A, B = ۰$$

۱۹

$$\frac{(۱ + \tan^۲\alpha)(\cos^۲\alpha)}{\cot\alpha} = \frac{\frac{۱}{\cos^۲\alpha} \times \cos^۲\alpha}{\cot\alpha} = \frac{\frac{۱}{۱}}{\cot\alpha} = \frac{۱}{\cot\alpha} = \tan\alpha$$

۲۰ برای نوشتن معادله‌ی خط، یکی از راه‌ها در دست داشتن شیب خط و یک نقطه از خط است :

$A = \begin{vmatrix} ۲ \\ ۳ \end{vmatrix}$ و شیب $= m = \tan ۴۵ = ۱$

$$y = mx + b$$

$$\xrightarrow{m=۱} y = x + b \xrightarrow{\begin{vmatrix} ۲ \\ ۳ \end{vmatrix}} ۳ = ۲ + b \Rightarrow b = ۱ \rightarrow y = x + ۱$$

$$y \xrightarrow{x=۳} ۴ + ۱ = ۵ \qquad (۴, ۵)$$

۲۱

$$-۱ \le \sin\theta \le ۱$$

$$\underline{-۱ \le \cos\alpha \le ۱}$$

$$-۲ \le \sin\theta + \cos\alpha \le ۲ \Rightarrow \begin{cases} a = -۲ \\ b = ۲ \end{cases} \Rightarrow ۳a - ۵b = -۶ - ۱۰ = -۱۶$$

۲۲

جمله ی عمومی دنباله ی حسابی

$a_n = a_۱ + (n - ۱)d$

$a_۱$: جمله ی اول دنباله ، d : قدر نسبت

$$a_۱ = \frac{a_۳}{۲} = \frac{a_۱ + ۲d}{۲} \rightarrow ۲a_۱ = a_۱ + ۲d \Rightarrow a_۱ = ۲d$$

$$a_{۱۵} = a_۱ + ۱۴d = ۲d + ۱۴d = ۱۶d$$

جمله پانزدهم، ۱۶ برابر قدر نسبت دنباله است.

۲۳ جمله ی عمومی دنباله الگوی خطی به فرم $an + b$ می باشد

$$\begin{cases} a_۳ = ۳a + b = ۸ \\ a_۷ = ۷a + b = ۲۸ \end{cases}$$

$$۴a = ۲۰ \Rightarrow a = ۵$$

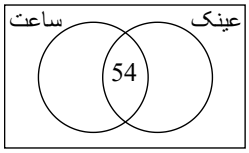
$$۳ \times ۵ + b = ۸ \Rightarrow ۱۵ + b = ۸ \Rightarrow b = -۷$$

$$a_n = ۵n - ۷$$

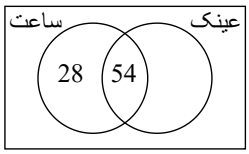
$$\Rightarrow ۵n - ۷ = ۵۳ \Rightarrow ۵n = ۶۰ \Rightarrow n = ۱۲$$ دوازدهمین جمله

۲۴

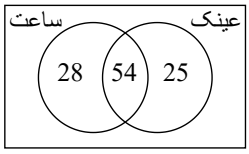
باتوجه به نمودار ون:



۸۲ نفر ساعت دارند که ۵۴ نفرشان عینک هم می‌زنند و $۸۲ - ۵۴ = ۲۸$ نفر فقط ساعت دارند.

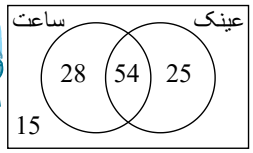


۷۹ نفر عینک می‌زنند که ۵۴ نفرشان ساعت هم دارند و $۷۹ - ۵۴ = ۲۵$ نفر فقط عینک می‌زنند.

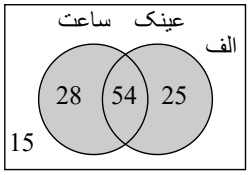


$۲۸ + ۵۴ + ۲۵ = ۱۰۷$

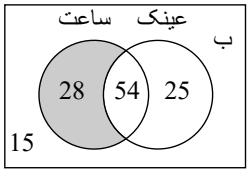
مجموع کسانی که ساعت، عینک یا هر دو را دارند ۱۰۷ نفر است که از ۱۲۲ نفر ۱۵ نفر باقی می‌مانند که نه ساعت دارند نه عینک می زنند.



الف) $۲۸ + ۵۴ + ۲۵ = ۱۰۷$ حداقل یکی یعنی یا ساعت یا عینک یا هر دو

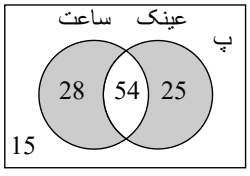


ب) ۲۸

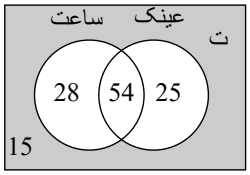


پ) $۲۸ + ۲۵ = ۵۳$

دقیقاً یکی از دو مورد یعنی یا ساعت یا عینک فقط یک کدام (نه هر دو)

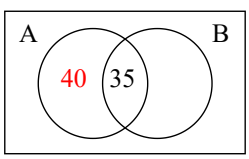


ت) ۱۵ نفر

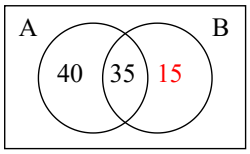


۲۵ باتوجه به نمودار ون داریم:

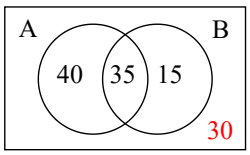
۱- از آنجا که $n(A) = ۷۵$ است و $n(A \cap B) = ۳۵$ نتیجه می‌گیریم که A، ۴۰ عضو دارد که در $(A \cap B)$ نیست.



۲- با استدلال مشابه برای B داریم:

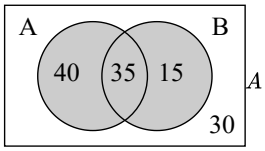


۳- از $n(u) = ۱۲۰$ و $۴۰ + ۳۵ + ۱۵ = ۹۰$ نتیجه می‌گیریم ۳۰ عضو مجموعه‌ی مرجع در هیچ یک از مجموعه های A و B یا اکثرشان نیستند.

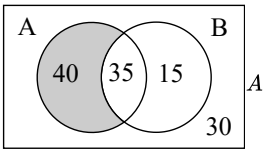


با توجه به نمودار ون:

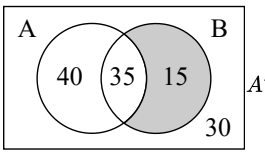
الف) $A \cup B$



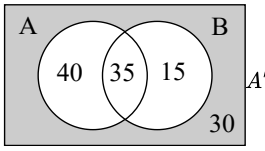
ب) $A \cap B'$



پ) $A' \cap B$



ت) $A' \cap B'$



الف) $n(A \cup B) = ۹۰$

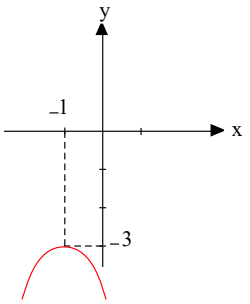
ب) $n(A \cap B') = ۴۰$

پ) $n(A' \cap B) = ۱۵$

ت) $n(A' \cap B') = ۳۰$

۲۶

$-x^۲$ را ۱ واحد به سمت چپ و ۳ واحد به سمت پایین می‌بریم.



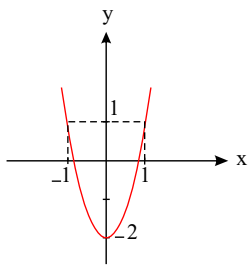
الف) $y = -(x+۱)^۲ - ۳$

ب) $y = ۳x^۲ - ۲$

$\xrightarrow{x=۰} y = -۲ \Rightarrow (۰, -۲)$

$\xrightarrow{x=۱} y = ۳(۱)^۲ - ۲ = ۳ - ۲ = ۱ \Rightarrow (۱, ۱)$

$\xrightarrow{x=-۱} y = ۳(-۱)^۲ - ۲ = ۳ - ۲ = ۱ \Rightarrow (-۱, ۱)$

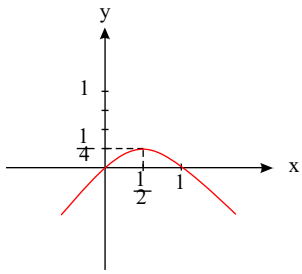


پ) $y = x - x^۲ \Rightarrow y = -x^۲ + x$

$\xrightarrow{x=0} y=0 \Rightarrow (0,0)$

$\xrightarrow{x=1} y=-1^2+1=-1+1=0 \Rightarrow (1,0)$

$\xrightarrow{x=\frac{1}{2}} y=-(\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}=\frac{-1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{1}{4} \Rightarrow (\frac{1}{2},\frac{1}{4})$

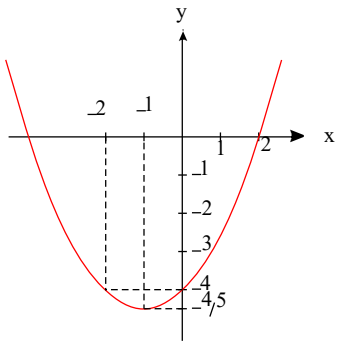


ت) $y=\frac{x^2}{2}+x-4$

$\xrightarrow{x=0} y=-4 \Rightarrow (0,-4)$

$\xrightarrow{x=-1} y=\frac{(-1)^2}{2}+(-1)-4=\frac{1}{2}-1-4=\frac{1}{2}-5=\frac{-9}{2}$

$\xrightarrow{x=-2} y=\frac{(-2)^2}{2}+(-2)-4=2-2-4=-4 \Rightarrow (-2,-4)$



۲۷

$(2x+15)(2x+10)=300 \Rightarrow 4x^2+50x+150=300 \Rightarrow 4x^2+50x-150=0$

$2x^2+25x-75=0 \Rightarrow \Delta=(25)^2-4(2)(-75)=625+600=1225 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=35$

$x=\frac{-25\pm35}{2(2)} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{-25-35}{4}=\frac{-60}{4} \\ x=\frac{-25+35}{4}=\frac{10}{4}=2/5 \end{cases}$ غ‌ق‌ق (طول مثبت است)

$x=2/5 \Rightarrow \begin{cases} 2x+15=20 \\ 2x+10=15 \end{cases}$

۲۸ اگر عدد فرد اول را x بنامیم، داریم:

$x^2+(x+2)^2=290 \Rightarrow x^2+x^2+4x+4=290$

$\Rightarrow 2x^2+4x-286=0 \Rightarrow x^2+2x-143=0 \Rightarrow (x+13)(x-11)=0$

$\Rightarrow \begin{cases} x-11=0 \Rightarrow x=11 \\ x+13=0 \Rightarrow x=-13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=11\ ,\ x+2=13 \\ x=-13\ ,\ x+2=-11 \end{cases}$

۲۹ می‌دانیم:

$$\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\ ,\ \tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\ ,\ \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

$$\text{ربع اول}\begin{cases}\sin\alpha>0\\ \cos\alpha>0\end{cases}\quad \text{ربع دوم}\begin{cases}\sin\alpha>0\\ \cos\alpha<0\end{cases}\quad \text{ربع سوم}\begin{cases}\sin\alpha<0\\ \cos\alpha<0\end{cases}\quad \alpha\ \text{ربع چهارم}\begin{cases}\sin\alpha<0\\ \cos\alpha>0\end{cases}$$

الف) $\cos\alpha=\frac{3}{7}$

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \Rightarrow \sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha \Rightarrow \sin\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$

$\sin\alpha=\pm\sqrt{1-(\frac{3}{7})^2}=\pm\sqrt{1-\frac{9}{49}}=\pm\sqrt{\frac{40}{49}} \xrightarrow[\sin\alpha<0]{\alpha\ \text{ربع چهارم}} \sin\alpha=\frac{-\sqrt{40}}{7}$

$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{-\sqrt{40}}{7}}{\frac{3}{7}}=\frac{-\sqrt{40}}{3}$

$\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\frac{3}{7}}{\frac{-\sqrt{40}}{7}}=\frac{-3}{\sqrt{40}}=\frac{-3\sqrt{40}}{40}$

ب) $\sin\beta = \frac{-۱}{۲}$

$$\sin^۲\beta + \cos^۲\beta = ۱ \Rightarrow \cos^۲\beta = ۱ - \sin^۲\beta \Rightarrow \cos\beta = \pm\sqrt{۱ - \sin^۲\beta}$$

$$\cos\beta = \pm\sqrt{۱ - (-\frac{۱}{۲})^۲} = \pm\sqrt{۱ - \frac{۱}{۴}} = \pm\sqrt{\frac{۳}{۴}} \xrightarrow[\cos\beta<۰]{\beta \text{ ربع سوم}} \cos\beta = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\tan\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{-\frac{۱}{۲}}{-\frac{\sqrt{۳}}{۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\cot\beta = \frac{\cot\beta}{\sin\beta} = \frac{-\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{-\frac{۱}{۲}} = \sqrt{۳}$$

۳۰ برای این‌که دو حرف ل و ی کنار هم باشند آن‌ها را یک حرف در نظر می‌گیریم:

جایگشت م، و، ب، ا، $\boxed{\text{ی , ل}}$ $= ۵!$

خود $\boxed{\text{ی , ل}}$ نیز $۲!$ حالت دارند که بنابر اصل ضرب در مجموع داریم:

$$۵! \times ۲!$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۵! \times ۲!}{۶!} = \frac{۱}{۳}$$

۳۱ برای این‌که کتاب ریاضی در بین کتاب‌ها نباشد، باید ۳ کتاب از بین ۴ کتاب باقی‌مانده انتخاب شوند.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{۴}{۳}}{\binom{۵}{۳}} = \frac{\frac{۴!}{۳!۱!}}{\frac{۵!}{۳!۲!}} = \frac{۴}{۱۰} = ۴۰\%$$

۳۲ الف)

$$\binom{۵}{۳} = \frac{۵!}{۳!\,۲!} = ۱۰$$

ب) a وقتی نباشد، باید ۳ عضو از ۴ عضو باقیمانده انتخاب کنیم.

$$\binom{۴}{۳} = \frac{۴!}{۳!\,۱!} = ۴$$

پ) وقتی a باشد، باید ۲ عضو از ۴ عضو دیگر انتخاب کنیم:

$$\binom{۴}{۲} = \frac{۴!}{۲!\,۲!} = ۶$$

ت) c در آن‌ها نیست پس از مابین ۴ عضو دیگر باید ۳ عضو انتخاب کنیم.

a در آن‌ها هست پس از بین ۳ عضو دیگر باید ۲ عضو انتخاب کنیم:

$$\binom{۳}{۲} = \frac{۳!}{۲!\,۱!} = ۳$$

۳۳ اگر نمایش جبری تابع داده شده باشد، ولی دامنه‌ی آن مشخص نباشد، معمولاً دامنه را، بزرگترین مجموعه‌ی ممکن در نظر می‌گیریم. بعنوان مثال در تابع $f(x) = x^۲$، دامنه را مجموعه ی اعداد حقیقی در نظر می گیریم. در غیر این صورت باید دامنه را به طور دقیق مشخص کنیم.

باتوجه به نکته‌ی فوق نمایش الف برای تابع درست است.

دقت کنید که تمام نمایش‌های فوق در دامنه‌های خاصی از مجموعه اعداد حقیقی برای $f(x) = x^۲$ صحیح هستند اما از آنجا که دامنه مشخص نشده طبق نکته، نمایش الف درست است.

۳۴ بله؛ دقت کنید که شرط تابع بودن این است که به ازای هر ورودی فقط و فقط یک خروجی داشته باشیم که در این تابع رعایت شده است و تابع است.

دقت کنید اگر نتوانیم ضابطه‌ای برای تابعی بدست آوریم، به منزله‌ی تابع نبودن آن نیست.

۳۵ هر چهار موردصحیح هستند و به صورت کلی داریم: $\boxed{x^۲ = a \to x = \pm\sqrt{a}}$

اگر a یک عدد نامنفی (بزرگتر مساوی صفر) باشد ریشه‌های معادله $x^۲ = a$ باشد عبارتست از $\sqrt{a}$ و $-\sqrt{a}$

۳۶

الف) $x^۲ - x = ۰ \Rightarrow x(x-۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x - ۱ = ۰ \Rightarrow x = ۱ \end{cases}$

ب) $x^۲ - ۱۶ = ۰ \Rightarrow (x-۴)(x+۴) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x - ۴ = ۰ \Rightarrow x = ۴ \\ x + ۴ = ۰ \Rightarrow x = -۴ \end{cases}$

پ) $x^۲ + ۴x - ۲۱ = ۰ \Rightarrow (x+۷)(x-۳) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x + ۷ = ۰ \Rightarrow x = -۷ \\ x - ۳ = ۰ \Rightarrow x = ۳ \end{cases}$

ت) $x^۲ - ۴x + ۴ = ۰ \Rightarrow (x-۲)^۲ = ۰ \Rightarrow x - ۲ = ۰ \Rightarrow x = ۲$

۳۷

$a^۲ - ۶a = -۱ \Rightarrow a^۲ + ۱ = ۶a \Rightarrow \frac{a^۲ + ۱}{a} = ۶$

$\Rightarrow \frac{a^۲}{a} + \frac{۱}{a} = ۶ \Rightarrow a + \frac{۱}{a} = ۶$

$\frac{a+۱}{\sqrt{a}} \times \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{(a+۱)\sqrt{a}}{a} = \frac{a\sqrt{a} + \sqrt{a}}{a} = \frac{a\sqrt{a}}{a} + \frac{\sqrt{a}}{a} = \sqrt{a} + \frac{\sqrt{a}}{a}$

$\xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم}} a + \frac{a}{a^۲} + \frac{۲\sqrt{a}\sqrt{a}}{a} = a + \frac{۱}{a} + \frac{۲a}{a} = a + \frac{۱}{a} + ۲$

$\xrightarrow{a+\frac{۱}{a}=۶} ۶ + ۲ = ۸ \xrightarrow{\text{رادیکال}} \frac{a+۱}{\sqrt{a}} = \sqrt{۸} = ۲\sqrt{۲}$

۳۸

n زوج	$\sqrt[n]{a^n} = \lvert a \rvert$
n فرد	$\sqrt[n]{a^n} = a$

$\sqrt{a^۲} + \sqrt{a^۲ + ۱ - ۲a} + \sqrt{a^۲ + ۴ - ۴a}$

$= \sqrt{a^۲} + \sqrt{(a-۱)^۲} + \sqrt{(a-۲)^۲} = \lvert a \rvert + \lvert a-۱ \rvert + \lvert a-۲ \rvert$

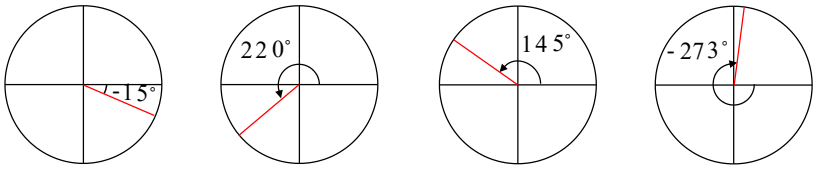
$\xrightarrow[a-۲<۰]{-۱<a<۰} -a - (a-۱) - (a-۲) = -a - a + ۱ - a + ۲$

$= -۳a + ۳ = ۳(-a+۱) = ۳(۱-a)$

۳۹

$(\frac{۱}{\cos\alpha} + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha})(۱ - \sin\alpha) = \frac{(۱+\sin\alpha)}{\cos\alpha}(۱ - \sin\alpha) = \frac{۱ - \sin^۲\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\cos^۲\alpha}{\cos\alpha} = \cos\alpha$

۴۰



ربع‌چهارم ربع سوم ربع دوم ربع اول

۴۱

جمله ی عمومی دنباله الگوی خطی به فرم $a_x + b$ می باشد

$t_n = an + b \rightarrow \begin{cases} ۵a + b = ۲۳ \\ ۷a + b = ۳۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -۵a - b = -۲۳ \\ ۷a + b = ۳۱ \end{cases}$

