نام و نام خانوادگی:

زمان برگزاری:

نام آزمون: هندسه دهم

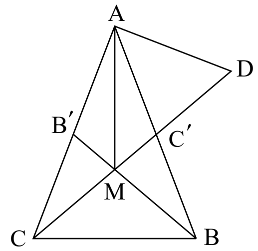
تاریخ آزمون:

شرکت توسعه انتشارات

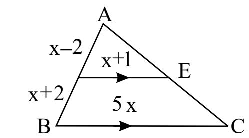
پرش_م۱۱

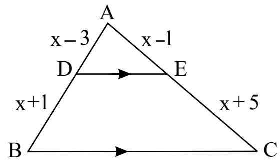
۱) دو خط متقاطع d و d' را در نظر بگیرید. نقاطی را بیابید که از نقطهٔ O (محل تقاطع) به فاصلهٔ $5cm$ بوده و از دو خط به یک فاصله باشند.

۲) در مثلث متساوی‌الساقین ABC $(AB = AC)$ محل تلاقی نیمسازهای دو زاویهٔ B و C را M و نقطهٔ برخورد نیمساز زاویهٔ C با عمودی که در نقطهٔ A بر AC رسم شده است را نقطهٔ D می‌نامیم. ثابت کنید مثلث AMD متساوی‌الساقین است.



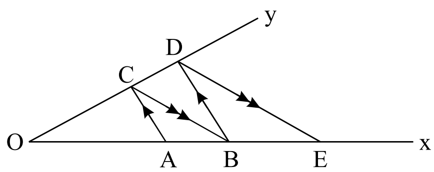
۳) در شکل‌های زیر، $DE || BC$ است. مقادیر x را در دو شکل به‌دست آورید.





۴) یک ذوزنقه رسم کنید که اندازهٔ دو قاعدهٔ آن ۴ و ۹ سانتی‌متر و دو ساق آن ۵ و ۶ سانتی‌متر باشند.

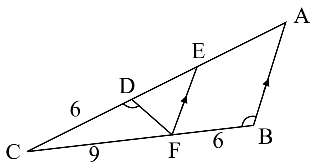
۵) بر ضلع Ox از زاویهٔ $x\hat{O}y$ دو نقطهٔ A و B را اختیار کرده و از این نقاط دو خط موازی هم رسم می‌کنیم تا ضلع Oy را به‌ترتیب در نقاط C و D قطع کنند و از نقطهٔ D خطی موازی BC رسم می‌کنیم تا ضلع Ox را در نقطهٔ E قطع کند. ثابت کنید:



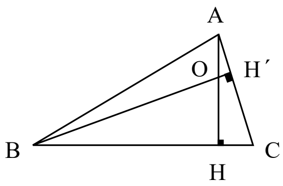
$$OB^2 = OA \times OE$$

۶) مجموع تعداد اضلاع، تعداد قطرها و تعداد محورهای تقارن یک nضلعی منتظم برابر ۳۶ است. مجموع زاویه‌های داخلی، مجموع زاویه‌های خارجی و اندازهٔ یک زاویهٔ داخلی و اندازهٔ یک زاویهٔ خارجی آن را به دست آورید.

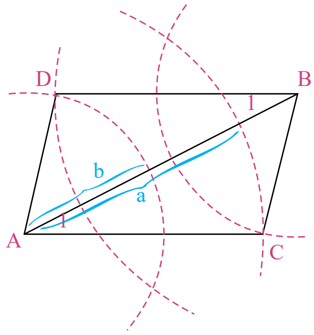
۷) در شکل مقابل، اگر $\hat{B} = \hat{D}$, $EF \parallel AB$, $DC = BF = ۶$, $CF = ۹$ باشد، نسبت DF به EF را به‌دست آورید.



۸ در شکل مقابل، AH و BH' دو ارتفاع مثلث هستند، اگر $۱۲ = ۵OH' = AH'$ و $OH = ۳AH'$ باشد، طول BH را به‌دست آورید.



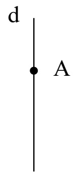
۹ مطابق شکل، پاره‌خط AB داده شده است. دهانهٔ پرگار را یک‌بار به اندازهٔ a و بار دیگر به اندازهٔ b باز می‌کنیم و از نقطهٔ A دو کمان می‌زنیم (به‌طوری که مجموع a و b از اندازهٔ AB بزرگ‌تر باشد). سپس کمان‌هایی با همان اندازه‌ها، این‌بار از نقطهٔ B می‌زنیم و مانند شکل، دو نقطه از نقاط برخورد را C و D می‌نامیم. چهارضلعی $ACBD$ چه نوع چندضلعی‌ای است؟ چرا؟ (راهنمایی: ابتدا بررسی کنید که مثلث‌های ABC و ABD و زوایای $A_۱$ و $B_۱$ نسبت به‌هم چگونه‌اند).