$۲a = ۸ \Rightarrow a = ۴$

$۷a + b = ۳۱ \Rightarrow ۷ \times ۴ + b = ۳۱ \Rightarrow ۲۸ + b = ۳۱ \Rightarrow b = ۳$

جمله عمومی $a_n = ۴n + ۳$

۴۲

$y = ax^۲ + bx + c$

$\xrightarrow{(۰,۱)} ۱ = c$

$\xrightarrow{(۱,-۲)} \begin{cases} -۲ = a + b + ۱ \\ -۳ = ۴a + ۲b + ۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -۶ = ۲a + ۲b \\ -۴ = ۴a + ۲b \end{cases}$

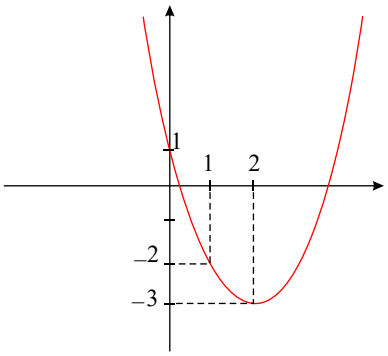
$۲ = ۲a \Rightarrow a = ۱$

$۲a + ۲b = -۶ \xrightarrow{a=۱} ۲ + ۲b = -۶ \Rightarrow ۲b = -۸ \Rightarrow b = -۴$

$$y = x^۲ - ۴x + ۱$$

$$D = \mathbb{R}$$

$$R = [-۳, +\infty)$$



۴۳

اگر سن برادر کوچکتر را x فرض کنیم، داریم:

$$(x+۴)(x+۴+۴) = ۶۰$$

$$(x+۴)(x+۸) = ۶۰ \Rightarrow x^۲ + ۱۲x + ۳۲ = ۶۰ \Rightarrow x^۲ + ۱۲x - ۲۸ = ۰$$

$$\Rightarrow (x+۱۴)(x-۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x + ۱۴ = ۰ \Rightarrow x = -۱۴ & \text{غ ق ق (سن مثبت است)} \\ x - ۲ = ۰ \Rightarrow x = ۲ \Rightarrow x + ۴ = ۶ \end{cases}$$

۴۴

$$۱) ۲x^۲ = ۲۵۰ \Rightarrow x^۲ = ۱۲۵ \Rightarrow x = \pm\sqrt{۱۲۵}$$

$$۲) ۹ - ۶z + z^۲ = ۰ \Rightarrow z^۲ - ۶z + ۹ = ۰ \Rightarrow (z-۳)^۲ = ۰ \Rightarrow z - ۳ = ۰ \Rightarrow z = ۳$$

$$۳) ۴a^۲ + ۳a = ۱ \Rightarrow ۴a^۲ + ۳a - ۱ = ۰ \Rightarrow \Delta = ۹ - ۴(۴)(-۱) = ۹ + ۱۶ = ۲۵ \Rightarrow \sqrt{\Delta} = ۵$$

$$a = \frac{-۳ \pm ۵}{۲ \times ۴} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{-۳+۵}{۸} = \frac{۲}{۸} = \frac{۱}{۴} \\ a = \frac{-۳-۵}{۸} = \frac{-۸}{۸} = -۱ \end{cases}$$

$$۴) b^۲ + \sqrt{۲}b - ۴ = ۰ \Rightarrow \Delta = (\sqrt{۲})^۲ - ۴(۱)(-۴) = ۲ + ۱۶ = ۱۸ \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{۱۸}$$

$$b = \frac{-\sqrt{۲} \pm \sqrt{۱۸}}{۲(۱)} = \frac{-\sqrt{۲} \pm ۳\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{-\sqrt{۲}+۳\sqrt{۲}}{۲} = \frac{۲\sqrt{۲}}{۲} = \sqrt{۲} \\ b = \frac{-\sqrt{۲}-۳\sqrt{۲}}{۲} = \frac{-۴\sqrt{۲}}{۲} = -۲\sqrt{۲} \end{cases}$$

۴۵ **می‌دانیم:** ریشه‌های معادلهٔ $ax^۲ + bx + c = ۰$ برابر است با $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{۲a}$

می‌دانیم: ریشه‌های معادلهٔ $ax^۲ + bx + c = ۰$ برابر است با $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{۲a}$

$$۱) ۴x^۲ - ۱۳x + ۳ = ۰ \Rightarrow \Delta = (-۱۳)^۲ - ۴(۴)(۳) = ۱۶۹ - ۴۸ = ۱۲۱ \Rightarrow \sqrt{\Delta} = ۱۱$$

$$x = \frac{-(-۱۳) \pm ۱۱}{۲(۴)} = \frac{۱۳ \pm ۱۱}{۸} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{۱۳+۱۱}{۸} = \frac{۲۴}{۸} = ۳ \\ x = \frac{۱۳-۱۱}{۸} = \frac{۲}{۸} = \frac{۱}{۴} \end{cases}$$

$$۲) r - r^۲ = ۳ \Rightarrow -r^۲ + r - ۳ = ۰ \Rightarrow \Delta = ۱ - ۴(-۱)(-۳) = ۱ - ۱۲ = -۱۱ < ۰$$ **ریشه ندارد**

$$۳) a^۲ + ۲\sqrt{۳}a = ۹ \Rightarrow a^۲ + ۲\sqrt{۳}a - ۹ = ۰ \Rightarrow \Delta = (۲\sqrt{۳})^۲ - ۴(۱)(-۹)$$

$$= ۱۲ + ۳۶ = ۴۸ \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{۴۸}$$

$$a = \frac{-۲\sqrt{۳} \pm \sqrt{۴۸}}{۲(۱)} \Rightarrow a = \frac{-۲\sqrt{۳} \pm ۴\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{-۲\sqrt{۳}+۴\sqrt{۳}}{۲} = \frac{۲\sqrt{۳}}{۲} = \sqrt{۳} \\ a = \frac{-۲\sqrt{۳}-۴\sqrt{۳}}{۲} = \frac{-۶\sqrt{۳}}{۲} = -۳\sqrt{۳} \end{cases}$$

۴) $\frac{t^۲}{۳}-\frac{t}{۲}-\frac{۳}{۲}=۰ \Rightarrow \Delta=(-\frac{۱}{۲})^{۲}-۴(\frac{۱}{۳})(-\frac{۳}{۲})=\frac{۱}{۴}+۲=\frac{۹}{۴} \Rightarrow \sqrt{\Delta}=\frac{۳}{۲}$

$$t=\frac{-(-\frac{۱}{۲})\pm\frac{۳}{۲}}{۲(\frac{۱}{۳})}=\frac{\frac{۱}{۲}\pm\frac{۳}{۲}}{\frac{۲}{۳}} \Rightarrow \begin{cases} t=\frac{\frac{۱}{۲}+\frac{۳}{۲}}{\frac{۲}{۳}}=\frac{۲}{\frac{۲}{۳}}=۳ \\ t=\frac{\frac{۱}{۲}-\frac{۳}{۲}}{\frac{۲}{۳}}=\frac{-۱}{\frac{۲}{۳}}=-\frac{۳}{۲} \end{cases}$$

۴۶ الف) ۳ ماده از ۱۰ ماده باید انتخاب شود:

$$\binom{۱۰}{۳}=\frac{۱۰!}{۷!\,۳!}=\frac{۱۰\times۹\times۸\times۷!}{۷!\times۳\times۲}=\frac{۱۰\times۹\times۸}{۳\times۲}=۱۲۰$$

ب) یا یکی از این دو ماده و ۲ ماده از هشت تای دیگر انتخاب می‌کنیم یا در کل سه ماده را از هشت ماده دیگر انتخاب می‌کنیم:

$$\binom{۲}{۱}\binom{۸}{۲}+\binom{۸}{۳}=۲\times\frac{۸!}{۶!\,۲!}+\frac{۸!}{۵!\,۳!}=۲\times۲۸+۵۶=۵۶+۵۶=۱۱۲$$

پ) یا یک ماده از این سه ماده و دو ماده از هفت ماده‌ی دیگر انتخاب می‌کنیم.

یا دو ماده از این سه ماده و یک ماده از هفت ماده‌ی دیگر انتخاب می‌کنیم.

یا هر سه را از هفت ماده‌ی دیگر انتخاب می‌کنیم.

$$\binom{۳}{۱}\binom{۷}{۲}+\binom{۳}{۲}\binom{۷}{۱}+\binom{۷}{۳}=۳\times\frac{۷!}{۵!\,۲!}+\frac{۳!}{۲!\,۱!}\times۷+\frac{۷!}{۴!\,۳!}=۶۳+۲۱+۳۵=۱۱۹$$

ت) سه ماده را یا از دسته‌ی اول انتخاب می‌کنیم یا از دسته‌ی دوم:

$$\binom{۴}{۳}+\binom{۶}{۳}=\frac{۴!}{۳!\,۱!}+\frac{۶!}{۳!\,۳!}=۴+۲۰=۲۴$$

۴۷ نداشته، ترکیب r تایی از n شئ متمایز، $C(n,r)$، $\binom{n}{r}$، $\binom{n}{r}=\frac{n!}{(n-r)!\,r!}$، $۰\le r\le n$،

۴۸ الف) تعداد جایگشت‌های ۶ شئ متمایز که برابر است با $۶!$

ب) حرف آخر مشخص است می‌ماند ۵ حرف دیگر که به $۵!$ حالت می‌توان آن‌ها را نوشت.

پ) «ش و د» را یک حرف تصور می‌کنیم و در کل $۵!$ حالت داریم چون جابه‌جایی خود «ش» و «د» هم حالت‌های جدید به وجود می‌آورد پس جواب نهایی به صورت $۵!\times۲$ خواهد بود.

ت) سه حرف آخر مشخص است؛ پس باید ۲ حرف از ۳ حرف باقیمانده را انتخاب کنیم و کنار هم بچینیم که برابر است با $P(۳,۲)=\frac{۳!}{۱!}=۶$

ث) حرف اول ۳ حالت دارد و برای باقی حروف $۵!$ حالت وجود دارد پس در کل $۳\times۵!$ حالت داریم.

ج) حروف کلمه‌ی «هادی» را یک حرف درنظر می‌گیریم که در کل $۳!$ حالت داریم، خود حروف کلمه‌ی «هادی» به $۴!$ حالت کنار هم قرار می‌گیرند پس در کل داریم: $۳!\times۴!$

چ) برای این‌که با یک حرف بدون نقطه شروع شود، ۳ انتخاب داریم «هـ، د، ا» پس حرف اول ۳ حالت دارد و برای الباقی حروف $۵!$ حالت داریم پس در کل داریم: $۳\times۵!$

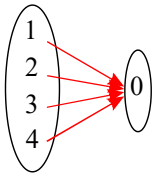
ح) تعداد جایگشت‌های ۴ تایی از ۶ حرف متمایز: $P(۶,۴)=\frac{۶!}{۲!}=۳۶۰$

۴۹ الف) $n!$

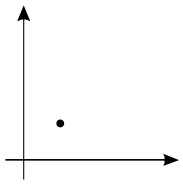
ب) $P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}$, $P(n,r)$

۵۰ الف) $\{(۱,۲)(۲,۳)(۳,۴)\}$

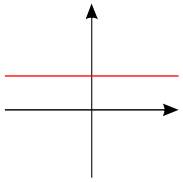
ب)



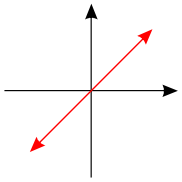
ج)



د)

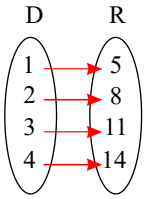


هـ)



۵۱ با قرار دادن تک تک اعضاء دامنه در ضابطه، برد بدست می‌آید.

$$f(x)=۳x+۲\begin{cases}\xrightarrow{x=۱} f(۱)=۵\\ \xrightarrow{x=۲} f(۲)=۸\\ \xrightarrow{x=۳} f(۳)=۱۱\\ \xrightarrow{x=۴} f(۴)=۱۴\end{cases}\Rightarrow \text{برد } R=\{۵,۸,۱۱,۱۴\}$$



۵۲

الف) $۲x+۲y=۱۰\Rightarrow x+y=۵\rightarrow \begin{cases}x=۰ & y=۵\\ x=۱ & y=۴\\ x=۲ & y=۳\\ x=۳ & y=۲\\ x=۴ & y=۱\\ x=۵ & y=۰\end{cases}$

$f(x)=\{(۰,۵)(۱,۴)(۲,۳)(۳,۲)(۴,۱)(۵,۰)\}$ تابع است

ب) $x^۲+y^۲=۱۸\Rightarrow \begin{cases}x^۲=۹\Rightarrow \begin{cases}x=۳\\ x=-۳\end{cases}\\ y^۲=۹\Rightarrow \begin{cases}y=۳\\ y=-۳\end{cases}\end{cases}$

$h(x)=\{(۳,۳)(۳,-۳)(-۳,۳)(-۳,-۳)\}$ تابع نیست

پ) $x+y\le ۳\rightarrow \begin{cases}x=۰ & y=۰\\ & y=۱\\ & y=۲\\ & y=۳\end{cases}$ می‌بینیم که به ازای هر x بیش از یک y هست پس تابع نیست

ت) $|x|+|y|=۳\rightarrow \begin{cases}|x|=۳ & |y|=۰\\ |x|=۲ & |y|=۱\\ |x|=۱ & |y|=۲\\ |x|=۰ & |y|=۳\end{cases}\Rightarrow \begin{cases}x=۳,-۳ & y=۰\\ x=۲,-۲ & y=۱,-۱\\ x=۱,-۱ & y=۲,-۲\\ x=۰ & y=۳,-۳\end{cases}$

$\mathbb{Z}(x)=\{(-۲,۱),(-۲,-۱),(۱,-۲),(۱,۲),(-۱,۲),(-۱,-۲)\ (۲,۱),(۲,-۱)\ (۰,۳),(۰,-۳)\}$

۵۳ هنگامی که در آن، هیچ دو زوج مرتب متمایزی که در آنها مؤلفه‌ی اول یکسان بوده و مؤلفه‌ی دوم متفاوت باشد، وجود نداشته باشد. به‌عبارت تمام مؤلفه‌های اول با هم متفاوت باشند و اگر مولفه‌ی اول یک زوج مرتب با دیگری یکسان بود، آن دو نیز آن هم یکسان باشد که در واقع آن دو، یک زوج مرتب باشند که دو بار نوشته شده‌اند.

۵۴ یک تابع از مجموعه‌ی A به مجموعه‌ی B، رابطه‌ای بین این دو مجموعه است که در آن به هر عضو از A دقیقاً یک عضو از B نسبت داده می‌شود.

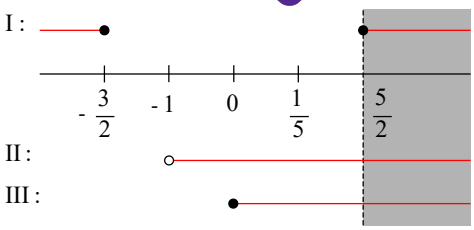
۵۵ ابتدا نامعادله را به شکل نامعادله‌های ساده تفکیک می‌کنیم و سپس بین جواب‌ها اشتراک می‌گیریم:

$$۴\le |۲x-۱|<۳x\rightarrow \begin{cases}|۲x-۱|<۳x\rightarrow \begin{cases}۲x-۱<۳x\\ ۲x-۱>-۳x\end{cases}\\ \cap \text{ و }\\ |۲x-۱|\ge ۴\rightarrow \begin{cases}۲x-۱\ge ۴\\ ۲x-۱\le ۴\end{cases}\end{cases}$$

$$(I)\ \begin{cases}۲x-۱\ge ۴\Rightarrow ۲x\ge ۵\Rightarrow \boxed{x\ge \frac{۵}{۲}}\\ ۲x-۱\le -۴\Rightarrow ۲x\le -۳\Rightarrow \boxed{x\le \frac{-۳}{۲}}\end{cases}$$

$$(II)\ \begin{cases}۲x-۱<۳x\Rightarrow \boxed{x>-۱}\\ ۲x-۱>-۳x\Rightarrow ۵x>۱\Rightarrow \boxed{x>\frac{۱}{۵}}\end{cases}$$

(III) $|x|<a(a\ge ۰)$ باتوجه به نکته : $۳x\ge ۰\rightarrow \boxed{x\ge ۰}$



$I \cap II \cap III : x \in [\frac{5}{2}, +\infty)$

۵۶ می‌دانیم عبارت $y = ax^2 + bx + c$ زمانی همواره مثبت است که $a > 0$ و $b^2 - 4ac < 0$ باشد باتوجه به این مطلب، داریم:

$a = 1 > 0$

$\Delta < 0 \rightarrow b^2 - 4ac < 0 \rightarrow m^2 - 4(1)(9) < 0 \Rightarrow m^2 - 36 < 0 \rightarrow m^2 - 36 = 0 \Rightarrow m^2 = 36$

$\Rightarrow m = \pm 6$ (تعیین علامت)

m		-6		6
$m^2 - 36$	+	○	−	○ +

$\Rightarrow \boxed{-6 < m < 6}$

۵۷

الف) $\frac{-x+3}{2} = \frac{-1}{2}x + \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow \frac{-1}{2}x = \frac{-3}{2} \Rightarrow x = 3$

x		3	
$\frac{-x+3}{2}$	+	○	−

ب) $\frac{-x+3}{-2} = \frac{-x}{-2} + \frac{3}{-2} = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}x = \frac{3}{2} \rightarrow x = 3$

x		3	
$\frac{-x+3}{-2}$	−	○	+

پ) $-x^2 + 2x - 1 = -(x^2 - 2x + 1) = -(x-1)^2 = 0 \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

x		1	
$-(x-1)^2$	−	○	−

ت) $(1-x)^3 = (1-x)(1-x)^2 = 0 \Rightarrow x = 1$

x		1	
$1-x$	+	○	−
$(1-x)^2$	+	○	+
$(1-x)^3$	+	○	−

۵۸

الف) $(2x-1)(3x+2)$

$2x - 1 = 0 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

$3x + 2 = 0 \Rightarrow 3x = -2 \Rightarrow x = \frac{-2}{3}$

x		$-\frac{2}{3}$		$\frac{1}{2}$	
$2x-1$	−		−	○	+
$3x+2$	−	○	+		+
$(2x-1)(3x+2)$	+	○	−	○	+

ب) $(x-1)^2 = (x-1)(x-1)$ $\quad (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

x		-1	
$(x-1)$	−	○	+
$(x-1)$	−	○	+
$(x-1)^2$	+	○	+

عبارت‌های دارای توان زوج همواره مثبت‌اند :

پ) $(x+1)^3 = (x+1)(x+1)^2$ $\quad x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

x	-1	
$(x+1)$	$-$	$+$
$(x+1)^2$	$+$	$+$
$(x+1)^3$	$-$	$+$

ت) $x^2-2x-3=0 \Rightarrow (x-3)(x+1)=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x-3=0 \Rightarrow x=3 \\ x+1=0 \Rightarrow x=-1 \end{cases}$

x	-1		3	
$x-3$	$-$	$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$
x^2-2x-3	$+$	0	$-$	0	$+$

۵۹

$$\Delta = b^2-4ac \Rightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \rightarrow \text{دو جواب} \\ \Delta = 0 \rightarrow \text{یک جواب} \\ \Delta < 0 \rightarrow \text{بدون جواب} \end{cases}$$

الف) $\Delta = b^2-4ac = 16-4(1)(-13) = 16+52 = 68 > 0 \rightarrow$ دو جواب

ب) $\Delta = b^2-4ac = 16-4(2)(2) = 16-16 = 0 \rightarrow$ ۱ جواب (ریشه‌ی مضاعف)

ج) $\Delta = b^2-4ac = 4-4(7)(1) = 4-28 = -24 < 0 \rightarrow$ بدون جواب

۶۰

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$$

با دیدن عبارت‌های $4x^2$ و $3x^2$ که در آنها x^2 مضرب دارد، دو راه برای حل مسئله به روش مربع کامل خواهیم داشت:

الف) روش اول) در عبارت $a^2+2ab+b^2$ ، a را برابر با $2x$ بگیریم که در آنصورت $a^2=4x^2$ خواهد بود:

$$(2x)^2-2(2x)(\frac{1}{2})-\frac{1}{2}=0$$
$$\xrightarrow[+\frac{3}{4}]{\text{طرفین}} (2x)^2-2(2x)(\frac{1}{2})-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=\frac{3}{4}$$
$$(2x)^2-2(2x)(\frac{1}{2})+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$
$$4x^2-2x+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$
$$(2x-\frac{1}{2})^2=\frac{3}{4} \Rightarrow (2x-\frac{1}{2})=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} 2x-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 2x=\frac{1+\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x=\frac{1+\sqrt{3}}{4} \\ 2x-\frac{1}{2}=\frac{-\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 2x=\frac{1-\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x=\frac{1-\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

روش دوم: تمام جملات را تقسیم بر ۴ می‌کنیم:

$$4x^2-2x-\frac{1}{2}=0$$
$$\frac{4x^2}{4}-\frac{2x}{4}-\frac{\frac{1}{2}}{4}=\frac{0}{4} \Rightarrow x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}=0$$

از این جا به بعد مانند قبل عمل می‌کنیم:

$$x^2-2(\frac{1}{4})x-\frac{1}{8}=0 \xrightarrow[+\frac{3}{16}]{\text{طرفین}} x^2-2(\frac{1}{4})x-\frac{1}{8}+\frac{3}{16}=\frac{3}{16}$$
$$x^2-2(\frac{1}{4})x+\frac{1}{16}=\frac{3}{16} \Rightarrow x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}=\frac{3}{16}$$
$$(x-\frac{1}{4})^2=\frac{3}{16} \Rightarrow x-\frac{1}{4}=\pm\frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1+\sqrt{3}}{4} \\ x=\frac{-\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1-\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

دقت: در هر دو روش، جواب بدست آمده باید یکسان باشد وگرنه در حل معادله اشتباه کرده‌ایم؛ بعلاوه اینکه همواره می‌توانیم با جایگذاری جواب نهائی بدست آمده در معادله‌ی اصلی از صحت جواب بدست آمده مطمئن شویم.

ب) اگر بخواهیم از روش اول استفاده کنیم با $3x^2=(\sqrt{3}x)^2$ بر می‌خوریم که حل معادله مشکل می‌شود بنابراین از روش دوم بهره می‌گیریم و با تقسیم جملات به ۳، معادله را به شکل

استاندارد در می‌آوریم و مانند قبل ادامه می‌دهیم:

$$۳x^۲ - ۶x + ۳ = ۱ \xrightarrow{\div ۳} x^۲ - ۲x + ۱ = \frac{۱}{۳} \Rightarrow (x-۱)^۲ = \frac{۱}{۳}$$

$$\Rightarrow x - ۱ = \pm\sqrt{\frac{۱}{۳}} = \pm\frac{۱}{\sqrt{۳}} = \frac{\pm\sqrt{۳}}{۳} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{۳}}{۳} + ۱ = \frac{۳+\sqrt{۳}}{۳} \\ x = \frac{-\sqrt{۳}}{۳} + ۱ = \frac{۳-\sqrt{۳}}{۳} \end{cases}$$

۶۱ $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$, $a \geq ۰$, $m, n \in N$

ابتدا منفی را از زیر رادیکال خارج می‌کنیم:

$$\sqrt[۳]{-۳\sqrt{۳}} = -\sqrt[۳]{۳\sqrt{۳}} = -\sqrt[۳]{۳ \times ۳^{\frac{۱}{۳}}} = -\sqrt[۳]{۳^{\frac{۴}{۳}}}$$

$$= -(۳^{\frac{۴}{۳}})^{\frac{۱}{۳}} = -(۳^{\frac{۴}{۹}}) = -\sqrt[۹]{۳^۴} = -\sqrt[۹]{۸۱}$$

۶۲

الف) $(-۰/۱)^۵ < (-۰/۱)^۴$

ب) $\sqrt[۴]{۰/۰۰۰۱} = ۰/۱$

پ) $(۳/۲)^۲ < (۳/۲)^۳$

ت) $(-۲)^۳ > (-۲)^۵$

ث) $(-۱/۱)^۴ = (۱/۱)^۴$

ج) $(-۲)^۵ > (-۲)^۷$

چ) $۲^۳ < ۳^۲$

ح) $(\frac{۱}{۲})^۲ > (\frac{۱}{۲})^۳$

۶۳ الف) $۰ > a > ۱$ $\quad \sqrt[۳]{\frac{۱}{۸}} > \frac{۱}{۸} \Rightarrow \frac{۱}{۲} > \frac{۱}{۸}$

ب) $a < -۱$ $\quad \sqrt[۳]{-۲۷} > -۲۷ \rightarrow -۳ > -۲۷$

پ) $a = ۰, ۱$ $\quad \sqrt[۳]{۰} = ۰$, $\sqrt[۳]{۱} = ۱$

ت) $a = -۱$ $\quad \sqrt[۳]{-۱} = -۱$

ث) $a > ۱$ $\quad \sqrt[۳]{۲۷} < ۲۷ \Rightarrow ۳ < ۲۷$

ج) $۰ > a > -۱$ $\quad \sqrt[۳]{\frac{-۱}{۸}} < \frac{-۱}{۸} \Rightarrow \frac{-۱}{۲} < \frac{-۱}{۸}$

۶۴ مجموعه $A = \{-۱, ۰, ۱\}$ را در نظر بگیرید.

با فرض $\mathbb{Z}$ به عنوان مجموعه‌ی مرجع، A' به شکل مقابل خواهد بود:

$$A' = \mathbb{Z} - \{-۱, ۰, ۱\} = \{\cdots, -۳, -۲\} \cup \{۲, ۳, ۴, \cdots\}$$

با فرض $\mathbb{R}$ به عنوان مجموعه‌ی مرجع، A' به شکل مقابل خواهد بود:

$$A' = \mathbb{R} - \{-۱, ۰, ۱\} = (-\infty, -۱) \cup (-۱, ۰) \cup (۰, ۱) \cup (۱, +\infty)$$

با توجه به مثال مشخص شد که متمم هر مجموعه، بسته به مجموعه‌ی مرجع متفاوت می‌شود.

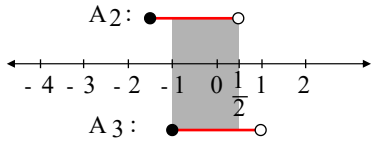
۶۵ باتوجه به معلومات سوال ابتدا $A_۱$, $A_۲$, $A_۳$ را تشکیل می‌دهیم:

$$A_۱ = \left[\frac{-۳}{۱}, \frac{۱-۱}{۲}\right) = [-۳, ۰)$$

$$A_۲ = \left[\frac{-۳}{۲}, \frac{۲-۱}{۲}\right) = \left[\frac{-۳}{۲}, \frac{۱}{۲}\right)$$

$$A_۳ = \left[\frac{-۳}{۳}, \frac{۳-۱}{۲}\right) = [-۱, ۱)$$

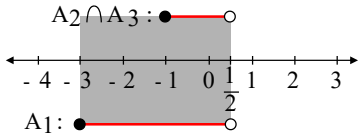
حال $A_۲ \cap A_۳$ را با استفاده از محور بدست می‌آوریم:



$$A_۲ \cap A_۳ = \left[-۱, \frac{۱}{۲}\right)$$

و اجتماع آن را با $A_۱$ رسم می‌کنیم:

$$A_1 \cup (A_2 \cap A_3) = \left[-3, \frac{1}{2}\right)$$



اعداد صحیح موجود در این بازه عبارتند از: $-3, -2, -1, 0$

$\Leftarrow$ در این بازه ۴ عدد صحیح موجود است.

۶۶

الف

$$\left(\frac{1}{1-\cos\theta} - \frac{1}{1+\cos\theta}\right)\left(\frac{1}{\cos\theta(1+\cot^2\theta)}\right) = \left(\frac{1+\cos\theta-1+\cos\theta}{1-\cos^2\theta}\right)\left(\frac{1}{\cos\theta}\right)\left(\frac{1}{1+\cot^2\theta}\right)\left(\frac{2\cos\theta}{\sin^2\theta}\right)\left(\frac{1}{\cos\theta}\right)(\sin^2\theta) = 2$$

ب

$$\left(\frac{1}{1-\sin\theta} + \frac{1}{1+\sin\theta}\right) - 2\tan^2\theta = \frac{1+\cancel{\sin\theta}+1-\cancel{\sin\theta}}{1-\sin^2\theta} - 2\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{2}{\cos^2\theta} - \frac{2\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{2(1-\sin^2\theta)}{\cos^2\theta} = 2$$

۶۷ الف) نادرست: اندازهٔ نمونه کوچکتر مساوی اندازهٔ جامعه است.

ب) نادرست: اعضای نمونه، بخشی از اعضای جامعه‌اند.

پ) درست

۶۸

الف) $D = [0, 5] \quad , \quad R = [2, 6]$

$$y = ax + b \xrightarrow{(0,2)} 2 = b$$

$$y = ax + 2 \xrightarrow{(5,6)} 6 = 5a + 2 \Rightarrow 5a = 4 \Rightarrow a = \frac{4}{5}$$

$$y = \frac{4}{5}x + 2$$

ب) $D = [-4, 4] \quad R = [0, 4]$

$$-2 \le x \le 0 \Rightarrow y = ax + b \begin{cases} \xrightarrow{(0,-1)} -1 = b \\ \xrightarrow{(-2,2)} 2 = -2a - 1 \Rightarrow 3 = -2a \Rightarrow a = \frac{-3}{2} \end{cases} \Rightarrow y = \frac{-3}{2}x - 1$$

$$0 \le x \le 8 \Rightarrow y = ax + b \begin{cases} \xrightarrow{(0,-1)} -1 = b \\ \xrightarrow{(8,7)} 7 = 8a - 1 \Rightarrow 8a = 8 \Rightarrow a = 1 \end{cases} \Rightarrow y = x - 1$$

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{3}{2}x - 1 & -2 \le x \le 0 \\ x - 1 & 0 \le x \le 8 \end{cases}$$

پ) $D = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\} \qquad R = \{-3, -2, 0, 1, 2\}$

ت) $D = [-1, 4] \qquad R = [-5, 4]$

ث) $D = \mathbb{R} \qquad R = (-\infty, 3]$

ج) $D = [-2, 8] \qquad R = [-1, 7]$

۶۹ می‌دانیم: $\boxed{n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)}$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$\Rightarrow 30 = 15 + n(B) - 5 \Rightarrow n(B) = 30 - 15 + 5 = 20$$

۷۰ الف) متغیر کیفی ترتیبی ب) متغیر کیفی اسمی (غیرترتیبی)

الف) متغیری است که در آن، نوعی ترتیب طبیعی وجود داشته باشد. به‌عنوان مثال سطح تحصیلات (دیپلم، فوق‌دیپلم، کارشناسی، کارشناسی ارشد و دکتری)

ب) متغیر کیفی‌ای است که ترتیبی نیست، مانند جنسیت (زن یا مرد)

۷۱ الف) آمار، مجموعه‌ای از ارقام، اعداد و اطلاعات است.

ب) علم آمار مجموعه روش‌هایی است که شامل جمع‌آوری اعداد و ارقام، سازماندهی و نمایش، تحلیل و تفسیر داده‌ها و در نهایت نتیجه‌گیری، قضاوت و پیش‌بینی مناسب در مورد پدیده‌ها و آزمایش‌های تصادفی می‌شود.

۷۲

$$A \subseteq B \Rightarrow n(A) \leq n(B) \xrightarrow[n(S)\geq 0]{\div n(S)} \frac{n(A)}{n(S)} \leq \frac{n(B)}{n(S)} \Rightarrow P(A) \leq P(B)$$

۷۳ اصل ضرب: اگر انجام کاری شامل دو مرحله باشد، به‌طوری‌که برای انجام مرحله‌ی اول m انتخاب و برای انجام مرحله‌ی دوم n انتخاب داشته باشیم، در کل، کار مورد نظر با $m \times n$ روش قابل اجراست.

تعمیم اصل ضرب: اگر انجام کاری شامل k مرحله باشد به‌طوری‌که در انجام مرحله‌ی اول m_1 روش، برای انجام مرحله‌ی دوم m_2 روش، .... و برای انجام مرحله‌ی k اُم m_k روش وجود داشته باشد (با فرض این‌که در هر مرحله انتخاب تمام روش‌های آن مرحله ممکن باشد) کار مورد نظر با $m_1 \times m_2 \times \cdots \times m_k$ روش قابل انجام است.

۷۴

$$y = ax + b$$

۷۵ الف) در یک تابع که به صورت زوج مرتب نمایش داده شده است؛ مجموعه همه‌ی مؤلفه‌های اول زوج‌های مرتب تشکیل‌دهنده آن را «دامنه» می‌گوییم.

ب) در یک تابع که به صورت زوج مرتب نمایش داده شده است؛ مجموعه همه‌ی مؤلفه‌های دوم زوج‌های مرتب تشکیل‌دهنده آن را «برد» می‌گوییم.

ج) اگر رابطه‌ی بین دامنه و برد یک تابع به صورت یک عبارت ریاضی نوشته شود (برای مثال $f(n) = 2n - 1 \quad n \in \mathbb{N}$) به این نوع نمایش، نمایش جبری تابع می‌گویند.

۷۶ جواب‌های زیادی می‌توان داد. برای مثال: از A به B:

$$f(x) = \{(a,e),(b,h),(c,e),(d,h)\} \qquad g(x) = \{(b,e),(c,e),(d,h),(a,g)\}$$

از B به A:

$$h(x) = \{(e,a)(e,b)(f,c)(f,d)\} \qquad z(x) = \{(f,a)(f,b)(e,a)(h,d)\}$$

۷۷ هر نفر با همه افراد بجز خودش مبارزه می‌کند یعنی $n(n-1)$؛ اما از آنجایی که هر مسابقه‌ی انجام شده بین دو نفر مشترک است پس در واقع ما به ازای هر نفر یک مسابقه را در نظر گرفته‌ایم در صورتیکه هر مسابقه بین دو نفر انجام می‌شود بنابراین رابطه‌ی بالا به شکل $\frac{n(n-1)}{2}$ در می‌آید:

$$\frac{n(n-1)}{2} = 36 \Rightarrow n^2 - n = 72$$

$$\Rightarrow n^2 - n - 72 = 0 \Rightarrow (n-9)(n+8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = 9 \\ n = -8 \quad \text{غ‌ق‌ق} \end{cases}$$

$$\text{تعداد مبارزات} = \frac{(-1 \text{ تعداد شرکت کننده}) \times \text{تعداد شرکت کننده}}{2}$$

۷۸ عدد -1 ریشه‌ی معادله‌ی $x + 1 = 0$ و عدد ۳ ریشه‌ی معادله‌ی $x - 3 = 0$ است.

پس کافیست معادله را به صورت $(x-3)(x+1) = 0$ بنویسیم:

$$(x-3)(x+1) = 0 \Rightarrow x^2 + (-3+1)x + (-3)(1) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$

$x^2 - 2x - 3 = 0$ معادله‌ی درجه‌ی دومی با ریشه‌های -1 و ۳ است.

۷۹

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \quad m, n \in N,\ a \geq 0$$

ابتدا عبارت دارای x را ساده می‌کنیم:

از داخلی‌ترین رادیکال شروع می‌کنیم:

$$\sqrt{\sqrt[4]{x\sqrt[3]{x}}} = \sqrt{\sqrt[4]{x \times x^{\frac{1}{3}}}}$$

$$= \sqrt{\sqrt[4]{x^{\frac{4}{3}}}} = \sqrt{(x^{\frac{4}{3}})^{\frac{1}{4}}} = \sqrt{x^{\frac{1}{3}}} = (x^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{6}}$$

$$x^{\frac{1}{6}} = y^{\frac{1}{3}} \xrightarrow[\text{به توان } 3]{\text{طرفین}} (x^{\frac{1}{6}})^3 = (y^{\frac{1}{3}})^3 \Rightarrow x^{\frac{1}{2}} = y \Rightarrow \sqrt{x} = y$$

۸۰

$$\sqrt[n]{a^n} = a \quad n \text{ فرد}$$

$$5\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{5^3} \times \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{5^3 \times 3} = \sqrt[3]{375}$$

۸۱

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \quad a \geq 0$$

راه اول:

$$\sqrt[6]{A} = A^{\frac{1}{6}} = ۲$$

با به توان ۴ رساندن طرفین داریم:

$$(A^{\frac{1}{6}})^{۴} = A^{\frac{۴}{6}} = A^{\frac{۲}{۳}} = \sqrt[۳]{A^{۲}} = ۲^{۴} = ۱۶$$

$$\sqrt[۳]{A^{۲}} = ۱۶$$

راه دوم:

$$\sqrt[6]{A} = ۲ \xrightarrow{\text{طرفین به توان } 6} (\sqrt[6]{A})^{۶} = ۲^{۶} \to A = ۲^{۶}$$

$$A^{۲} = ۲^{۱۲} \to \sqrt[۳]{A^{۲}} = \sqrt[۳]{۲^{۱۲}} = ۲^{\frac{۱۲}{۳}} = ۲^{۴} = ۱۶$$

۸۲

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \quad (a \geq ۰)$$

الف)

$$\sqrt[۳]{\left(\frac{۳}{۲}\right)^{-۳}} = \left(\frac{۳}{۲}\right)^{\frac{-۳}{۳}} = \left(\frac{۳}{۲}\right)^{-۱} = \frac{۲}{۳}$$

ب)

$$\sqrt[۸]{(۲۵۶)^{\frac{-۱}{۲}}} = \sqrt[۸]{\frac{۱}{۲۵۶^{\frac{۱}{۲}}}} = \sqrt[۸]{\frac{۱}{\sqrt{۲۵۶}}} = \sqrt[۸]{\frac{۱}{\sqrt{۲^{۸}}}} = \frac{\sqrt[۸]{۱}}{\sqrt[۸]{\sqrt{۲^{۸}}}} = \frac{۱}{\sqrt[۸]{۲^{۴}}} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

۸۳

$$(\sin^{۲}\alpha + ۱)(۲ + \cos^{۲}\alpha) = (۱ - \cos^{۲}\alpha + ۱)(۲ + \cos^{۲}\alpha)$$
$$= (۲ - \cos^{۲}\alpha)(۲ + \cos^{۲}\alpha) = ۴ - \cos^{۴}\alpha = ۴ - ۳ = ۱$$

۸۴ از آنجاکه θ زاویه‌ای در ربع دوم است، در می‌یابیم که θ ربع دوم $\begin{cases} \sin\theta > ۰ \\ \cos\theta < ۰ \end{cases}$

قدر مطلق‌ها را برداشته و عبارت را ساده می‌کنیم:

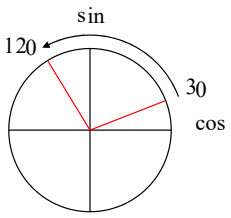
$$\frac{\sin\theta\,|\cos\theta| - |\sin\theta|\cos\theta}{|\sin\theta\ \cos\theta|} = \frac{\sin\theta(-\cos\theta) - \sin\theta\cos\theta}{-\sin\theta\cos\theta}$$

$$= \frac{-\sin\theta\cos\theta - \sin\theta\cos\theta}{-\sin\theta\cos\theta} = \frac{-۲\sin\theta\cos\theta}{-\sin\theta\cos\theta} = ۲$$

۸۵ باتوجه به دایره مثلثاتی داریم:

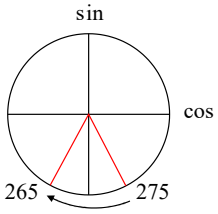
۱) ابتدا افزایش سپس کاهش : sin

ابتدا کاهش سپس افزایش : cos



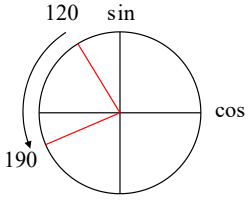
۲) ابتدا افزایش سپس کاهش : sin

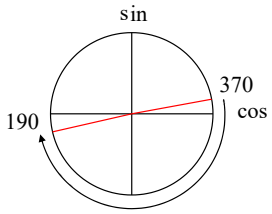
ابتدا کاهش سپس افزایش : cos



۳) ابتدا کاهش سپس افزایش : sin

ابتدا افزایش سپس کاهش : cos

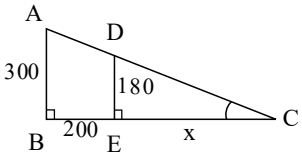




۴) ابتدا کاهش سپس افزایش سپس کاهش : sin

ابتدا افزایش سپس کاهش سپس افزایش : cos

۸۶



با توجه به شکل:

$$\begin{cases} \widehat{B} = \widehat{E} = ۹۰^\circ \\ \widehat{C} \text{ زاویه مشترک} \end{cases} \Rightarrow D\overset{\Delta}{E}C \sim A\overset{\Delta}{B}C$$

با نوشتن نسبت تشابه خواهیم داریم:

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EC} = \frac{AC}{DC}$$

$$\frac{۳۰۰}{۱۸۰} = \frac{۲۰۰ + x}{x} \rightarrow ۳۰۰x = ۱۸۰(۲۰۰ + x) \rightarrow ۳۰۰x = ۳۶۰۰۰ + ۱۸۰x$$

$$\rightarrow ۱۲۰x = ۳۶۰۰۰ \rightarrow x = ۳۰۰cm = ۳m$$

۸۷

الف

$$(\sqrt{۳} - \frac{\sqrt{۳}}{۲})(\frac{\sqrt{۳}}{۳} \times \frac{۱}{۲}) + ۱ = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \times \frac{\sqrt{۳}}{۶} + ۱ = \frac{۳}{۱۲} + ۱ = \frac{۱}{۴} + ۱ = \frac{۵}{۴}$$

ب

$$\frac{(\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲ - (\frac{۱}{۲})^۲ + ۰}{\sin^۲ ۳۲^\circ + \cos^۲ ۳۲^\circ - ۰ + (\frac{\sqrt{۳}}{۳})^۲} = \frac{\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۴}}{۱ + \frac{۱}{۳}} == \frac{\frac{۱}{۴}}{\frac{۴}{۳}} = \frac{۳}{۱۶}$$

۸۸ جامعه: خودرو نمونه: خودرو

اندازهٔ جامعه: ۱۰۰۰ اندازهٔ نمونه: ۱۵۰

ویژگی: بررسی حداقل و حداکثر سرعت

۸۹ اگر کمی دقت کنید می‌بینید که خود A در A وجود دارد.

$$A^۲ = ۶ + \underbrace{\sqrt{۶ + \sqrt{۶ + \sqrt{۶ + \cdots}}}}_{A}$$

حالا ۲ طرف تساوی را به توان ۲ می رسانیم:

$$\Rightarrow A^۲ = ۶ + A$$

با حل معادلهٔ فوق A را به دست می‌آوریم:

$$A = ۳$$

۹۰ اگر عرض آن را x بنامیم داریم:

$$P = ۲(x + (x + ۳)) = ۲(۲x + ۳) = ۴x + ۶$$

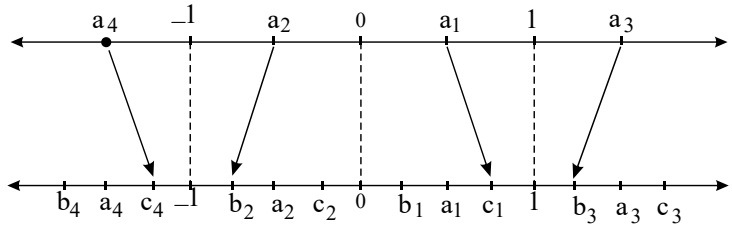
۹۱

$a_۳$: هر چه از اعداد بزرگ‌تر از یک، ریشهٔ بزرگتری بگیریم، کوچک‌تر می‌شوند: $\sqrt[۳]{a} < a$؛ مثال: $\sqrt[۳]{۸} = ۲ < \sqrt{۸}$

$a_۱$: هر چه از اعداد بین صفر و یک، ریشهٔ بزرگتری بگیریم، بزرگ‌تر می‌شوند: $\sqrt[۳]{a} > a$؛ مثال: $\sqrt[۳]{\frac{۱}{۸}} = \frac{۱}{۲} > \frac{۱}{۸}$

$a_۲$: هر چه از اعداد بین صفر و منفی یک، ریشهٔ بزرگتری بگیریم، کوچک‌تر می‌شوند: $\sqrt[۳]{a} > a$؛ مثال: $\sqrt[۳]{\frac{-۱}{۸}} = \frac{-۱}{۲} < \frac{-۱}{۸}$

$a_۴$: اعداد کوچک‌تر از منفی یک، هر چه ریشهٔ بزرگتری بگیریم، بزرگ‌تر می‌شوند: $\sqrt[۳]{a} > a$؛ مثال: $\sqrt[۳]{-۸} = -۲ < -۸$



۹۲ برای این‌که مجموع دو عدد زوج شود هر دو باید فرد باشند یا هر دو باید زوج باشند. به‌علاوه چون دو کارت را باهم بیرون می‌آوریم. پس (a,b) با (b,a) فرقی نمی‌کند.

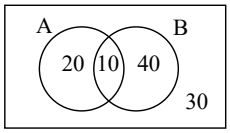
$$n(A)=\left\{\begin{matrix}(۱,۳)(۱,۵)(۱,۷)(۱,۹)(۳,۵)(۳,۷)(۳,۹)(۵,۷)(۵,۹)(۷,۹)\\(۲,۴)(۲,۶)(۲,۸)(۲,۱۰)(۴,۶)(۴,۸)(۴,۱۰)(۶,۸)(۶,۱۰)(۸,۱۰)\end{matrix}\right\}$$

$$n(S)=\binom{۱۰}{۲}=\frac{۱۰!}{۸!\,۲!}=\frac{۱۰\times ۹\times ۸!}{۸!\times ۲}=۴۵$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۲۰}{۴۵}=\frac{۴}{۹}$$

۹۳

باتوجه به نمودار ون مقابل (اعداد روی نمودار بیانگر درصد احتمال هستند) داریم:



الف) احتمال این‌که حداقل با یکی از دو سلاح تیراندازی کند.

یعنی با A یا با B یا هر دو:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{۳۰}{۱۰۰}+\frac{۵۰}{۱۰۰}-\frac{۱۰}{۱۰۰}=\frac{۷۰}{۱۰۰}$$

ب) باتوجه به نمودار، احتمال این‌که فقط با سلاح A تیراندازی کند $\frac{۲۰}{۱۰۰}$ است.

ج) احتمال این‌که با هر دو سلاح تیراندازی کند یعنی $P(A\cap B)$ که باتوجه به نمودار برابر $\frac{۱۰}{۱۰۰}$ است.

۹۴

پیشامد موردنظر را A می‌نامیم و داریم:

$$A=\left\{\begin{matrix}(پ،پ،پ،پ)،(پ،پ،پ،د)،(پ،پ،د،د)\\(پ،پ،د،پ)،(پ،پ،د،پ)،(پ،د،پ،پ)،(پ،د،د،د)\\(پ،د،پ،د)،(پ،د،د،پ)،(د،پ،پ،پ)\end{matrix}\right\}$$

۹۵

الف) $۳x-۲>۵x+۷\Rightarrow -۲>۲x+۷\Rightarrow ۲x+۹<۰\Rightarrow ۲x<-۹$

$$x<\frac{-۹}{۲}\Rightarrow x\in(-\infty,\frac{-۹}{۲})$$

ب) $۲-۳x\le -۳+۷x\Rightarrow ۵\le ۱۰x\Rightarrow \frac{۱}{۲}\le x \qquad x\in[\frac{۱}{۲},+\infty)$

۹۶

الف) $-x^۲+۳x+۴=۰\rightarrow \Delta=۹-۴(-۱)(۴)=۹+۱۶=۲۵$

$$x=\frac{-۳\pm ۵}{-۲}=\left\{\begin{matrix}\frac{-۳-۵}{-۲}=۴\\\frac{-۳+۵}{-۲}=-۱\end{matrix}\right.$$

x		−1		4	
$-x^2+3x+4$	−	○	+	○	−

ب) $-۳x^۲+۴x-۱=۰\rightarrow \Delta=۱۶-۴(-۳)(-۱)=۱۶-۱۲=۴$

$$x=\frac{-۴\pm ۴}{-۶}=\left\{\begin{matrix}\frac{-۴+۴}{-۶}=۰\\\frac{-۴-۴}{-۶}=\frac{-۸}{-۶}=\frac{۴}{۳}\end{matrix}\right.$$

x		0		$\frac{4}{3}$	
$-3x^2+4x-1$	−	○	+	○	−

ج) $\frac{-x^۲}{۴}-۳x-۹=۰\rightarrow \Delta=۹-۴(\frac{-۱}{۴})(-۹)=۹-۹=۰$

$$x_۱=x_۲=\frac{۳}{-\frac{۲}{۴}}=-۶$$

$\Delta=۰$: ریشه‌ی مضاعف

x		-6	
$-\frac{x^2}{4}-3x-9$	$+$	$\circ$	$-$

د) $-x^2+3x-5=0 \rightarrow \Delta=9-4(-1)(-5)=9-20=-11$

$\Delta<0$: عبارت همواره موافق علامت a

x	y
$-x^2+3x+5$	—

۹۷

$$S=2x\times x=2x^2=8$$
$$P=2(2x+x)=2(3x)=6x$$

$2x^2=8\Rightarrow x^2=4\Rightarrow x=\pm 2$ $\nearrow$ $x=2$ ✓

$\searrow$ $x=-2$ غ‌ق‌ق زیرا که طول نمی‌تواند منفی باشد.

$P=6x \xrightarrow{x=2} P=12$ واحد

۹۸

$$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[kn]{a^{km}} \quad a\geq 0 \quad n,m,k\in N$$

الف) $\left.\begin{array}{l}\sqrt[2]{2}=2^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{3}{6}}=\sqrt[6]{2^3}=\sqrt[6]{8}\\ \sqrt[3]{5}=5^{\frac{1}{3}}=5^{\frac{2}{6}}=\sqrt[6]{5^2}=\sqrt[6]{25}\end{array}\right\}\Rightarrow \sqrt[6]{8}<\sqrt[6]{25}\Rightarrow \sqrt{2}<\sqrt[3]{5}$

ب) $\left.\begin{array}{l}\sqrt[4]{8}=8^{\frac{1}{4}}=8^{\frac{3}{12}}=\sqrt[12]{8^3}=\sqrt[12]{512}\\ \sqrt[3]{6}=6^{\frac{1}{3}}=6^{\frac{4}{12}}=\sqrt[12]{6^4}=\sqrt[12]{1296}\end{array}\right\}\Rightarrow \sqrt[12]{512}<\sqrt[12]{1296}\Rightarrow \sqrt[4]{8}<\sqrt[3]{6}$

پ) $\left.\begin{array}{l}\sqrt[4]{9}=9^{\frac{1}{4}}=9^{\frac{5}{20}}=\sqrt[20]{9^5}=\sqrt[20]{59049}\\ \sqrt[5]{12}=12^{\frac{1}{5}}=12^{\frac{4}{20}}=\sqrt[20]{12^4}=\sqrt[20]{20736}\end{array}\right\}\Rightarrow \sqrt[20]{20736}<\sqrt[20]{59049}\Rightarrow \sqrt[5]{12}<\sqrt[4]{9}$

۹۹

$$\frac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\cos\alpha(\tan\alpha-1)}=\frac{(\sin\alpha-\cos\alpha)(\sin\alpha+\cos\alpha)}{\cos\alpha\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-1\right)}$$

$$=\frac{(\sin\alpha-\cos\alpha)(\sin\alpha+\cos\alpha)}{\cos\alpha(\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\cos\alpha})}=\frac{(\sin\alpha-\cos\alpha)(\sin\alpha+\cos\alpha)}{(\sin\alpha-\cos\alpha)}=\sin\alpha+\cos\alpha$$

۱۰۰

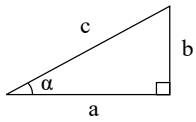
$$\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{\sin\alpha}-\sin\alpha\right)\cot\alpha}{\cos\alpha}}=\sqrt{\frac{\left(\frac{1-\sin^2\alpha}{\sin\alpha}\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}{\cos\alpha}}=\sqrt{\frac{\frac{\cos^2\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha}}{\cos\alpha}}$$

$$=\sqrt{\frac{\cos^3\alpha}{\sin^2\alpha\cos\alpha}}=\sqrt{\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}}=\sqrt{\cot^2\alpha}=|\cot\alpha|$$

۱۰۱

$$\frac{1}{\cos^2\alpha}-1=\frac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\tan^2\alpha=\frac{1}{\cot^2\alpha}=\frac{1}{\frac{1}{25}}=25$$

۱۰۲ با در نظر گرفتن زاویه‌ی بین ضلع a و c بعنوان زاویه‌ی α داریم:



$\sin\alpha = \frac{b}{c} = \frac{۱}{۳}$ $\qquad$ $۱ + \cot^۲\alpha = \frac{۱}{\sin^۲\alpha} \Rightarrow ۱ + \cot^۲\alpha = \frac{۱}{\frac{۱}{۹}}$

$\cot^۲\alpha + ۱ = ۹ \rightarrow \cot^۲\alpha = ۸ \rightarrow \cot\alpha = \sqrt{۸} = \frac{a}{b}$

۱۰۳

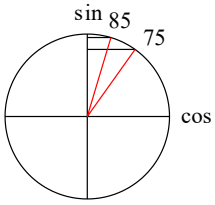
$\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha = ۱ \Rightarrow \cos^۲\alpha = ۱ - \sin^۲\alpha$

$\cos^۲\alpha = ۱ - ۰/۳۶ = ۰/۶۴ \Rightarrow \cos\alpha = \pm ۰/۸$

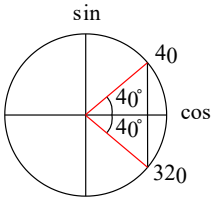
$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \pm\frac{۰/۸}{۰/۶} = \pm\frac{۴}{۳}$

۱۰۴ باتوجه به دایره مثلثاتی داریم:

۱) $\sin ۸۵ > \sin ۷۵$

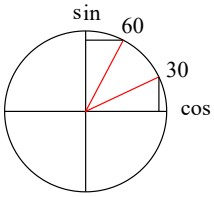


۲) $\cos ۴۰ = \cos ۳۲۰$

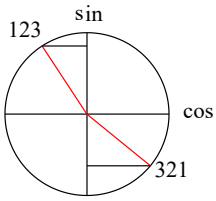


۳) $\sin ۶۰ = \cos ۳۰$

سینوس و کسینوس زوایای متمم با هم برابرند.



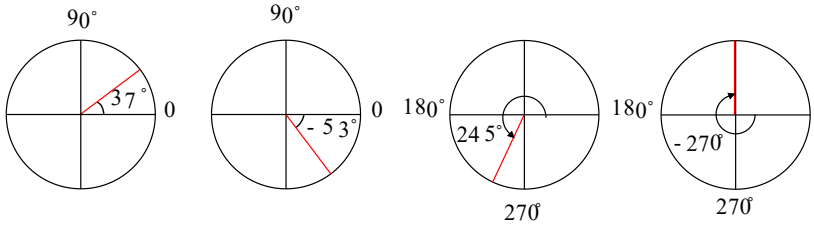
۴) $\sin ۱۲۳ > \sin ۳۲۱$



۱۰۵ الف و ب هر دو نادرست:

زوایای ۰، ۹۰، ۲۷۰، ۳۶۰ و ... در هیچ یک از ربع‌ها نیستند؛ بلکه روی مرز ناحیه‌های مثلثاتی هستند.

۱۰۶



۱۰۷

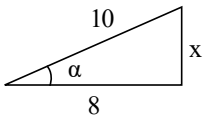
$\frac{۱}{۲} \times AB \times AC \times \sin\underset{\text{زاویهٔ بین } AB \text{ و } AC}{\theta}$

$\boxed{\hat{\theta} = \hat{A} = ۳۰^\circ}$

$\sin\theta = \sin ۳۰ = \frac{۱}{۲} \rightarrow S = \frac{۱}{۲} \times ۳ \times ۵ \times \frac{۱}{۲} = \frac{۱۵}{۴}$

۱۰۸

باتوجه به شکل مقابل داریم:



$\cos\alpha = \frac{۸}{۱۰}$

برای بدست آوردن ارتفاع مثلث، از رابطه‌ی فیثاغورس استفاده می‌کنیم:

$۱۰۰ = ۶۴ + x^۲ \Rightarrow x^۲ = ۳۶ \Rightarrow x = ۶$

$S = \frac{\text{ارتفاع} \times \text{قاعده}}{۲} = \frac{۸ \times ۶}{۲} = ۲۴$

۱۰۹

جمله عمومی دنباله هندسی
$a_n = a_۱ a^{n-۱}$
$a_۱$: جمله اول دنباله , q : قدر نسبت

$t_n = t_۱ q^{n-۱} \Rightarrow ۵۰ = ۲۰۰ \times (\frac{۱}{۴})^{n-۱} \rightarrow \frac{۵۰}{۲۰۰} = \frac{۱}{۴} = (\frac{۱}{۴})^{n-۱} \rightarrow n - ۱ = ۱ \Rightarrow n = ۲$ پس از دو روز

۱۱۰

جمله ی عمومی دنباله ی حسابی
$a_n = a_۱ + (n-۱)d$
$a_۱$: جمله ی اول دنباله , d : قدر نسبت
$\frac{A+B}{۲}$: واسطه حسابی بین دو عدد B, A

الف) $\frac{۱۱ + ۱۵}{۲} = \frac{۲۶}{۲} = ۱۳$

ب) $\frac{-۱ + ۱}{۲} = \frac{۰}{۲} = ۰$

پ) $\frac{-۳ - ۱۲}{۲} = \frac{-۱۵}{۲} = -۷٫۵$

۱۱۱

جمله ی عمومی دنباله ی حسابی
$a_n = a_۱ + (n-۱)d$
$a_۱$: جمله ی اول دنباله , d : قدر نسبت

الف) حسابی (با توجه به اضافه شدن مقدار ثابت ۳ به تک تک جملات)

ب)

$\begin{cases} a_۱ = ۲ \\ d = ۳ \end{cases} \Rightarrow a_n = a_۱ + (n-۱)d = ۲ + (n-۱) \times ۳ \Rightarrow a_n = ۲ + ۳n - ۳ = ۳n - ۱$

پ) $a_{۱۲} = ۳ \times ۱۲ - ۱ = ۳۶ - ۱ = ۳۵$

ت) هفتمین جمله $a_n = ۲۰ = ۳n - ۱ \Rightarrow ۳n = ۲۱ \Rightarrow n = ۷$

۱۱۲ اگر ساعت مراجعه را با h و دقیقه مراجعه را با m نشان دهیم، با توجه به الگوی $۲h + \frac{m}{۲} = ۳۴$ و با جایگذاری $h = ۱۱$ داریم:

$۲ \times ۱۱ + \frac{m}{۲} = ۳۴ \Rightarrow ۲۲ + \frac{m}{۲} = ۳۴ \Rightarrow \frac{m}{۲} = ۱۲ \Rightarrow m = ۲۴$

ساعت دقیق مراجعه: ساعت یازده و بیست و چهار دقیقه

۱۱۳

اگر a_n و a_{n+1} را در دو جمله‌ی متوالی در نظر بگیریم داریم:

$a_{n+1} - a_n = ۲۸$

$\left(۴(n+۱)^۲ - ۱\right) - \left(۴n^۲ - ۱\right) = ۲۸$
$\left(۴(n^۲ + ۲n + ۱) - ۱\right) - \left(۴n^۲ - ۱\right) = ۲۸$
$۴n^۲ + ۸n + ۴ - ۱ - ۴n^۲ + ۱ = ۲۸$
$۸n + ۴ = ۲۸ \Rightarrow ۸n = ۲۴ \Rightarrow n = ۳ , n + ۱ = ۴$ جملات سوم و چهارم

۱۱۴ $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

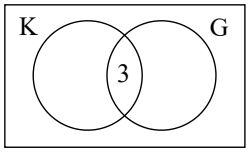
راه اول: اگر آزمایش خون را با K و آزمایش قند را با G نشان دهیم:

$$\begin{cases} n(K)=۹ \\ n(G)=۵ \\ n(K\cap G)=۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} n(K\cup G)=n(K)+n(G)-n(K\cap G) \\ n(K\cup G)=۹+۵-۳=۱۱ \end{matrix}$$

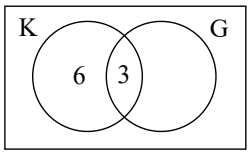
یازده نفر آزمایش خون یا قند $(K\cup G)$ را انجام داده‌اند.