۱۰ عکس قضیهٔ زیر را بیان کنید و سپس در صورت امکان آن‌را دوشرطی بنویسید و در صورت غیرممکن بودن مثال نقض بیاورید.

قضیه: «دو زاویهٔ قائمه مکمل هستند.»

۱۱ مرکز تمام دایره‌هایی را پیدا کنید که در نقطهٔ A بر خط d مماس باشند.



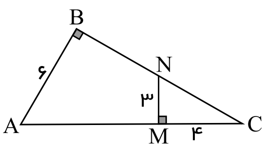
۱۲ متوازی‌الاضلاعی رسم کنید که طول قطرهای آن ۶ و ۱۰ سانتی‌متر و یک ضلع آن $۷cm$ باشد.

۱۳ یک لوزی به طول قطر $۱۰cm$ و ضلع $۱۳cm$ رسم کنید.

۱۴ مثلث ABC را با داشتن $BC = ۸cm$ و $AH = ۵cm$ (ارتفاع) و $AM = ۷cm$ (میانه) رسم کنید.

۱۵ در مثلث ABC، AD نیمساز زاویهٔ A است و $AD = ۴cm$. اگر زاویه‌های $B\hat{D}A$ برابر ۶۰° و $B\hat{A}D$ برابر ۳۵° باشند، مثلث را ترسیم کنید.

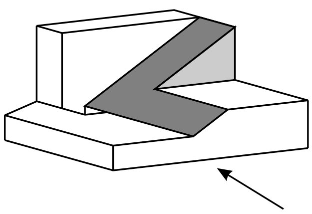
۱۶ مساحت چهارضلعی $ABNM$ را به‌دست آورید.



۱۷ دو مربع متشابه هستند و نسبت تشابه آنها $\frac{۲}{۵}$ است. اگر ضلع یکی از آنها برابر $۲۰cm$ باشد، ضلع دیگری را به‌دست آورید.

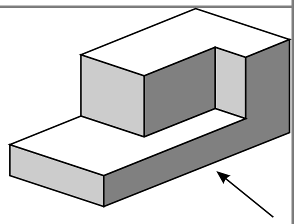
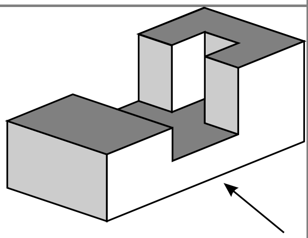
۱۸ ثابت کنید، در هر متوازی‌الاضلاع اگر قطرها برهم عمود باشند آنگاه لوزی می‌شود.

۱۹ برای شکل مقابل، نمای بالا، روبه‌رو و سمت چپ را رسم کنید.

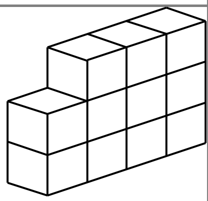
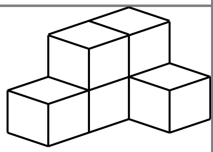
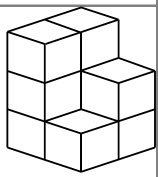


هندسه دهم

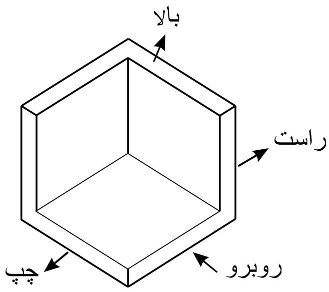
۲۰) در هر شکل، نمای بالا، روبه‌رو و سمت چپ را رسم کنید.

«الف»	«ب»
	

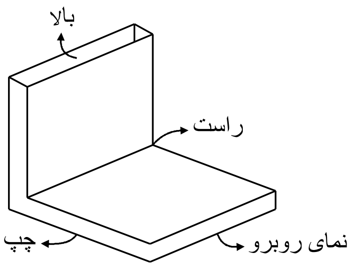
۲۱) سعی کنید از جهت‌های مختلف به هر شکل نگاه کرده و آن را رسم کنید.

نمای روبه‌رو	نمای بالا	نمای چپ	
			
			
			

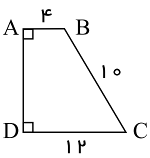
۲۲) نمای بالا، روبه‌رو، چپ و راست جسم مقابل را رسم کنید.



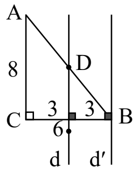
۲۳) نمای بالا، روبه‌رو، چپ و راست جسم مقابل را رسم کنید.



۲۴) ذوزنقهٔ قائم‌الزاویهٔ زیر را یک بار حول قاعدهٔ AB و بار دیگر حول قاعدهٔ DC و بار سوم حول ساق AD دوران می‌دهیم. حجم اجسام حاصل را به دست آورید.

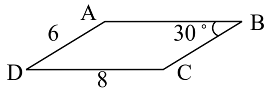


۲۵ مثلث ABC را یک بار حول خط d و یک بار حول خط d' دوران داده‌ایم. حجم اجسام حاصل را به دست آورید.



۲۶ مثلث ABC با طول اضلاع ۱۵ و ۱۲ و ۹ را حول بزرگ‌ترین ضلع دوران داده‌ایم، حجم فضای اشغال‌شده را حساب کنید.

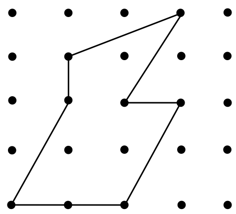
۲۷ متوازی‌الاضلاع زیر را حول ضلع بزرگ آن دوران می‌دهیم. حجم فضای اشغال‌شده را به دست آورید.



۲۸ از برش یک کره توسط یک صفحه چه شکلی حاصل می‌شود؟

۲۹ حالت‌های مختلف نمایش یک صفحه در فضا را مشخص کنید.

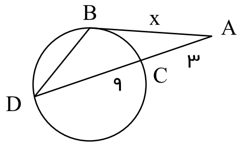
۳۰ در شکل زیر فاصلهٔ تمام نقطه‌ها به‌صورت افقی و عمودی ۳ واحد است. مساحت چندضلعی را به دست آورید.



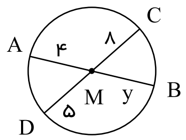
۳۱ اندازهٔ دو زاویهٔ مقابل در یک متوازی‌الاضلاع برابر $x + 40^\circ$ و $3x - 10^\circ$ است. اندازهٔ تمام زاویه‌های آن را به‌دست آورید.

۳۲ در شکل‌های زیر، مقادیر مجهول را به‌دست آورید.

الف)

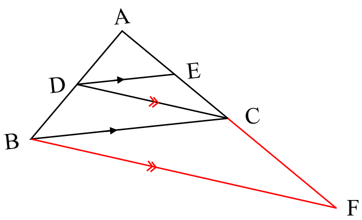


ب)

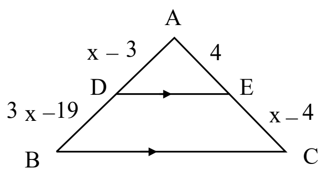


۳۳ در مستطیلی که ابعاد آن ۶ و ۸ سانتی‌متر است، نیمساز دو زاویهٔ روبه‌روی هم، قطر مقابل را در دو نقطه قطع می‌کنند. فاصلهٔ این دو نقطه را محاسبه کنید.

۳۴ در شکل مقابل، $DE \parallel BC$ و $DC \parallel BF$؛ ثابت کنید: $\dfrac{AE}{EC} = \dfrac{AC}{CF}$.



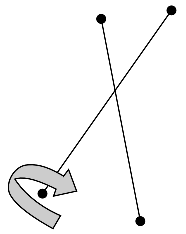
۳۵ در شکل روبه‌رو، $DE \parallel BC$؛ مقدار x را به‌دست آورید.



۳۶ ثابت کنید در هر مثلث نسبت ارتفاع‌ها با عکس نسبت اضلاع متناظر آنها برابر است.

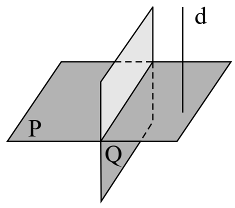
۳۷ طول اضلاع یک مثلث ۱۰ و ۱۲ و ۱۵ سانتی‌متر و طول بلندترین ضلع مثلثی متشابه آن، ۱۰ سانتی‌متر است. محیط مثلث دوم را به‌دست آورید.