ب) $n(K\cup G)'=n(u)-n(K\cup G)=۱۴-۱۱=۳$

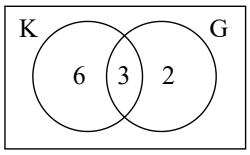
راه دوم:



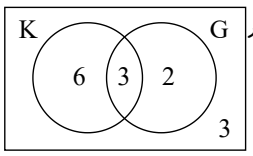
می‌دانیم در مجموع ۹ نفر آزمایش خون داده‌اند که ۳ نفر آزمایش قند هم داده‌اند پس ۶ نفر فقط آزمایش خون داده‌اند:



با استدلال مشابه در می‌یابیم که ۲ نفر فقط آزمایش قند داده‌اند:



با جمع کردن تعداد نفرات و مقایسه با تمام مراجعه‌کنندگان در می‌یابیم که ۳ نفر در هیچ کدام یک از این دو آزمایش شرکت نکرده‌اند و نمودار ون به شکل زیر کامل می‌گردد:



۱۱۵

$$\begin{cases} U=\{a,b,c,d,e,f\} \\ A=\{a,b,c\}\Rightarrow A'=\{d,e,f\} \\ B=\{c,d,f\}\Rightarrow B'=\{a,b,e\} \end{cases}$$

الف) $\left.\begin{matrix} A-B=\{a,b,c\}-\{c,d,f\}=\{a,b\} \\ A\cap B'=\{a,b,c\}\cap\{a,b,e\}=\{a,b\} \end{matrix}\right\}\Rightarrow A-B=A\cap B'$

ب) $A'=\{d,e,f\}\Rightarrow (A')'=\{a,b,c\}=A\Rightarrow (A')'=A$

پ) $\left.\begin{matrix} (A\cup B)'=(\{a,b,c,d,f\})'=\{e\} \\ A'\cap B'=\{d,e,f\}\cap\{a,b,e\}=\{e\} \end{matrix}\right\}\Rightarrow (A\cup B)'=A'\cap B'$

ت) $(A\cap B)'=(\{a,b,c\}\cap\{c,d,f\})'=(\{c\}')=\{a,b,d,e,f\}$

$A'\cup B'=\{d,e,f\}\cup\{a,b,e\}=\{a,b,d,e,f\}\Rightarrow (A\cap B)'=A'\cup B'$

ث) $\{a,b,c\}-\{d,e,f\}=\{a,b,c\}\Rightarrow A-A'=A$

۱۱۶ الف) بله: مجموعه اعداد فرد $A'=$ مجموعه اعداد زوج $A=$

ب) بله: $B'=\{۱,۲,۳\}$ $B=\{۴,۵,۶,۷,\cdots\}$

پ) خیر، باتوجه به اینکه مجموعه مرجع، مجموعه‌ای نامتناهی است، پس هر مجموعه متناهی مانند C که با اعضای مجموعه C بسازیم، تعداد اعضایش قابل شمارش و محدود خواهند بود، در نتیجه باقیمانده اعضای مجموعه C' بی شمار خواهند بود و C' نامتناهی خواهد شد.

۱۱۷ الف) درست

ب) درست: $A\cap B$ زیرمجموعه A و B است و وقتی نامتناهی باشد، پس هردو مجموعه نامتناهی است.

پ) نادرست: کم کردن یک مجموعه متناهی از یک مجموعه نامتناهی، آن را متناهی نمی‌کند.

ت) نادرست: از اجتماع یک مجموعه متناهی با یک مجموعه نامتناهی همواره مجموعه‌ای نامتناهی به وجود می‌آید.

۱۱۸ A می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد زیرا هم مجموعه‌های متناهی و هم مجموعه‌های نامتناهی توانایی در برگرفتن زیرمجموعه‌ای متناهی را دارند.

۱۱۹

الف

$B=\{۰\ ,\ ۸\ ,\ -۳\}$ $A=\{۱\ ,\ \sqrt{۳}\ ,\ -۷\ ,\ ۰\}$

$A'=\{-۲\ ,\ ۴\ ,\ \sqrt{۲}\ ,\ ۵\ ,\ ۸\ ,\ -۳\}$

$B' = \{-۲ , \sqrt{۳} , ۱ , -۷ , \sqrt{۲} , ۴ , ۵\}$

ب

$(A \cap B)' = \{-۲ , \sqrt{۳} , ۱ , -۷ , ۴ , \sqrt{۲} , ۵ , ۸ , -۳\}$

پ

$(A \cup B)' = \{-۲ , ۴ , \sqrt{۲} , ۵\}$

ت

$A' - B' = \{۸ , -۳\}$

۱۲۰

الف

$$\frac{۲\tan\theta}{۱+\tan^۲\theta} = ۲\tan\theta\left(\frac{۱}{۱+\tan^۲\theta}\right) = ۲\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\cos^۲\theta = ۲\sin\theta\cos\theta$$

ب

$$\frac{۱}{\cos\theta} - \cos\theta = \frac{۱-\cos^۲\theta}{\cos\theta} = \frac{\sin^۲\theta}{\cos\theta} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\sin\theta = \tan\theta\cdot\sin\theta$$

پ

$$\frac{\sin^۲ x}{۱-\sin x} + \frac{\sin^۲ x}{۱+\sin x} = \frac{\sin^۲ x(۱+\sin x) + \sin^۲ x(۱-\sin x)}{(۱-\sin x)(۱+\sin x)}$$

$$= \frac{\sin^۲ x + \cancel{\sin^۳ x} + \sin^۲ x - \cancel{\sin^۳ x}}{۱-\sin^۲ x} = \frac{۲\sin^۲ x}{\cos^۲ x} = ۲\tan^۲ x$$

ت

$$۱ - \frac{\cos^۲\alpha}{۱+\sin\alpha} = \frac{۱+\sin\alpha-\cos^۲\alpha}{۱+\sin\alpha} = \frac{۱+\sin\alpha-۱+\sin^۲\alpha}{۱+\sin\alpha}$$

$$\frac{\sin\cancel{(۱+\sin\alpha)}}{\cancel{۱+\sin\alpha}} = \sin\alpha$$

۱۲۱

الف

$x - ۱ , x = -۳ , x = ۲$

x		- 3		- 1		2	
$(x-2)^{100}$	+		+		+	○	+
$(x+3)^{101}$	-	○	+		+		+
$(x+1)^{102}$	+		+	○	+		+
P	-	○	+	ت ن	+	○	+

ب

$x = \frac{۱}{۲} , x = -۱ , x = \frac{۱}{۳}$

x		−۱		$\frac{۱}{۳}$		$\frac{۱}{۲}$	
$(۱-۲x)$	+		+		+	○	−
$۳x^۲+۲x-۱$	+	○	−	○	+		+
P	+	○	−	○	+	○	−

پ

$$\begin{cases} -۲x^۲ + x - ۱ = ۰ \\ \Delta = ۱ - ۴(-۲)(-۱) < ۰ \text{ ریشه ندارد} \end{cases} \xrightarrow{a<۰} \text{همواره منفی است}$$

$(x+۱)^۳ = ۰ \Rightarrow x = -۱$

$x^۲ + ۸$ همواره مثبت است پس می‌توانیم از آن صرف‌نظر کنیم.

$$\begin{cases} -x^2+5x-6=0 \Rightarrow \Delta=25-4(-1)(-6)=1 \\ x_{1,2}=\frac{-5\pm1}{-2} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=3 \end{cases} \end{cases}$$

$$x^2+6x+9=0 \Rightarrow x=-3$$

x		-3		-1		2		3	
$-2x^2+x-1$	-		-		-		-		-
$(x+1)^3$	-		-	0	+		+		+
$-x^2+5x-6$	-		-		-	0	+	0	-
x^2+6x+9	+	0	+		+		+		+
P	-	تعریف نشده	-	0	+	تعریف نشده	-	تعریف نشده	+

۱۲۲

الف نادرست

ب درست

۱۲۳

الف

$$\frac{2}{(x-1)(x+1)}-\frac{x}{(x-1)(x-2)}$$

$$=\frac{2(x-2)-x(x+1)}{(x-1)(x+1)(x-2)}=\frac{2x-4-x^2-x}{(x-1)(x+1)(x-2)}=\frac{-x^2+x-4}{(x+1)(x-1)(x-2)}$$

ب

$$\frac{x}{x-1}+\frac{3}{x+1}-\frac{4x-2}{(x-1)(x+1)}=\frac{x(x+1)+3(x-1)-4x+2}{(x-1)(x+1)}=\frac{x^2+x+3x-3-4x+2}{(x-1)(x+1)}=\frac{x^2-1}{(x-1)(x+1)}=1$$

پ

$$\frac{\cancel{(a-b)}\,(a+b)}{b\,\cancel{(a-b)}}-\frac{b(a-b)}{b^2}=\frac{a+b}{b}-\frac{a-b}{b}=\frac{\cancel{a}+b-\cancel{a}+b}{b}=2$$

ت

$$\frac{a+1}{a-1}+\frac{a+2}{a+3}-\frac{a+7}{a^2+2a-3}=\frac{(a+1)(a+3)+(a-1)(a+2)-a-7}{(a-1)(a+3)}$$

$$=\frac{a^2+4a+3+a^2+a-2-a-7}{(a-1)(a+3)}=\frac{2a^2+4a-6}{(a-1)(a+3)}=\frac{2(a^2+2a-3)}{(a-1)(a+3)}=\frac{2\,\cancel{(a+3)}\,\cancel{(a-1)}}{\cancel{(a-1)}\,\cancel{(a+3)}}=2$$

۱۲۴

الف

$$\frac{x^2-3x+2}{x+1}>0$$

$$x^2-3x+2=0 \begin{cases} x=1 \\ x=2 \end{cases}$$

$$x+1=0 \Rightarrow x=-1$$

x		-1		1		2	
x^2-3x+2	+		+	0	-	0	+
$x+1$	-	0	+		+		+
	-	تعریف نشده	+	0	-	0	+

مجموعه جواب: $(-1,1)\cup(2,+\infty)$

ب

$$-1<\frac{2x+1}{3x-1}<2$$

$$I \quad \begin{cases} \frac{2x+1}{3x-1}<2 \Rightarrow \frac{2x+1-6x+2}{3x-1}<0 \Rightarrow \frac{-4x+3}{3x-1}<0 \end{cases}$$

$$II \quad \begin{cases} \frac{2x+1}{3x-1}>-1 \Rightarrow \frac{2x+1+3x-1}{3x-1}>0 \Rightarrow \frac{5x}{3x-1}>0 \end{cases}$$

$I)$

x		$\frac{1}{3}$		$\frac{3}{4}$	
$-4x+3$	+		+	○	-
$3x-1$	-	○	+		+
	-	ت ن	+	○	-

$\Rightarrow (-\infty , \frac{۱}{۳}) \cup (\frac{۳}{۴} , +\infty)$

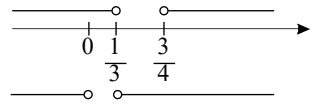
$II)$

x		0		$\frac{1}{3}$	
$5x$	-	○	+		+
$3x-1$	-		-	○	+
	+	○	-	ت ن	+

$\Rightarrow (-\infty , ۰) \cap (\frac{۱}{۳} , +\infty)$

از دو بازه پاسخ I و II اشتراک می‌گیریم:

$(-\infty , ۰) \cup (\frac{۳}{۴} , +\infty)$



پ

$$\frac{۳x-۴+x^۲-۸x-۱۰}{۳x-۴} \le ۰$$

$$\frac{x^۲-۵x-۱۴}{۳x-۴} \le ۰ \Rightarrow \frac{(x-۷)(x+۲)}{۳x-۴} \le ۰$$

x		-2		$\frac{4}{3}$		7	
$x-7$	-		-		-	○	+
$x+2$	-	○	+		+		+
$3x-4$	-		-	○	+		+
	-	○	+	ت ن	-	○	+

مجموعه جواب: $(-\infty , -۲] \cup (\frac{۴}{۳} , ۷]$

ت

$۲x-۵ \ge ۱ \Rightarrow ۲x \ge ۶ \Rightarrow x \ge ۳$

$۲(\frac{x}{۲}+۳ \le ۷) \Rightarrow x+۶ \le ۱۴ \Rightarrow x \le ۸ \xrightarrow{\cap} [۳ , ۸]$

۱۲۵

الف نادرست

ب نادرست

درست

پ

$-۴x^۲+۴x-۱=۰ \Rightarrow \Delta = ۱۶-۴(-۴)(-۱)=۰$

ت درست

۱۲۶ الف: ترتیبی ب: اسمی پ: اسمی ت: ترتیبی

۱۲۷ جامعه: دانش‌آموزان مدرسه

اعضای جامعه: هر دانش‌آموز مدرسه

نمونه: ۱ – دانش‌آموزان بلندتر از ۱۶۰ سانتی‌متر

۲ – دانش‌آموزان رشتهٔ تجربی

۱۲۸ الف) $S = \{۲, ۴, ۶, ۸, ۱۰\}$

ب) تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه ۵ عضوی: $۲^۵ = ۳۲$

پ) $A = \{۴, ۸\}$

۱۲۹

$$\binom{n}{۲} = ۲۸ \Rightarrow \frac{n!}{(n-۲)!۲!} = ۲۸ \Rightarrow \frac{n(n-۱)(n-۲)!}{(n-۲)!} = ۵۶ \Rightarrow n(n-۱) = ۵۶ \Rightarrow n = ۸$$

۱۳۰

الف) $۱ < ۲x - ۳ \leq ۳ \Rightarrow ۴ < ۲x \leq ۶ \Rightarrow ۲ < x \leq ۳ \Rightarrow x \in (۲, ۳]$

ب) $x + ۱ \leq ۵ - x < ۲x + ۳$

$I : x + ۱ \leq ۵ - x \Rightarrow ۲x \leq ۴ \Rightarrow x \leq ۲$

$II : ۵ - x < ۲x + ۳ \Rightarrow ۲ < ۳x \Rightarrow x > \frac{۲}{۳} \Rightarrow I \cap II : x \in (\frac{۲}{۳}, ۲]$

پ) $-۲ < \frac{۵ - x}{۲} < ۰ \Rightarrow -۴ < ۵ - x < ۰ \Rightarrow -۹ < -x < -۵ \Rightarrow ۵ < x < ۹ \Rightarrow x \in (۵, ۹)$

ت) $\frac{۴ - ۲x}{۳x + ۱} \geq ۰ \Rightarrow \begin{cases} ۴ - ۲x = ۰ \Rightarrow ۴ = ۲x \Rightarrow x = ۲ \\ ۳x + ۱ = ۰ \Rightarrow ۳x = -۱ \Rightarrow x = \frac{-۱}{۳} \end{cases}$

	$-\frac{1}{3}$		2	
$4-2x$	$+$	$+$	0	$-$
$3x+1$	$-$	0	$+$	$+$
$\frac{4-2x}{3x+1}$	$-$	ت ن	$+$	0	$-$

$\Rightarrow x \in (-\frac{۱}{۳}, ۲]$

ث) $x(x^۲ + ۴) < ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x^۲ + ۴ \quad \text{همواره مثبت} \end{cases}$

	0	
x	$-$	$+$
x^2+4	$+$	$+$
$x(x^2+4)$	$-$	$+$

$\Rightarrow x \in (-\infty, ۰)$

ج) $\frac{x^۳ - x}{x^۲ - ۲x + ۲} \leq ۰ \Rightarrow \frac{x(x^۲ - ۱)}{x^۲ - ۲x + ۲} \leq ۰ \Rightarrow \frac{x(x-۱)(x+۱)}{x^۲ - ۲x + ۲} \leq ۰$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x - ۱ = ۰ \Rightarrow x = ۱ \\ x + ۱ = ۰ \Rightarrow x = -۱ \\ x^۲ - ۲x + ۲ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \Delta = ۴ - ۴(۱)(۲) = -۴ \Rightarrow \text{همواره مثبت / جواب ندارد} \\ a > ۰ \end{cases} \end{cases}$$

	-1		0		1	
x	$-$	$-$	0	$+$	$+$	
$x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
x^2-2x+2	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	
$\frac{x^3-x}{x^2-2x+2}$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$\Rightarrow x \in (-\infty, -۱] \cup [۰, ۱]$

چ) $|۷ - ۲x| < ۱ \Rightarrow -۱ < ۷ - ۲x < ۱ \Rightarrow -۸ < -۲x < -۶$

$\Rightarrow -۴ < -x < -۳ \Rightarrow ۳ < x < ۴$

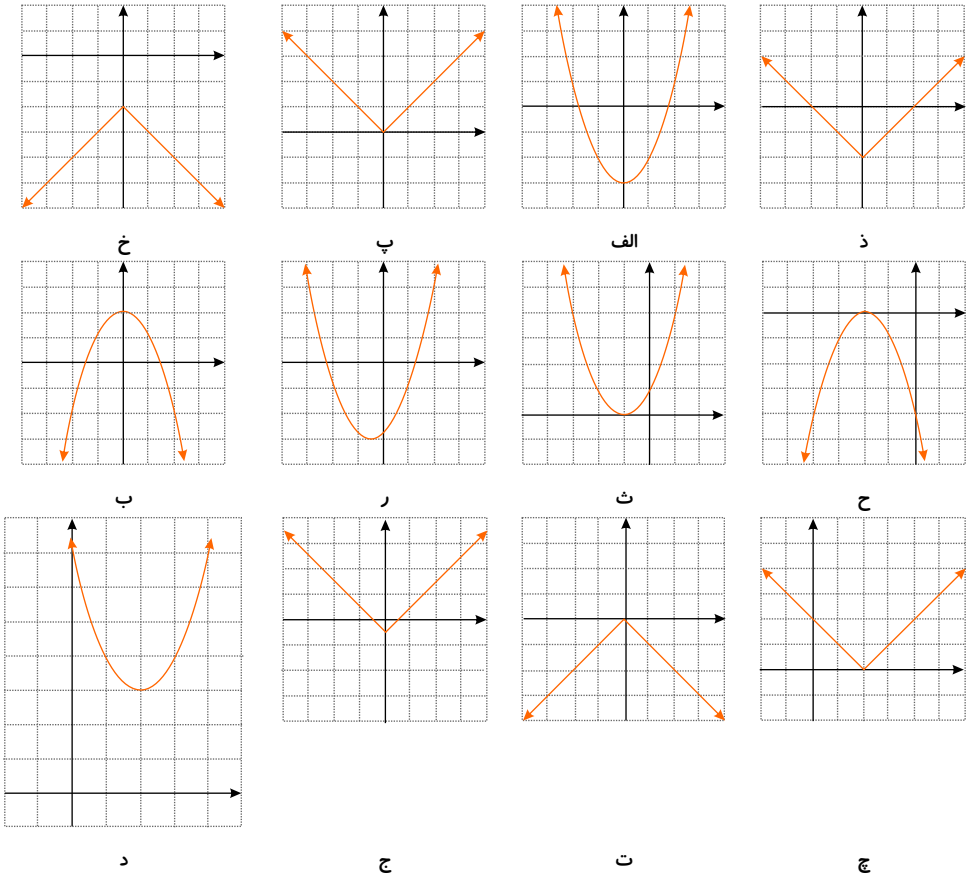
ح) $\left|\frac{x-۱}{۲} - ۱\right| \geq ۳ \Rightarrow \begin{cases} I : \frac{x-۱}{۲} - ۱ \geq ۳ \Rightarrow x - ۱ - ۲ \geq ۶ \Rightarrow x \geq ۹ \\ II : \frac{x-۱}{۲} - ۱ \leq -۳ \Rightarrow x - ۱ - ۲ \leq -۶ \Rightarrow x \leq -۳ \end{cases}$

$x \in (-\infty, -۳] \cup [۹, +\infty)$

۱۳۱

تابع	برد
الف	$[-۳, ۶]$
ب	$[-۷, ۲]$
پ	$[۰, ۳]$
ت	$[-۳, ۰]$
ث	$[۰, ۱۶]$
ج	$[-\frac{۱}{۲}, \frac{۵}{۲}]$
چ	$[۰, ۴]$
ح	$[-۲۵, ۰]$
خ	$[-۵, -۲]$
د	$[۳, ۱۹]$
ذ	$[-۲, ۱]$
ر	$[-۳, \frac{۳۷}{۴}]$

۱۳۲



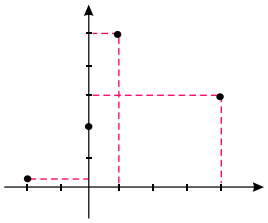
تابع	دامنه	برد
الف	$\mathbb{R}$	$[-۳, +\infty)$
ب	$\mathbb{R}$	$(-\infty, ۲]$
پ	$\mathbb{R}$	$[۰, +\infty)$
ت	$\mathbb{R}$	$(-\infty, ۰]$
ث	$\mathbb{R}$	$[۰, +\infty)$
ج	$\mathbb{R}$	$[-\frac{۱}{۲}, +\infty)$
چ	$\mathbb{R}$	$[۰, +\infty)$
ح	$\mathbb{R}$	$(-\infty, ۰]$
خ	$\mathbb{R}$	$(-\infty, -۲]$
د	$\mathbb{R}$	$[۳, +\infty)$
ذ	$\mathbb{R}$	$[-۲, +\infty)$
ر	$\mathbb{R}$	$[-۳, +\infty)$

۱۳۳

$g=\{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳),(۴,۴)\}$ $\quad f=\{(۱,۲),(۲,۳),(۳,۴),(۴,۱)\}$

۱۳۴

$$g=\left\{(۰,۲),(۱,۵),(-۲,\frac{۱}{۳}),(۴,۳)\right\}$$



۱۳۵ می‌دانیم: مفهوم تابع خطی $y=ax+b$ است.

$$\begin{matrix}(۱,۲)\\(-۳,۰)\end{matrix}\Rightarrow\begin{cases}۲=a+b\\۰=-۳a+b\end{cases}$$

$$۲=۴a\Rightarrow a=\frac{۱}{۲}$$

$$۲=a+b\Rightarrow ۲=\frac{۱}{۲}+b\Rightarrow b=\frac{۳}{۲}$$

$$y=\frac{۱}{۲}x+\frac{۳}{۲}$$

۱۳۶ خیر، زیرا خطوط موازی محور yها را در بی‌نهایت نقطه قطع می‌کند.

بله، زیرا خطوط موازی محور yها را در حداکثر یک نقطه قطع می‌کند.

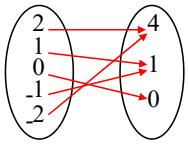
زمانی که خطوط موازی محور yها را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.

۱۳۷

$$P(۲۰,۳)\times ۲=\frac{۲۰!}{۱۷!}\times ۲=\frac{۲۰\times ۱۹\times ۱۸\times ۱۷!}{۱۷!}\times ۲=۱۳۶۸۰s$$

۱۳۸ یکان آن فرد و دهگان آن غیر صفر باشد؟

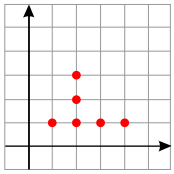
۱۳۹



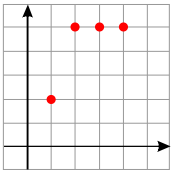
تابع است

$D=\{-۲,-۱,۰,۱,۲\}$

$R=\{۰,۱,۴\}$



تابع نیست



تابع است

$D=\{۱,۲,۳,۴\}$

$R=\{۲,۵\}$

۱۴۰ می‌دانیم: رابطه‌ای تابع است که به‌ازای هر ورودی فقط و فقط یک خروجی داشته باشد.

الف) تابع است.

ب) تابع است.

ج) تابع است.

د) تابع نیست: هر دانش‌آموز می‌تواند بیش از یک دوست داشته باشد.

هـ) تابع نیست: هر عدد، دو ریشهٔ دوم قرینهٔ یکدیگر دارد.

د) تابع است.

۱۴۱

الف) $\frac{۱}{\sin\theta}\times\tan\theta=\frac{۱}{\sin\theta}\times\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{۱}{\cos\theta}$

ب) $\frac{\cos\theta}{۱+\sin\theta}\times\frac{۱-\sin\theta}{۱-\sin\theta}=\frac{\cos\theta(۱-\sin\theta)}{(۱+\sin\theta)(۱-\sin\theta)}=\frac{\cos\theta(۱-\sin\theta)}{۱-\sin^{۲}\theta}=\frac{\cos\theta(۱-\sin\theta)}{\cos^{۲}\theta}$

$=\frac{۱-\sin\theta}{\cos\theta}$

پ) $\frac{۱+\tan\theta}{۱+\cot\theta}=\frac{۱+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{۱+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}=\frac{\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta}}{\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta}}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta$

ت) $۱-\frac{\cos^{۲}x}{۱+\sin x}=\frac{۱+\sin x-\cos^{۲}x}{۱+\sin x}=\frac{\sin x+(۱-\cos^{۲}x)}{۱+\sin x}=\frac{\sin x+\sin^{۲}x}{۱+\sin x}$

$$= \frac{\sin x(1+\sin x)}{(1+\sin x)} = \sin x$$

ث) $\frac{1}{\cos x} - \tan x = \frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1-\sin x}{\cos x} \times \frac{1+\sin x}{1+\sin x} = \frac{1-\sin^2 x}{\cos x(1+\sin x)}$

$$= \frac{\cos^2 x}{\cos x(1+\sin x)} = \frac{\cos x}{1+\sin x}$$

۱۴۲

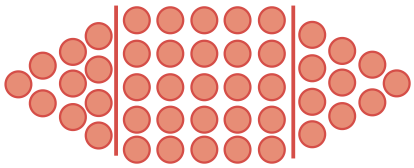
$\alpha = 60^\circ \Rightarrow \tan 60^\circ = \sqrt{3}, \cos 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \tan 60^\circ > \cot 60^\circ$

$\beta = 30^\circ \Rightarrow \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos 30^\circ = \sqrt{3} \Rightarrow \cot 60^\circ > \tan 60^\circ$

نتیجه: در ربع اول زوایایی که از 45° بیش‌تر باشند تانژانتشان بیش‌تر از کتانژانتشان است و زوایایی که از 45° کم‌تر باشند کتانژانتشان بیش‌تر از تانژانتشان است.

۱۴۳

الف: ۱, ۶, ۱۵, ۲۸, ۴۵, ۶۶



شکل(۵)

ب:

$\begin{cases} n=1 \\ t_n = 1 = 1^2 + 1 \times 0 \end{cases}$ $\begin{cases} n=2 \\ t_n = 6 = 2^2 + 2 \times 1 \end{cases}$ $\begin{cases} n=3 \\ t_n = 15 = 3^2 + 3 \times 2 \end{cases}$ $\begin{cases} n=n \\ t_n = n^2 + n(n-1) = 2n^2 - n \end{cases}$

پ:

$t_{10} = 2 \times 10^{-2} - 10 = 2 \times 100 - 10 = 200 - 10 = 190$

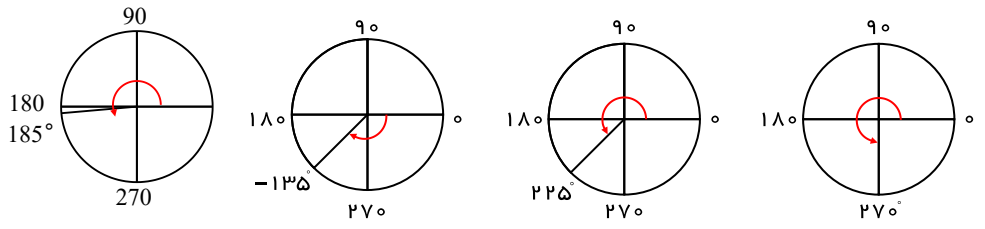
۱۴۴

می‌دانیم:

ربع اول:	$0 < \alpha < 90$
ربع دوم:	$90 < \alpha < 180$
ربع سوم:	$180 < \alpha < 270$
ربع چهارم:	$270 < \alpha < 360$

خود زوایای ۰°, ۹۰°, ۱۸۰°, ۲۷۰° هیچ‌کدام از ربع‌ها نیستند.

الف) ب) پ) ت)



هیچ‌کدام — ربع سوم — ربع سوم — ربع سوم

۱۴۵

الف: ۱۲ کاشی تیره

ب: ۶, ۸, ۱۰, ۱۲, ۱۴, ۱۶, ۱۸, ...

پ:

$\begin{cases} n=1 \\ t_n = 6 = 2 \times 3 = 2 \times (1+2) \end{cases}$, $\begin{cases} n=2 \\ t_n = 8 = 2 \times 4 = 2 \times (2+2) \end{cases}$, $\begin{cases} n=3 \\ t_n = 10 = 2 \times 5 = 2 \times (3+2) \end{cases}$

$\begin{cases} n=n \\ t_n = 2 \times (n+2) \end{cases} \Rightarrow t_n = 2n+4$

ت:

$n = 100 \Rightarrow t_n = 2 \times 100 + 4 = 200 + 4 = 204$

ث: بله

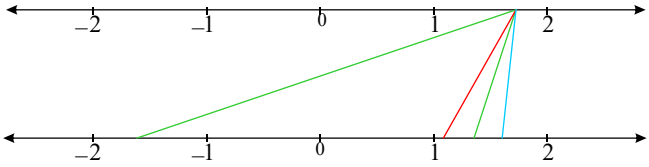
$t_n = 50 = 2n + 4 \Rightarrow 2n = 46 \Rightarrow n = 23$

۱۴۶ الف: اعداد بزرگتر از یک هرچه ریشهٔ بزرگتری از آنها بگیریم، کوچک‌تر می‌شوند.

ریشهٔ سوم: آبی

ریشهٔ چهارم مثبت و منفی: سبز

ریشهٔ پنجم: قرمز

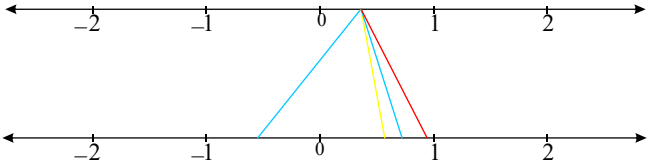


ب: اعداد بین صفر و یک هرچه ریشهٔ بزرگتری از آنها بگیریم، بزرگتر می‌شوند.

ریشهٔ پنجم: قرمز

ریشه‌های چهارم مثبت و منفی: آبی

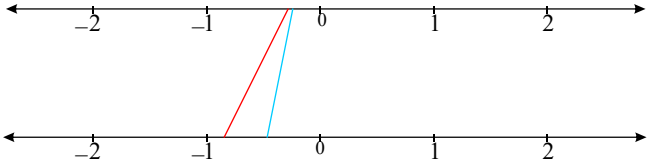
ریشهٔ سوم: زرد



پ: اعداد بین صفر و منفی یک هرچه ریشهٔ بزرگتری از آنها بگیریم کوچک‌تر می‌شوند.

ریشهٔ سوم: آبی

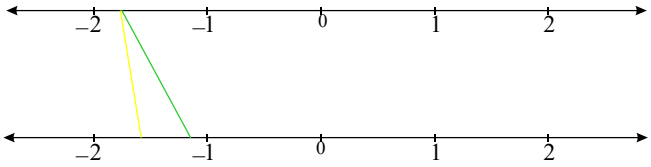
ریشهٔ پنجم: قرمز



ت: اعداد کوچک‌تر از منفی یک هرچه ریشهٔ بزرگتری از آنها بگیریم بزرگتر می‌شوند.

ریشهٔ سوم: زرد

ریشهٔ پنجم: سبز



۱۴۷

$\sqrt{۱۰} \simeq ۳٫۲$ $\sqrt[۳]{۲۵} \simeq ۲٫۹$ $\sqrt[۳]{۷٫۲۵} \simeq ۱٫۹$

$\sqrt[۵]{۱۶} \simeq ۱٫۷$ $\sqrt[۵]{۶۴} \simeq ۲٫۳$ $\sqrt[۴]{۹۰} \simeq ۳٫۱$

۱۴۸ نقطه‌ی اول را به هر یک از نقاط دیگر وصل می‌کنیم در این صورت ۱۹ وتر پدید می‌آید. با وصل کردن نقطه‌ی دوم به نقاط دیگر به غیر از نقطه‌ی اول ۱۸ وتر به دست می‌آید. سپس نقطه‌ی سوم را به نقاط دیگر غیر از نقاط اول و دوم وصل می‌کنیم ۱۷ وتر حاصل می‌شود. با ادامه‌ی این عمل داریم:

$$۱۹ + ۱۸ + ۱۷ + \cdots + ۲ + ۱ = \frac{۱۹(۱۹+۱)}{۲} = ۱۹۰$$

یادآوری: $۱ + ۲ + ۳ + \cdots + n = \frac{n(n+۱)}{۲}$

۱۴۹ الف) متغیر کمّی پیوسته ب) متغیر کمّی گسسته

الف) متغیری است که اگر دو مقدار a و b را بتواند اختیار کند، هر مقدار بین آن‌ها را نیز بتواند اختیار کند. برای مثال وزن یک فرد می‌تواند $۶۷kg$، $۶۸kg$ یا هر عددی بین این دو باشد.

ب) متغیر کمّی گسسته، متغیر کمّی‌ای است که پیوسته نباشد.

به‌عنوان مثال تعداد فرزندان یک خانواده یک متغیر گسسته است.

۱۵۰ متغیرهایی که قابل اندازه‌گیری نیستند، متغیرهای کیفی می‌گویند. به‌عنوان مثال گروه خونی افراد و پاسخ سؤال «میزان لذت بردن از آشپزی» متغیرهای کیفی‌اند.

۱۵۱ متغیرهایی که قابل اندازه‌گیری‌اند، متغیرهای کمّی گویند. به‌عنوان مثال تعداد فرزندان خانواده و وزن افراد متغیرهای کمّی‌اند.

۱۵۲ متغیر، ویژگی خاصی از اعضای یک جامعه است که بررسی و مطالعه می‌شود و معمولاً از یک عضو به عضو دیگر تغییر می‌کند.

عددی را که به این ویژگی یک عضو نسبت داده می‌شود، مقدار متغیر می‌گویند.

برای مثال در یک مدرسه، وزن و قد دانش یک دانش‌آموز به عنوان متغیر مربوط به دانش‌آموز است و برای مثال مقدار آن برای علی، $۷۰kg$ و $۱۸۰cm$ است.

۱۵۳ الف) درست

ب) درست

ج) نادرست: آمار، مجموعه‌ای از اعداد، ارقام و اطلاعات است.

۱۵۴

$$S = \left\{ \begin{array}{l} (ر,ر,۱)(ر,ر,۲)(ر,ر,۳)(ر,ر,۴)(ر,ر,۵)(ر,ر,۶) \\ (پ,پ,۱)(پ,پ,۲)(پ,پ,۳)(پ,پ,۴)(پ,پ,۵)(پ,پ,۶) \\ (پ,پ,ر)(پ,ر,پ) \\ (پ,ر,ر)(ر,پ,ر) \end{array} \right\}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۲}{۱۶} = \frac{۱}{۸}$$

۱۵۵ فضای نمونه‌ای عبارت است از:

$$S=\{(ر,۱),(پ,۱),(ر,۲),(پ,۲),(ر,۳),(پ,۳),(ر,۴),(پ,۴),(ر,۵),(پ,۵),(ر,۶),(پ,۶)\}$$

الف) اگر پیشامد زوج آمدن تاس را A بنامیم:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۶}{۱۲}=\frac{۱}{۲}$$

بالتبع پیشامد فرد آمدن تاس، A' است و برابر است با $P(A')=۱-P(A)=۱-\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۲}$

ب) اگر پیشامد رو آمدن سکه را B بنامیم:

$$P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۶}{۱۲}=\frac{۱}{۲}$$

بالتبع پیشامد پشت آمدن سکه، B' است و برابر است با: $P(B')=۱-P(B)=\frac{۱}{۲}$

ج) پیشامد تاس فرد و سکه پشت بیاید یعنی $(A'\cap B')$

$$P(A'\cap B')=\frac{n(A'\cap B')}{n(S)}=\frac{۳}{۱۲}$$

د) پیشامد تاس فرد یا سکه پشت بیاید یعنی $(A'\cup B')$

$$P(A'\cup B')=P(A')+P(B')-P(A'\cap B')=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}-\frac{۳}{۱۲}=\frac{۹}{۱۲}=\frac{۳}{۴}$$

۱۵۶ $\boxed{P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}}$

الف) $P(A)=\dfrac{\overset{\text{انتخاب } A}{\overset{\uparrow}{\binom{۱}{۱}}}\times\overset{\text{انتخاب دومین کالا}}{\overset{\uparrow}{\binom{۴}{۱}}}}{\binom{۵}{۲}}=\frac{۴}{۱۰}$

ب) $P(B)=\dfrac{\binom{۳}{۲}}{\binom{۵}{۲}}=\frac{۳}{۱۰}$

پ) $P(C)=\dfrac{\overset{\text{انتخاب } C}{\overset{\uparrow}{\binom{۱}{۱}}}\times\overset{\text{انتخاب دومین کالا}}{\overset{\uparrow}{\binom{۳}{۱}}}}{\binom{۵}{۲}}=\frac{۳}{۱۰}$

۱۵۷ $\boxed{P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}}$

$$n(S)=۶\times۶=۳۶$$

$$A=\{(۱,۲)(۱,۳)(۱,۴)(۱,۵)(۱,۶)(۲,۳)(۲,۴)(۲,۵)(۲,۶)(۳,۴)(۳,۵)(۳,۶)(۴,۵)(۴,۶)(۵,۶)\}$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۵}{۳۶}=\frac{۵}{۱۲}$$

۱۵۸ الف) برای تاس آبی ۶ حالت و برای تاس قرمز هم ۶ حالت وجود دارد (باتوجه به متفاوت بودن رنگ‌ها) طبق اصل ضرب (چون باهم پرتاب می‌شوند) $۶\times۶=۳۶$ حالت دارد پس تعداد اعضای فضای نمونه‌ای برابر ۳۶ است.