۳۸ دو پاره‌خط متقاطع را مطابق شکل در نظر بگیرید. اگر یکی از خطوط را حول دیگری دوران دهیم، چه جسم هندسی‌ای ساخته می‌شود؟



۳۹ مساحت یک چندضلعی شبکه‌ای ۳ واحد است. جدولی تشکیل دهید و تعداد نقاط مرزی و تعداد نقاط درونی را در حالت‌هایی که امکان دارد، مشخص کنید. اگر این چندضلعی شبکه‌ای مثلث باشد، در هر حالت شکل آن را رسم کنید. در حالتی که نقاط مرزی بیشترین تعداد ممکن را دارند، شکل‌های چهارضلعی‌های نظیر آن را نیز رسم کنید.

۴۰ دو صفحهٔ P و Q برهم عمود هستند و خط d نیز بر صفحهٔ P عمود است. این خط نسبت به صفحهٔ Q چه وضعی دارد؟



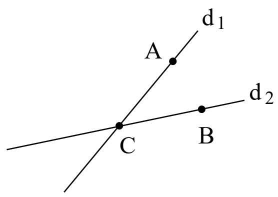
۴۱ خطوط $d_۱$ و $d_۲$ و نقاط A و B و C مانند شکل مقابل هستند. صفحهٔ P را در حالت‌های زیر در نظر بگیرید و وضعیت نسبی آن را با هریک از خطوط $d_۱$ و $d_۲$ بررسی کنید.

الف) صفحهٔ P شامل نقطهٔ C است.

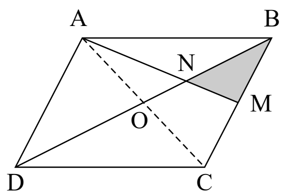
ب) صفحهٔ P شامل A و C باشد؛ ولی شامل B نباشد.

ج) صفحهٔ P شامل نقاط C و B و A است.

د) صفحهٔ P شامل خط $d_۱$ و نقطهٔ B است.

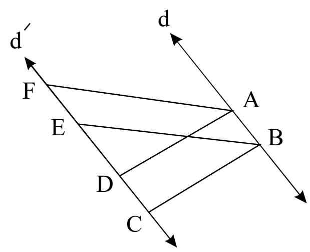


۴۲ در متوازی‌الاضلاع $ABCD$، M وسط ضلع BC است و پاره‌خط AM قطر BD را در N قطع کرده است. نشان دهید:



$$S_{BMN} = \frac{۱}{۱۲} S_{ABCD}$$

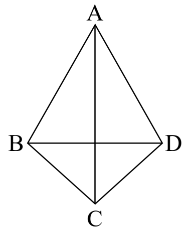
۴۳ در شکل دو خط d و d' موازی هستند و $ABCD$ و $ABEF$ هر دو متوازی‌الاضلاع‌اند. اگر مساحت یکی از این متوازی‌الاضلاع‌ها برابر S باشد، مساحت دیگری برحسب S چقدر است؟



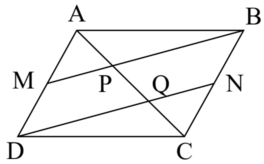
۴۴ طول پاره‌خطی را به‌دست آورید که واسطهٔ هندسی بین دو پاره‌خط به طول‌های ۸ و ۱۰ سانتی‌متر است.

۴۵ اگر $\frac{۳}{۵} = \frac{z}{۶} = \frac{y}{۳} = \frac{x}{۲}$، حاصل $x+y+z$ را به‌دست آورید.

۴۶) در چهارضلعی $ABCD$، مطابق شکل $AB=AD$ و $BC=CD$ است. آیا قطرهای این چهارضلعی بر هم عمود هستند؟ چرا؟ نشان دهید در این چهارضلعی قطر AC روی نیمسازهای $\angle A$ و $\angle C$ است. اگر اندازه‌های دو قطر ۸ و ۶ باشند، مساحت آن را محاسبه کنید. چهارضلعی‌ای با این ویژگی کایت نام دارد. نشان دهید در کایت یک قطر عمودمنصف قطر دیگر است.



۴۷) در متوازی‌الاضلاع $ABCD$، M و N به‌ترتیب وسط ضلع‌های AD و BC هستند. چرا خط‌های MB و DN موازی‌اند؟ به‌کمک آن ثابت کنید $AP=PQ=QC$.



۴۸) دو ضلع یک زاویه را در نظر بگیرید.

الف) نقطه‌ای بیابید که فاصلهٔ آن از هر ضلع زاویهٔ مورد نظر ۲ واحد باشد.

ب) نقطه‌ای بیابید که فاصلهٔ آن از هر ضلع زاویهٔ مورد نظر ۴ واحد باشد.

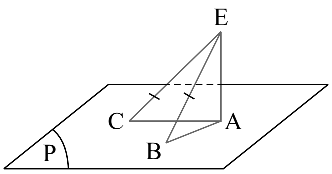
پ) با استفاده از (الف) و (ب) نیمساز زاویه‌ی مورد نظر را رسم کنید.

۴۹) نقاطی از دایره‌ای به شعاع $۶cm$ پیدا کنید که از یک نقطه به نام A روی دایره به فاصلهٔ $۴cm$ باشند.

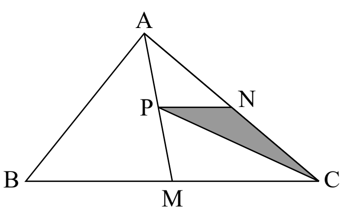
۵۰) مستطیلی رسم کنید که طول قطر آن $۸cm$ و زاویهٔ بین دو قطر ۳۰° باشد.

۵۱) در مثلث ABC اگر Bx نیمساز زاویهٔ داخلی B و At نیمساز زاویهٔ خارجی A باشد ثابت کنید زاویه‌ای که از برخورد این دو نیمساز حاصل می‌شود برابر نصف زاویهٔ C خواهد شد.

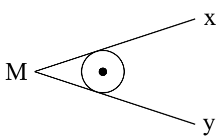
۵۲) در شکل مقابل نقاط A، B و C در صفحهٔ P واقع شده‌اند و داریم $EA \perp P$ و $EB=EC$. ثابت کنید: $AB=AC$.



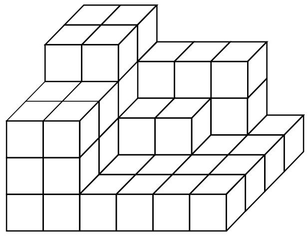
۵۳) در شکل مقابل N وسط ضلع AC را به نقطهٔ P، وسط میانهٔ AM وصل کرده‌ایم. مساحت مثلث PNC چه کسری از مساحت مثلث ABC است؟



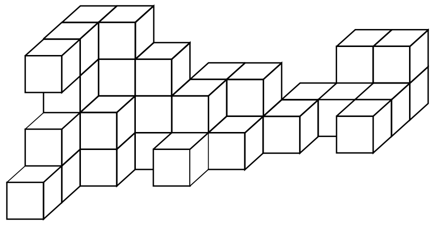
۵۴) با توجه به‌شکل زیر، مکان مراکز دایره‌هایی را که بر Mx و My مماس هستند را به دست آورید.



۵۵ در هریک از شکل‌های زیر چند مکعب وجود دارد؟



الف)

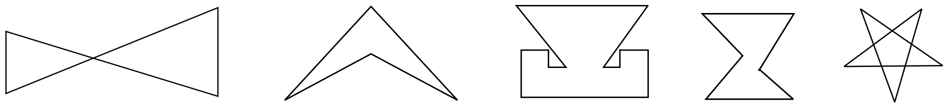


ب)

۵۶ ثابت کنید پاره‌خطی که وسط‌های دو ساق ذوزنقه را به‌هم وصل می‌کند موازی دو قاعده و مساوی نصف مجموع آنهاست.

۵۷ اگر در چهارضلعی $ABCD$ قطر BD را رسم کنیم و دو مثلث ABD و BDC هم‌نهشت باشند، آیا چهارضلعی $ABCD$ همواره متوازی‌الاضلاع است؟

۵۸ چند تا از شکل‌های زیر چند ضلعی هستند؟

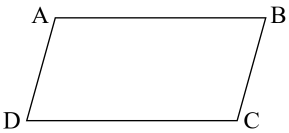


الف) ب) پ) ت) ث)

۵۹ خط دلخواه d اضلاع AB،AC و BC (یا امتداد آن‌ها) از مثلث ABC را به‌ترتیب در نقاط X و Y و Z قطع می‌کند. ثابت کنید:

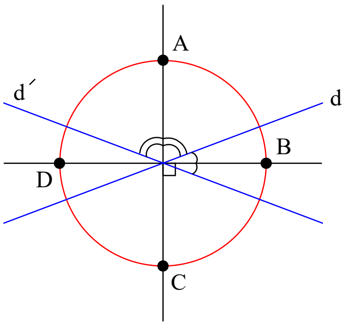
$$\frac{AX}{XB} \times \frac{BZ}{ZC} \times \frac{CY}{YA} = ۱$$ (قضیهٔ منلائوس)

۶۰ متوازی‌الاضلاع $ABCD$ مفروض است. از نقطهٔ C خطی چنان رسم می‌کنیم که امتداد خطوط AD و AB را در نقاط F و E قطع کند. ثابت کنید: $\frac{AB}{AE} + \frac{AD}{AF} = ۱$.