ب) با فرض این‌که مؤلفه اول، تاس آبی باشد:

$$A=\{(۱,۱)(۱,۳)(۱,۵)(۳,۱)(۳,۳)(۳,۵)(۵,۱)(۵,۳)(۵,۵)\}$$

$$B=\left\{\begin{matrix}(۲,۱),(۲,۲),(۲,۳),(۲,۴),(۲,۵),(۲,۶)\\(۴,۱),(۴,۲),(۴,۳),(۴,۴),(۴,۵),(۴,۶)\\(۶,۱),(۶,۲),(۶,۳),(۶,۴),(۶,۵),(۶,۶)\end{matrix}\right\}$$

$$C=\left\{\begin{matrix}(۱,۶),(۲,۵),(۲,۶),(۳,۴),(۳,۵),(۳,۶),(۴,۳),(۴,۴),(۴,۵),(۴,۶),(۵,۲),(۵,۳)\\(۵,۴),(۵,۵),(۵,۶),(۶,۱),(۶,۲),(۶,۳),(۶,۴),(۶,۵),(۶,۶)\end{matrix}\right\}$$

پ)

$$A-B=\{(۱,۱)(۱,۳)(۱,۵)(۳,۱)(۳,۳)(۳,۵)(۵,۱)(۵,۳)(۵,۵)\}=A$$

$$A \cap C = \{(۳,۵)(۵,۳)(۵,۵)\}$$

$$B \cup C = \left\{ \begin{matrix} (۱,۶)(۲,۱)(۲,۲)(۲,۳)(۲,۴)(۲,۵)(۲,۶)(۳,۴)(۳,۵)(۳,۶)(۴,۱)(۴,۲) \\ (۴,۳)(۴,۴)(۴,۵)(۴,۶)(۵,۲)(۵,۳)(۵,۴)(۵,۵)(۵,۶)(۶,۱)(۶,۲)(۶,۳)(۶,۴) \\ (۶,۵)(۶,۶) \end{matrix} \right\}$$

$$A' = S - A = \left\{ \begin{matrix} (۱,۲)(۱,۴)(۱,۶)(۲,۱)(۲,۲)(۲,۳)(۲,۴)(۲,۵)(۲,۶) \\ (۳,۲)(۳,۴)(۳,۶)(۴,۱)(۴,۲)(۴,۳)(۴,۴)(۴,۵)(۴,۶) \\ (۵,۲)(۵,۴)(۵,۶)(۶,۱)(۶,۲)(۶,۳)(۶,۴)(۶,۵)(۶,۶) \end{matrix} \right\}$$

$$B' = S - B = \left\{ \begin{matrix} (۱,۱)(۱,۲)(۱,۳)(۱,۴)(۱,۵)(۱,۶)(۳,۱)(۳,۲)(۳,۳)(۳,۴)(۳,۵)(۳,۶) \\ (۵,۱)(۵,۲)(۵,۳)(۵,۴)(۵,۵)(۵,۶) \end{matrix} \right\}$$

$$A' - B' = \left\{ \begin{matrix} (۱,۲)(۱,۴)(۱,۶)(۲,۱)(۲,۲)(۲,۳)(۲,۴)(۲,۵)(۲,۶) \\ (۳,۲)(۳,۴)(۳,۶)(۴,۱)(۴,۲)(۴,۳)(۴,۴)(۴,۵)(۴,۶) \\ (۵,۲)(۵,۴)(۵,۶)(۶,۱)(۶,۲)(۶,۳)(۶,۴)(۶,۵)(۶,۶) \end{matrix} \right\} = A'$$

$$A' \cap C = \left\{ \begin{matrix} (۱,۶)(۲,۵)(۲,۶)(۳,۴)(۳,۶)(۴,۳)(۴,۴)(۴,۵)(۴,۶) \\ (۵,۲)(۵,۴)(۵,۶)(۶,۱)(۶,۲)(۶,۳)(۶,۴) \\ (۶,۵)(۶,۶) \end{matrix} \right\}$$

ت)

سازگار	$A, (A-B): \ A \cap (A-B) = A \cap A = A \neq \varnothing$
ناسازگار	$B, (A-B): B \cap (A-B) = B \cap A = \varnothing$
سازگار	$C, (A-B): C \cap (A-B) = C \cap A \neq \varnothing$
سازگار	$A, (A \cap C): A \cap (A \cap C) = A \cap C \neq \varnothing$
ناسازگار	$B, (A \cap C): B \cap (A \cap C) = \varnothing$
سازگار	$C, (A \cap C): C \cap (A \cap C) \neq \varnothing$
سازگار	$A, (B \cup C): \ A \cap (B \cup C) \neq \varnothing$
سازگار	$B, (B \cup C): \ B \cap (B \cup C) = B \neq \varnothing$
سازگار	$C, (B \cup C): \ C \cap (B \cup C) = C \neq \varnothing$
سازگار	$A, (A'-B'): \ A \cap (A'-B') = A \cap A' = \varnothing$
ناسازگار	$B, (A'-B'): \ B \cap (A'-B') = B \cap A' \neq \varnothing$
سازگار	$C, (A'-B'): \ C \cap (A'-B') = C \cap A' \neq \varnothing$
سازگار	$A, (A' \cap C): \ A \cap (A' \cap C) = \varnothing$
ناسازگار	$B, (A' \cap C): B \cap (A' \cap C) \neq \varnothing$
سازگار	$C, (A' \cap C): \ C \cap (A' \cap C) \neq \varnothing$

۱۵۹ دو پیشامد A, C در شکل سمت راست ناسازگارند چرا که اشتراک آن‌ها تهی است. اجتماع آن‌ها برابر است با:

$$A \cup C = \{۱,۲\} \cup \{۴,۵\} = \{۱,۲,۴,۵\}$$

باتوجه به شکل سمت چپ، $\{۱,۲,۴,۵\}$ اشتراک دو پیشامد D و E است.

$$D \cap E = \{۱,۲,۴,۵\}$$

۱۶۰ برای فرد بودن مجموع دو عدد، یکی باید زوج باشد و دیگری فرد

$$A = \{(۱,۲), (۱,۴), (۲,۳)(۲,۵), (۳,۴), (۴,۵)\}$$

دقت کنید $(۲,۱)$ با $(۱,۲)$ فرقی ندارد چرا که مهره‌ها یکسانند و جمع آن‌ها در هر دو حالت برابر است.

۱۶۱ مجموعه‌ی شامل همه‌ی حالت‌های ممکن برای یک آزمایش را، فضای نمونه‌ای می‌نامند.

اگر این مجموعه را S بنامیم، هر زیر مجموعه‌ی S مانند A را یک پیشامد تصادفی در S می‌نامیم.

۱۶۲

الف) $$\frac{۲n}{n!} - \frac{۱}{(n-۱)!} = \frac{۲n}{n(n-۱)!} - \frac{۱}{(n-۱)!} = \frac{۲n-n}{n(n-۱)!} = \frac{n}{n(n-۱)!} = \frac{۱}{(n-۱)!}$$

ب) $$\frac{۳}{۴!} + \frac{۵}{۵!} = \frac{۳}{۴!} + \frac{۵}{۵ \times ۴!} = \frac{۳}{۴!} + \frac{۱}{۴!} = \frac{۴}{۴!} = \frac{۴}{۴ \times ۳!} = \frac{۱}{۳!} = \frac{۱}{۶}$$

پ) $$(n+۲)! - (n+۱)! = (n+۲)(n+۱)! - (n+۱)! = (n+۱)!\,((n+۲)-۱) = (n+۱)(n+۱)!$$

ت) $\frac{۱}{۱۲}(۱۰! + ۱۱!) = \frac{۱}{۱۲}(۱۰! + ۱۱ \times ۱۰!) = \frac{۱}{۱۲}(۱۰!(۱ + ۱۱)) = \frac{۱}{۱۲}(۱۲ \times ۱۰!)$
$= ۱۰! = ۳۶۲۸۸۰۰$

۱۶۳ درست است:

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$C(n,r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

$$\binom{n}{r} \times r! = \frac{n!}{(n-r)!\,r!} \times r! = \frac{n!}{(n-r)!} = P(n,r)$$

۱۶۴

$y = ax^۲ + bx + c$

$(۰, -۳) : \ -۳ = c$

$(۱, -۴) : a + b - ۳ = -۴ \ \Rightarrow \ a + b = -۱ \Rightarrow ۲a + ۲b = -۲$

$(۲, -۳) : ۴a + ۲b - ۳ = -۳ \ \Rightarrow \ ۴a + ۲b = ۰$

$$\begin{cases} ۲a + ۲b = -۲ \\ ۴a + ۲b = ۰ \end{cases}$$

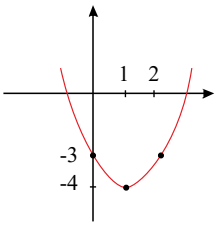
$-۲a = -۲ \Rightarrow \boxed{a = ۱}$

$۲a + ۲b = -۲ \Rightarrow ۲ + ۲b = -۲ \Rightarrow ۲b = -۴ \Rightarrow \boxed{b = -۲}$

$y = x^۲ - ۲x - ۳$

دامنه $= \mathbb{R}$

برد $= [-۴, +\infty)$



۱۶۵ یک تابع چند ضابطه‌ای داریم:

$$f(x) = \begin{cases} (x-۳)^۲ + ۴ & x > ۳ \\ -۲ & x = ۳ \\ ۴ & ۲ \le x < ۳ \\ x^۲ & -۲ \le x \le ۲ \\ -۲ & x < -۲ \end{cases}$$

$f(۴) = (۴-۳)^۲ + ۴ = ۱^۲ + ۴ = ۱ + ۴ = ۵$

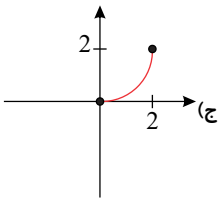
$f(-۳) = -۲ \qquad f(۳) = -۲ \qquad f(۱) = ۱^۲ = ۱$

۱۶۶

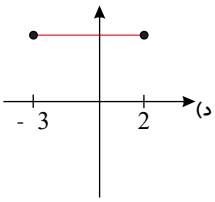
الف) $f(x) = \frac{۳x^۳}{۲} - x^۲ + x - ۱$ مثال دیگر نیز دارد.

ب) $f(x) = \{(۱,۱), (۲,۲), (۳,۳)(۴,۴)\}$ مثال دیگر ندارد.

ج) مثال دیگر دارد.



د) مثال دیگر دارد.



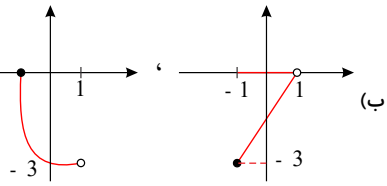
۱۶۷ الف) چند جمله‌های جبری از یک متغیر

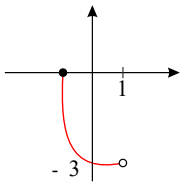
ب) همانی، $f(x) = x$ یا $y = x$

ج) تنها شامل یک عضو، $f(x) = k$

د) هر مقدار در دامنه، قدر مطلق آن در برد

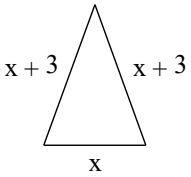
۱۶۸ الف) $f(x) = x \ , \ g(x) = x + ۱$ هر دو دامنه و بردشان $\mathbb{R}$ است اما هیچ دو زوج مرتب مشترکی ندارند.

ب)


بی نهایت


۱۶۹

باتوجه به شکل قابل داریم:



$$P = x+۳+x+۳+x = ۳x+۶$$

$$\boxed{P = ۳x+۶}$$

۱۷۰

$$|x-۱| < ۵x^۲ \to -۵x^۲ < x-۱ < ۵x^۲ \to \begin{cases} x-۱ < ۵x^۲ & (I) \\ -۵x^۲ < x-۱ & (II) \end{cases}$$

$$(I): x-۱ < ۵x^۲ \Rightarrow ۵x^۲ - x + ۱ > ۰ \to \Delta = ۱ - ۴(۵)(۱) = ۱ - ۲۰ = -۱۹$$

$$\xrightarrow[\Delta<۰]{a>۰} \quad \begin{array}{c|c} x & y \\ \hline ۵x^۲ - x + ۱ & + \end{array} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x \in (-\infty, +\infty)}$$

$$(II): -۵x^۲ < x-۱ \Rightarrow ۵x^۲ + x - ۱ > ۰ \to \Delta = ۱ - ۴(۵)(-۱) = ۲۱$$

$$x = \frac{-۱ \pm \sqrt{۲۱}}{۱۰}$$

x	$\frac{-1-\sqrt{21}}{10}$		$\frac{-1+\sqrt{21}}{10}$	
$5x^2+x-1$	+	۰	−	۰ +

$$\boxed{x \in (-\infty, \frac{-۱-\sqrt{۲۱}}{۱۰}) \cup (\frac{-۱+\sqrt{۲۱}}{۱۰}, +\infty)}$$

$$(I) \cap (II) = (-\infty, \frac{-۱-\sqrt{۲۱}}{۱۰}) \cup (\frac{-۱+\sqrt{۲۱}}{۱۰}, +\infty)$$

۱۷۱ دو نامعادله حل می‌کنیم و جواب‌ها را اشتراک می‌گیریم:

$$\underbrace{\frac{x-۱}{x} > \overbrace{\frac{x+۱}{x+۲}}^{I} > \frac{x+۳}{x+۴}}_{II}$$

$$(I): \frac{x+۱}{x+۲} > \frac{x+۳}{x+۴} \Rightarrow \frac{x+۱}{x+۲} - \frac{x+۳}{x+۴} > ۰ \Rightarrow \frac{(x+۱)(x+۴)-(x+۳)(x+۲)}{(x+۲)(x+۴)} > ۰$$

$$\frac{x^۲+۵x+۴-(x^۲+۵x+۶)}{(x+۲)(x+۴)} > ۰ \Rightarrow \frac{x^۲+۵x+۴-x^۲-۵x-۶}{(x+۲)(x+۴)} > ۰$$

x		-4		-2	
$x+2$	−		−	۰	+
$x+4$	−	۰	+		+
$(x+2)(x+4)$	+	۰	−	۰	+

$$\Rightarrow \frac{-۲}{(x+۲)(x+۴)} > ۰ \xrightarrow[\text{عبارت مثبت}]{\text{صورت منفی}} \text{مخرج منفی}$$

$$\Rightarrow -۴ < x < -۲$$

$$(II): \frac{x-۱}{x} > \frac{x+۱}{x+۲} \Rightarrow \frac{x-۱}{x} - \frac{x+۱}{x+۲} > ۰ \Rightarrow \frac{(x-۱)(x+۲)-x(x+۱)}{x(x+۲)} > ۰$$

$$\frac{x^۲+x-۲-(x^۲+x)}{x(x+۲)} > ۰ \Rightarrow \frac{x^۲+x-۲-x^۲-x}{x(x+۲)} > ۰ \Rightarrow \frac{-۲}{x(x+۲)} > ۰ \xrightarrow[\text{عبارت مثبت}]{\text{صورت منفی}} \text{مخرج منفی}$$

x		−۲		۰	
x	−		−	۰	+
(x + 2)	−	۰	+		+
x(x + 2)	+	۰	−	۰	+

$-۲ < x < ۰$

نامعادله جواب ندارد $I \cap II = (-۴, -۲) \cap (-۲, ۰) = \varnothing$

۱۷۲ می‌دانیم عبارت $y = ax^۲ + bx + c$ زمانی همواره منفی خواهد بود که: $\begin{cases} a < ۰ \\ \Delta < ۰ \end{cases}$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\begin{cases} a < ۰ \ (I) \\ (a-۱)^۲ - ۴(a)(\frac{-۱}{۲} + \frac{۱}{۲a}) = a^۲ - ۲a + ۱ + \frac{۴a}{۲} - \frac{۴a}{۲a} < ۰ \end{cases}$$

$a^۲ - ۲a + ۱ + ۲a - ۲ < ۰ \Rightarrow a^۲ - ۱ < ۰$

$a^۲ - ۱ = ۰ \Rightarrow a^۲ = ۱ \Rightarrow a = \pm ۱$

a		−۱		۱	
a^2-1	+	۰	−	۰	+

$\Rightarrow \boxed{-۱ < a < ۱} \ (II)$

$\boxed{I, II} \Rightarrow \boxed{-۱ < a < ۰}$

۱۷۳ به هر معادله‌ای که پس از ساده‌سازی، بزرگترین توان متغیر آن دو باشد، معادله‌ی درجه‌ی دوم گویند.

$\underbrace{ax^۲ + bx + c = ۰}_{\text{معادله‌ی درجه‌ی دوم}}, \ (a \neq ۰), \ (a, b, c \in \mathbb{R})$

۱۷۴

$$\begin{aligned} a^۲ - b^۲ &= (a-b)(a+b) \\ a^۳ - b^۳ &= (a-b)(a^۲ + ab + b^۲) \\ a^۳ + b^۳ &= (a+b)(a^۲ - ab + b^۲) \end{aligned}$$

الف) $\frac{x^۳ - ۲۷}{x^۲ - ۹} = \frac{\cancel{(x-۳)}(x^۲ + ۳x + ۹)}{\cancel{(x-۳)}(x+۳)} = \frac{x^۲ + ۳x + ۹}{x+۳}$

ب) $\frac{x^۲ + ۳x}{x^۲ - ۹} = \frac{x\cancel{(x+۳)}}{\cancel{(x+۳)}(x-۳)} = \frac{x}{x-۳}$

پ) $\frac{a^۳ - b^۳}{a^۲ - b^۲} = \frac{\cancel{(a-b)}(a^۲ + ab + b^۲)}{\cancel{(a-b)}(a+b)} = \frac{a^۲ + ab + b^۲}{a+b}$

ت) $\frac{(a+b)(a^۳ - b^۳)}{a^۴ - b^۴} = \frac{(a+b)(a-b)(a^۲ + ab + b^۲)}{(a^۲ - b^۲)(a^۲ + b^۲)} = \frac{\cancel{(a+b)}\cancel{(a-b)}(a^۲ + b^۲ + ab)}{\cancel{(a-b)}\cancel{(a+b)}(a^۲ + b^۲)}$

$= \frac{a^۲ + b^۲ + ab}{a^۲ + b^۲} = \frac{a^۲ + b^۲}{a^۲ + b^۲} + \frac{ab}{a^۲ + b^۲} = ۱ + \frac{ab}{a^۲ + b^۲}$

۱۷۵

$$\begin{aligned} (a+b)^۳ &= a^۳ + ۳a^۲b + ۳ab^۲ + b^۳ \\ (a-b)^۳ &= a^۳ - ۳a^۲b + ۳ab^۲ - b^۳ \\ (a+b)(a^۲ - ab + b^۲) &= a^۳ + b^۳ \\ (a-b)(a^۲ + ab + b^۲) &= a^۳ - b^۳ \end{aligned}$$

الف) $(۲x - \frac{y}{۲})^۳ \overset{\substack{a = ۲x \\ b = \frac{y}{۲}}}{=\!=\!=} (۲x)^۳ - ۳(۲x)^۲(\frac{y}{۲}) + ۳(۲x)(\frac{y}{۲})^۲ - (\frac{y}{۲})^۳$

$= ۸x^۳ - ۳ \times ۴x^۲ \times \frac{y}{۲} + ۳ \times ۲x \times \frac{y^۲}{۴} - \frac{y^۳}{۸} = ۸x^۳ - ۶x^۲y + \frac{۳xy^۲}{۲} - \frac{y^۳}{۸}$

ب) $(۳+۲y)^۳ \overset{\substack{a=۳\\b=۲y}}{=\!=\!=} ۳^۳ + ۳(۳)^۲(۲y) + ۳(۳)(۲y)^۲ + (۲y)^۳$

$= ۲۷ + ۳ \times ۹ \times ۲y + ۳ \times ۳ \times ۴y^۲ + ۸y^۳ = ۲۷ + ۵۴y + ۳۶y^۲ + ۸y^۳$

پ) $(x+۲)(x^۲ - ۲x + ۴) = x^۳ + ۸$

ت) $(x - \frac{۱}{۲})(x^۲ + \frac{x}{۲} + \frac{۱}{۴}) = x^۳ - \frac{۱}{۸}$

ث) $(x^۲+۲)(x^۴+۲x^۲+۴)(x^۲-۲)(x^۴-۲x^۲+۴)$

$= (x^۲+۲)(x^۴-۲x^۲+۴) \times (x^۲-۲)(x^۴+۲x^۲+۴) = (x^۶+۸) \times (x^۶-۸) \overset{\text{مزدوج}}{=\!=\!=} x^{۱۲} - ۶۴$

۱۷۶

$\sqrt[kn]{a^{km}} = \sqrt[n]{a^m}$ ، $a \geq ۰$ ، $n, m, k \in \mathbb{N}$

$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ ، $a, b \geq ۰$ ، $n \in \mathbb{N}$ زوج

ابتدا فرجه‌ها را یکسان می‌کنیم:

$$\sqrt[۲]{(\sqrt{۲}-۱)} = \sqrt[۲\times۲]{(\sqrt{۲}-۱)^۲} = \sqrt[۴]{(\sqrt{۲}-۱)^۲}$$

$$= \sqrt[۴]{۲+۱-۲\sqrt{۲}} = \sqrt[۴]{۳-۲\sqrt{۲}}$$

$$\sqrt{(۲-۱)}\sqrt[۴]{۳+۲\sqrt{۲}} = \sqrt[۴]{۳-۲\sqrt{۲}}\sqrt[۴]{۳+۲\sqrt{۲}} = \sqrt[۴]{(۳-۲\sqrt{۲})(۳+۲\sqrt{۲})}$$

$$= \sqrt[۴]{۹-۸} = \sqrt[۴]{۱} = ۱$$

۱۷۷

$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ و $\sqrt[n]{a^n} = a$

که اگر n زوج بود $\leftarrow a \geq ۰$

الف) $\sqrt{۳۲} = \sqrt{۴ \times ۸} = \sqrt{۴ \times ۴ \times ۲} = \sqrt{۴} \times \sqrt{۴} \times \sqrt{۲} = ۲ \times ۲ \times \sqrt{۲} = ۴\sqrt{۲}$

یا می‌توان نوشت

$$\sqrt{۳۲} = \sqrt{۱۶ \times ۲} = \sqrt{۱۶} \times \sqrt{۲} = ۴\sqrt{۲}$$

ب) $\sqrt{۲۰} = \sqrt{۴ \times ۵} = \sqrt{۴} \times \sqrt{۵} = ۲\sqrt{۵}$

۳۷ عدد اول است و نمی‌توان آن‌را به صورت حاصل‌ضرب یک عدد مربع کامل در عددی دیگر نوشت.