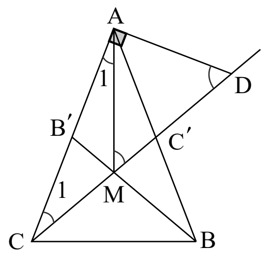


پاسخنامه تشریحی

۱ ابتدا نیمساز هر دو زاویه‌ای که دو خط باهم می‌سازند را رسم می‌کنیم، سپس به مرکز O و به شعاع $5cm$ یک دایره رسم می‌کنیم محل برخورد دایره با دو نیمساز جواب مسأله است. ۴ نقطهٔ A، B، C و D از دو خط به یک فاصله‌اند و از O به فاصلهٔ $5cm$ هستند.



۲ می‌دانیم سه نیمساز همرس‌اند، یعنی AM نیمساز زاویهٔ A است. زاویهٔ $A\hat{M}D$ زاویهٔ خارجی مثلث AMC است پس:



$$A\hat{M}D = \hat{A}_1 + \hat{C}_1 = \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{C}}{2} \quad (1)$$

اما در مثلث قائم‌الزاویه ACD $(C\hat{A}D = 90^\circ)$ داریم:

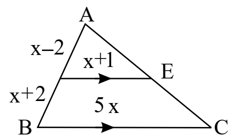
$$A\hat{D}M = 90^\circ - \hat{C}_1 = 90^\circ - \frac{\hat{C}}{2} = \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B}}{2}$$

و چون $\hat{B} = \hat{C}$ است پس:

$$A\hat{D}M = \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{C}}{2} \quad (2)$$

از مقایسهٔ رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $A\hat{M}D = A\hat{D}M$ ، یعنی مثلث AMD متساوی‌الساقین است.

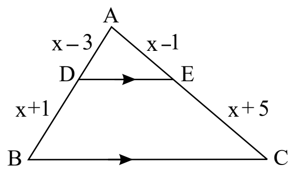
۳ در شکل اول، طبق قضیهٔ تالس داریم:



$$DE||BC \xrightarrow{\text{قضیهٔ تالس}} \frac{x-2}{2x+2-2} = \frac{x+1}{5x} \Rightarrow 5x^2 - 10x = 2x^2 + 2x$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 12x = 0 \Rightarrow 3x(x-4) = 0 \begin{cases} x = 0 & \text{غ.ق.ق} \\ x = 4 & \text{ق.ق} \end{cases}$$

همچنین در شکل دوم، طبق قضیهٔ تالس داریم:



$$DE||BC \xrightarrow{\text{قضیهٔ تالس}} \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow \frac{x-3}{x+1} = \frac{x-1}{x+5}$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x - 15 = x^2 - 1 \Rightarrow 2x = 14 \Rightarrow x = 7$$

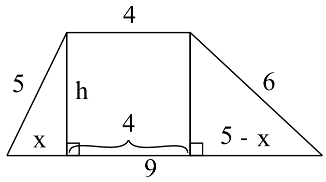
۴ شکل تقریبی ذوزنقه را رسم می‌کنیم و به‌کمک رابطهٔ فیثاغورس، اندازهٔ ارتفاع وارد بر قاعده‌ها (h) را پیدا می‌کنیم. سپس دو خط موازی به فاصلهٔ $h = 4/8$ رسم کرده و روی یکی از آنها $4cm$ جدا می‌کنیم از دو سر این پاره‌خط دو کمان به شعاع ۵ و ۶ می‌زنیم تا خط دیگر را در دو نقطه قطع کنند. چهار نقطه به‌دست‌آمده، جواب مسأله است. (به‌هم وصل می‌کنیم)

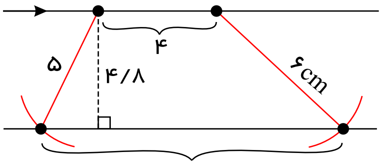
$$\begin{cases} h^2 = 36^2 - (5-x)^2 = 36 - 25 + 10x - x^2 \\ h^2 = 25 - x^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 25 - \cancel{x^2} = \underbrace{36 - 25}_{11} + 10x - \cancel{x^2}$$

$$\Rightarrow 25 - 11 = 10x$$

$$\Rightarrow x=\frac{۱۴}{۱۰}=۱٫۴\rightarrow h^{۲}=۲۵-(۱٫۴)^{۲}=۲۵-۱٫۹۶=۲۳٫۰۴\rightarrow h=۴٫۸$$





۵

فرض : $\begin{cases} AC||BD \\ BC||DE \end{cases}$ حکم : $OB^{۲}=OA\times OE$

$$O\overset{\Delta}{B}D: AC||BD \xrightarrow{\text{قضیه تالس}} \frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD}\quad (۱)$$

$$O\overset{\Delta}{E}D: BC||DE \xrightarrow{\text{قضیه تالس}} \frac{OB}{OE}=\frac{OC}{OD}\quad (۲)$$

$$(۱) \text{ و } (۲)\rightarrow \frac{OA}{OB}=\frac{OB}{OE}\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} OB^{۲}=OA\times OE$$

۶

$$\left.\begin{array}{l} \text{تعداد اضلاع}=n \\ \text{تعداد محورهای تقارن}=n \\ \text{تعداد قطرها}=\frac{n(n-۳)}{۲} \end{array}\right\}\Rightarrow n+n+\frac{n(n-۳)}{۲}=۳۶\Rightarrow ۴n+n^{۲}-۳n=۷۲$$

$$\Rightarrow n^{۲}+n-۷۲=۰\begin{cases} n=-۹ & \text{غ.ق.ق} \\ n=۸ & \text{ق.ق} \end{cases}$$

مجموع زاویه‌های داخلی $=(n-۲)\times ۱۸۰^{\circ}=۶\times ۱۸۰^{\circ}=۱۰۸۰^{\circ}$

مجموع زاویه‌های خارجی $=۳۶۰^{\circ}$

اندازهٔ یک زاویهٔ داخلی $=\frac{(n-۲)\times ۱۸۰^{\circ}}{n}=\frac{۱۰۸۰^{\circ}}{۸}=۱۳۵^{\circ}\Rightarrow$ **یک زاویهٔ خارجی** $=۱۸۰^{\circ}-۱۳۵^{\circ}=۴۵^{\circ}$

۷

$$\left.\begin{array}{l} EF\parallel AB \xrightarrow[\text{موازی و مورب}]{\text{مورب و قضیه خطوط } CB} \hat{B}=C\hat{F}E \\ \text{فرض } \hat{B}=\hat{D} \end{array}\right\}\Rightarrow C\hat{F}E=\hat{D}$$

$$\begin{cases} C\hat{F}E=\hat{D} \\ \hat{C}=\hat{C} \quad (\text{مشترک}) \end{cases}\xrightarrow{\text{زز}} C\overset{\Delta}{D}F\sim C\overset{\Delta}{F}E\Rightarrow \frac{CF}{CE}=\frac{FD}{FE}=\frac{CD}{CF}$$

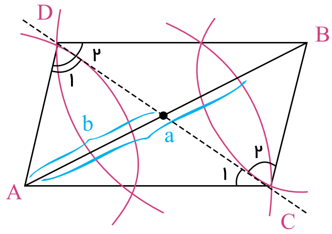
$$\Rightarrow \frac{۹}{CE}=\frac{DF}{EF}=\frac{۶}{۹}\Rightarrow \frac{DF}{EF}=\frac{۲}{۳}$$

۸

$$AH'=۱۲\ ,\quad OH=۳\times ۱۲=۳۶\ ,\quad OH'=\frac{۱۲}{۵}=۲٫۴$$

$$\begin{cases} \hat{H}=\hat{H'}=۹۰^{\circ} \\ (\text{متقابل به رأس})\ \hat{O}_{۱}=\hat{O}_{۲} \end{cases}\xrightarrow{\text{زز}} O\overset{\Delta}{A}H'\sim O\overset{\Delta}{B}H\rightarrow \frac{OH'}{OH}=\frac{AH'}{BH}=\frac{OA}{OB}\Rightarrow \frac{۲٫۴}{۳۶}=\frac{۱۲}{BH}\Rightarrow BH=\frac{۱۲\times ۳۶}{۲٫۴}=۱۸۰$$