پ) $\sqrt{۳۷} = \sqrt{۳۷}$

ت) $\sqrt{۵۲} = \sqrt{۴ \times ۱۳} = \sqrt{۴} \times \sqrt{۱۳} = ۲\sqrt{۱۳}$

ث) $\sqrt{۷۲} = \sqrt{۲ \times ۳۶} = \sqrt{۲} \times \sqrt{۳۶} = ۶\sqrt{۲}$

ج) $\sqrt{۳۶} = ۶$

چ) $\sqrt{۴۴} = \sqrt{۴ \times ۱۱} = \sqrt{۴} \times \sqrt{۱۱} = ۲\sqrt{۱۱}$

ح) $\sqrt{۳۳} = \sqrt{۳ \times ۱۱} = \sqrt{۳۳}$

می‌بینیم ۳۳ به شکل ساده‌تری قابل نوشتن نیست چرا که با تجزیه‌ی آن به ۱۱×۳ به دو عدد اول که مربع کامل نیستند بر می‌خوریم و در نتیجه:

$\sqrt{۳۳} = \sqrt{۳۳}$

خ) $\sqrt{۲۴} = \sqrt{۴ \times ۶} = \sqrt{۴} \times \sqrt{۶} = ۲\sqrt{۶}$

د) $\sqrt{۱۲} = \sqrt{۴ \times ۳} = ۲\sqrt{۳}$

باتوجه به مثال‌های بالا درمی‌یابیم برای ساده‌سازی یک عدد زیر رادیکال به فرجه‌ی ۲ باید آن را به صورت حاصل‌ضرب عددی در یک عدد مربع کامل نوشت و بخش مربع کامل آن‌را از زیر رادیکال خارج کرد.

۱۷۸

اگر n فرد باشد:

$$(\sqrt[n]{a})^n = \underbrace{\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{a} \times \cdots \times \sqrt[n]{a}}_{n \text{ بار}} \overset{*}{=\!=} \sqrt[n]{a^n} = a$$

علامت a اهمیتی ندارد.

$*: \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

اگر n زوج باشد و $a \geq ۰$

باتوجه به اینکه زیررادیکال با فرجه‌ی زوج تنها اعداد بزرگتر مساوی صفر قرار می‌گیرند.

$$(\sqrt[n]{a})^n = \sqrt[n]{a^n} = |a| \overset{a \geq ۰}{=\!=\!=} a \qquad a \geq ۰$$

پس می‌توان گفت:

در صورت فرد بودن فرجه تساوی همواره برقرار است.

اما اگر فرجه زوج بود، a باید بزرگتر مساوی صفر باشد تا تساوی برقرار شود.

۱۷۹ الف) $\sqrt[n]{a^n} = |a|$ (n زوج) زیررادیکال به فرجه‌ی زوج هرگز عدد منفی قرار نمی‌گیرد.

ب) $\sqrt[n]{a^n} = a$ (n فرد) رادیکال با فرجه‌ی فرد محدودیتی ندارد.

۱۸۰ الف) $۲۵۶, -۴$

$$۴^۴ = ۲۵۶ \rightarrow \sqrt[۴]{۲۵۶} = ۴$$
$$-\sqrt[۴]{۲۵۶} = -۴$$

ب) ۲

$$\sqrt[۴]{۸۱} = ۳ \rightarrow a = ۳ \Rightarrow a^۲ - ۷ = ۹ - ۷ = ۲$$

۱۸۱ الف) $a:۳ \quad b:۴ \quad c:۵ \quad d:۴$

اعداد مثبت بزرگتر از یک هر چه زیر رادیکال با فرجه‌ی بزرگتری قرار بگیرند(ریشهٔ بزرگتر)، عدد کوچکتری حاصل می‌کنند.

و همچنین، دو ریشه چهارم قرینه یکدیگر دارند.

ب) $a:۵ \quad b:۴ \quad c:۳ \quad d:۴$

اعداد مثبت بین صفر و یک، هرچه رادیکال با فرجه‌ی بزرگتری از آنها بگیریم(ریشهٔ بزرگتر) عددی بزرگتر حاصل می‌شود.

و همچنین، دو ریشه چهارم قرینه یکدیگر دارند.

پ) $a:۳ \quad b:۵$

اعداد بین صفر و منفی یک، هرچه زیر رادیکال با فرجه‌ی فرد بزرگتری قرار بگیرند(ریشهٔ بزرگتر) عدد کوچکتری حاصل می‌کنند.

و در اعداد منفی هرچه به سمت چپ روی محور حرکت کنیم، عدد کوچکتر می‌شود. ضمن اینکه اعداد منفی، تنها ریشه‌های فرد دارند.

ت) $a:۵ \quad b:۳$

اعداد منفی کوچکتر از منفی یک هرچه رادیکال با فرجه‌ی بزرگتری از آنها بگیریم(ریشهٔ بزرگتر)، عدد بزرگتری حاصل می‌کنند.

با توجه به اینکه هرچه روی محور اعداد منفی به سمت چپ حرکت کنیم عدد ما کوچکتر می‌شود و اعداد منفی تنها ریشه‌های فرد دارند.

۱۸۲

الف) $\sqrt{۱۲} = ۳٫۴۶$ ب) $\sqrt[۳]{۱۲} = ۲٫۲۸$ پ) $\sqrt[۴]{۱۲} = ۱٫۸۶$ ت) $\sqrt[۵]{-۱۲} = -۱٫۶۴$

ث) $\sqrt[۳]{۲۵} = ۲٫۹۲$ ج) $\sqrt[۳]{-۲۷} = -۳$ چ) $\sqrt{۳۰} = ۵٫۴۷$

۱۸۳

الف) $\sqrt{۳۰} : \sqrt{۲۵} > \sqrt{۳۰} > \sqrt{۳۶} \rightarrow ۵ > \sqrt{۳۰} > ۶$: عددی بین ۵ و ۶

ب) $-\sqrt{۳۷}$: عددی بین ۶- و ۷-

پ) $\sqrt{۸۵}$: عددی بین ۹ و ۱۰

ت) $\sqrt[۳]{۸} = ۲$

ث) $\sqrt[۳]{-۸} = -۲$

ج) $\sqrt[۳]{۳۰}$: عددی بین ۳ و ۴

چ) $\sqrt[۳]{-۲۷} = -۳$

ح) $\sqrt{۲۷}$: عددی بین ۵ و ۶

خ) $\sqrt[۴]{۲۵۶} = ۴$

د) $\sqrt{۲۵۶} = ۱۶$

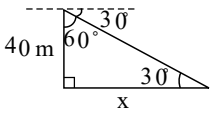
ذ) $\sqrt[۳]{۱} = ۱$

ر) $\sqrt[۵]{-۱} = -۱$

ز) $\sqrt{۱} = ۱$

ژ) $\sqrt[۳]{-۱} = -۱$

۱۸۴ با توجه به شکل داریم:



$$\tan ۳۰^\circ = \frac{۴۰}{x} = \frac{\sqrt{۳}}{۳} \rightarrow x = \frac{۱۲۰\sqrt{۳}}{۳} = ۴۰\sqrt{۳}$$

۱۸۵

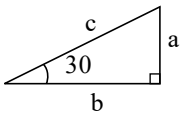
الف) درست: اگر $\alpha = ۳۰$ و $\beta = ۶۰$ باشد:

$$\sin \alpha = \cos ۶۰ = \frac{۱}{۲}$$

یا اگر $\beta = \alpha = ۴۵$ باشد:

$$\sin \alpha = \cos \beta = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

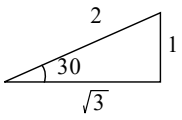
ب) درست:



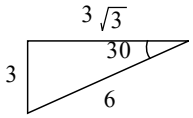
$$\sin ۳۰ = \frac{a}{c} = \frac{۱}{۲} \rightarrow a = \frac{c}{۲}$$

۱۸۶ الف) ۴۵° ب) ۳۰° پ) ۶۰°

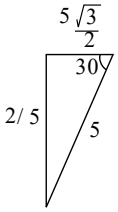
۱۸۷ با در نظر گرفتن زاویه‌ی ۳۰° در سه مثلث مختلف و مقایسه نسبت‌های مثلثاتی این زاویه داریم:



$\sin ۳۰^\circ = \frac{۱}{۲}$



$\sin ۳۰^\circ = \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲}$



$\sin ۳۰^\circ = \frac{۲/۵}{۵} = \frac{۱}{۲}$

نسبت‌های مثلثاتی برای هر زاویه یکتاست.

۱۸۸

جمله عمومی دنباله هندسی

$a_n = a_۱ a^{n-۱}$

$a_۱$: جمله اول دنباله , q : قدر نسبت

$t_n = t_۱ r^{n-۱} \Rightarrow t_n = ۲۰ \times ۲^{۱۰-۱} = ۲۰ \times ۲^۹ = ۲^{۱۰} \times ۱۰ = ۱۰۲۴۰$

۱۸۹

الف) $a_۱ = ۳ \times ۱ - ۱ = ۲$

$a_۲ = ۳ \times ۲ - ۱ = ۵$

$a_۳ = ۳ \times ۳ - ۱ = ۸$

$a_n = ۳n - ۱$ **باتوجه به درجه یک بودن جمله‌ی عمومی، الگو خطی است**

ب) $a_۱ = ۱^۲ + ۳ \times ۱ = ۴$

$a_۲ = ۲^۲ + ۳ \times ۲ = ۱۰$

$a_۳ = ۳^۲ + ۳ \times ۳ = ۱۸$

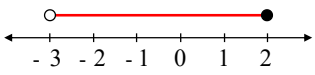
$a_۴ = ۴^۲ + ۳ \times ۴ = ۲۸$

$a_n = n^۲ + ۳n$

باتوجه به درجه دو بودن جمله عمومی، الگو غیر خطی است.

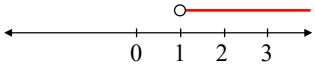
۱۹۰ **باتوجه به شکل هر بازه و مقادیر تقریبی هر عدد داریم:** $\sqrt{۷} \simeq ۲/۶, \sqrt{۲} = ۱/۴, \frac{\sqrt{۲}}{۲} = ۰/۷, -\sqrt{۳} = -۱/۷$

الف)



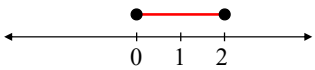
اعداد موجود در بازه ⟵ $-\frac{۲}{۳}, \sqrt{۲}, \frac{\sqrt{۲}}{۲}, -\sqrt{۳}, \frac{۱}{۲}, ۰/۷$

ب)



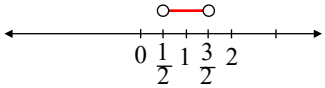
اعداد موجود در بازه ⟵ $۵, \sqrt{۷}, ۲/۵, ۶/۰۲۲ \times ۱۰^{۲۳}, \sqrt{۲}, ۱۰۰۰$

پ)



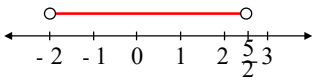
اعداد موجود در بازه ⟵ $\sqrt{۲}, \frac{\sqrt{۲}}{۲}, \frac{۱}{۲}, ۰/۷$

ت)



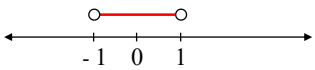
اعداد موجود در بازه ⟵ $\sqrt{۲}, \frac{\sqrt{۲}}{۲}, ۰/۷$

ث)



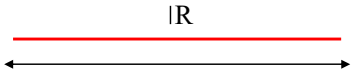
اعداد موجود در بازه ⟵ $\frac{-۲}{۳}, \sqrt{۲}, \frac{\sqrt{۲}}{۲}, -\sqrt{۳}, \frac{۱}{۲}, ۰/۷$

ج)



اعداد موجود در بازه ⟵ $\frac{-۲}{۳}, \frac{\sqrt{۲}}{۲}, \frac{۱}{۲}, ۰/۷$

چ)

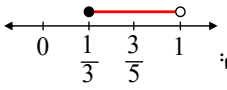


اعداد موجود در بازه ⟵ تمام اعداد داده شده

۱۹۱ الف)درست: با مقایسه دو عدد $\frac{۱}{۳}$, $\frac{۳}{۵}$ داریم:

$$\begin{cases} \frac{۳}{۵}=\frac{۹}{۱۵} \\ \frac{۱}{۳}=\frac{۵}{۱۵} \\ ۱=\frac{۱۵}{۱۵} \end{cases} \Rightarrow \quad ۱>\frac{۳}{۵}>\frac{۱}{۳}$$

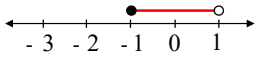
یا باتوجه به شکل داریم:



پس الف درست است.

ب)نادرست: با استدلال مشابه داریم: $-۱ > -۳$

و یا باتوجه به شکل:



پس ب نادرست است.

پ) نادرست: توجه کنید که $\{-۱,۱\}$ مجموعه‌ای است شامل دو عضو $-۱,۱$ اما $(-۱,۱)$ بازه‌ای باز است از -۱ تا ۱ همچنین $[-۱,۱]$ بازه ای بسته است از -۱ تا ۱ که هر دو بازه شامل تمام اعداد حقیقی بین -۱ تا ۱ هستند.

پس صفر جزء $\{-۱,۱\}$ نیست اما جزء $(-۱,۱)$ یا $[-۱,۱]$ هست.

ت)درست: باتوجه به توضیحات مورد پ

ث) نادرست: بازه نیم باز $[-۳,۲)$ شامل عدد -۳ است و شامل عدد ۲ نیست و بازه نیم باز $[-۳,۲)$ شامل عدد -۳ نیست و شامل عدد ۲ است. و از آنجا که در بازه‌ی اول عددی (-۳) هست که در بازه‌ی دوم نیست، پس بازه‌ی اول زیر مجموعه‌ای از بازه‌ی دوم نیست.

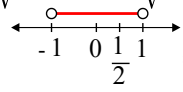
توجه شود که نبودن عدد ۲ در بازه‌ی اول و بودن آن در بازه‌ی دوم مشکلی برای مسئله ایجاد نمی‌کند و شرط لازم و کافی برای اینکه بازه‌ای زیرمجموعه بازه‌ی دیگر باشد فقط و فقط این است که هرچه در بازه‌ی اول هست در بازه‌ی دوم نیز باشد.

ج) درست: تهی زیرمجموعه‌ی همه مجموعه‌هاست.

چ) درست: $\{۱,۲\}$ فقط شامل دو عدد ۱ و ۲ است که در بازه‌ی بسته‌ی $[۱,۲]$ نیز موجود است پس $\{۱,۲\} \subset [۱,۲]$

ح) نادرست: بازه‌ی نیم باز $[-\sqrt{۵},\sqrt{۵})$ شامل عدد $\sqrt{۵}$ نیست.

خ) درست: باتوجه به شکل داریم:



۱۹۲

الف نادرست

ب درست

پ درست

ت درست

۱۹۳ کیفی

۱۹۴

$$P(A)=\frac{\binom{۴}{۱}}{\binom{۸}{۲}}$$

۱۹۵ الف. $\binom{۵}{۳}$

ب. $\binom{۴}{۲}$

پ. $\binom{۳}{۱}$

۱۹۶

الف) $۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳$

ب) $\frac{\circ}{۵\ ۴\ ۳}$ $۵ \times ۴ \times ۳$

پ) $\frac{\ }{۵\ ۵\ ۴\ ۳}$ $۵ \times ۵ \times ۴ \times ۳$

۱۹۷

$$\times ۶ \quad \frac{x}{۲}+\frac{۱}{۳}>\frac{x-۱}{۶} \qquad \times ۶ \quad \frac{x+۱}{۲}<\frac{x+۲}{۳}$$

$$\rightarrow \begin{cases} ۳x+۲>x-۱ \\ \rightarrow ۲x>-۳ \rightarrow x>-\frac{۳}{۲} \quad (۱) \\ ۳x+۳<۲x+۴ \\ \rightarrow x<۱ \quad (۲) \end{cases}$$

$$(۱)\cap(۲): -\frac{۳}{۲}<x<۱$$

۱۹۸

الف

$$\frac{(x-۴)(x-۳)}{(x-۶)(x+۱)}\times\frac{(x-۶)(x+۲)}{(x-۳)(x-۴)}\times\frac{x(x-۴)}{(x-۲)(x+۲)}=\frac{x}{x+۱}$$

ب

$$\frac{۴(a+۳b)}{۴(a-۳b)}\times\frac{۳(۲a-b)}{۵(a+۳b)}=\frac{۳(۲a-b)}{۵(a-۳b)}$$

پ

$$\frac{(x+۳)(x+۴)}{(x-۳)(x+۳)}\times\frac{۲(x+۴)}{(x+۴)^{۲}}=\frac{۲}{x-۳}$$

ت

$$\frac{۲xy^{۲}(۳x+۲y)}{(۳x-۲y)(۳x+۲y)}\times\frac{۳x(۳x-۲y)}{۱۲x^{۲}y}=\frac{y}{۲}$$

۱۹۹

الف نادرست.

ب درست.

پ نادرست.

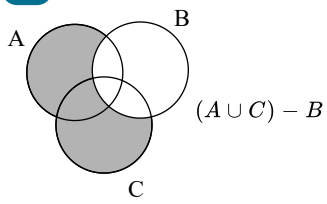
ت نادرست.

ث درست.

ج نادرست (برد این تابع اعداد مثبت بزرگتر یا مساوی ۳ است.)

۲۰۰

الف



$(A\cup C)-B$

ب

$$\underbrace{۲,۳,۵,۷,۱۱}_{\text{اول}},\ \underbrace{۱,۴,۶,۸,۹,۱۰,۱۲}_{\text{غیر اول}}$$

$$n(S)=\binom{۱۲}{۲}=\frac{۱۲\times۱۱}{۲}=۶۶$$

$$n(A)=\underbrace{\binom{۵}{۱}\binom{۷}{۱}}_{\text{یکی اول و یکی غیر اول}}+\underbrace{\binom{۵}{۲}}_{\text{هر ۲ اول}}=۳۵+۱۰=۴۵\rightarrow P(A)=\frac{۴۵}{۶۶}=\frac{۱۵}{۲۲}$$

ویژه خرداد ۱۴۰۲

فیلم تحلیل سوالات امتحانات پایان ترم

برای دیدن **فیلم حل نمونه سوالات** بزن رو لینک زیر

تحلیل نمونه سوالات ریاضی دهم تجربی

مشاهده فیلم ها