۹ از B به D وصل می‌کنیم:



$$\begin{cases} AC = BD = a \\ AD = BC = b \\ DC = DC \text{ مشترک} \end{cases} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \overset{\Delta}{ADC} \cong \overset{\Delta}{BDC} \rightarrow \begin{cases} \widehat{D}_۱ = \widehat{C}_۲ \\ \widehat{D}_۲ = \widehat{C}_۱ \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \widehat{D}_۱ = \widehat{C}_۲ \xrightarrow[\text{عکس قضیه خطوط موازی و مورب}]{DC\text{مورب}} AD \parallel BC \\ \widehat{D}_۲ = \widehat{C}_۱ \xrightarrow[\text{عکس قضیه خطوط موازی و مورب}]{DC\text{مورب}} AC \parallel BD \end{array}\right\} \rightarrow$$ چهارضلعی $ACBD$ متوازی‌الاضلاع است

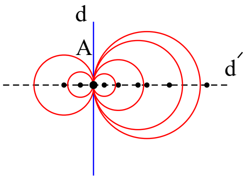
(۱۰) قضیه: دو زاویهٔ قائمه مکمل هستند. $\xleftarrow{\text{عکس}}$ دو زاویهٔ مکمل، قائمه هستند. (نادرست)

مثال نقض:

$\hat{A} = ۴۰^\circ$ و $\hat{B} = ۱۴۰^\circ$ $\qquad$ $\hat{A} + \hat{B} = ۴۰^\circ + ۱۴۰^\circ = ۱۸۰^\circ$

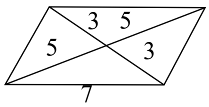
دو زاویهٔ A و B مکمل هستند ولی هیچ‌کدام قائمه نیستند.

(۱۱) مرکز همگی این دایره‌ها روی خط d' که عمود بر خط d در نقطهٔ A است قرار دارند.

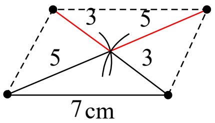


(۱۲)

شکل تقریبی آن به‌صورت مقابل است.

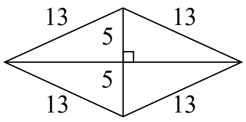


بنابراین ابتدا مثلثی با ابعاد ۳ و ۵ و ۷ سانتی‌متر را رسم کرده سپس دو ضلع ۳ و ۵ را از رأس مشترک به اندازهٔ خودشان امتداد می‌دهیم و نقاط حاصل را به یکدیگر وصل می‌کنیم.

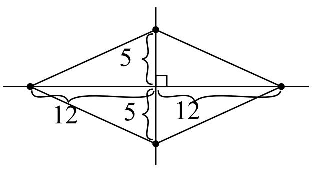


(۱۳)

شکل فرضی لوزی به‌صورت مقابل است. در لوزی قطرها عمودمنصف یکدیگرند. بنابراین طبق رابطهٔ فیثاغورس، اندازهٔ نصف قطر دیگر لوزی $۱۲cm$ می‌شود.

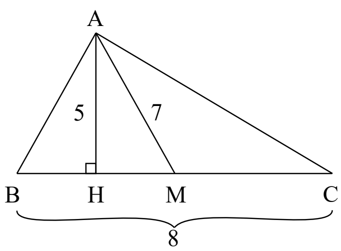


دو خط عمود برهم رسم می‌کنیم و روی یکی از آنها $۵cm$ در دو طرف و روی دیگری $۱۲cm$ در دو طرف انتخاب می‌کنیم. این چهار نقطهٔ به‌دست‌آمده را به‌هم وصل می‌کنیم. لوزی به‌دست‌آمده جواب مسأله است.

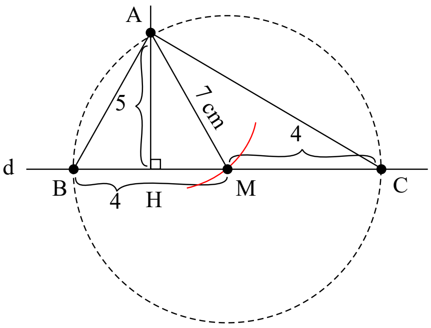


(۱۴) شکل فرضی مثلث را در نظر می‌گیریم.

ابتدا خط d را رسم کرده و روی خط d نقطهٔ دلخواه H را انتخاب و عمودی از آن نقطه خارج می‌کنیم و روی آن به اندازهٔ $AH = ۵$ جدا کرده و از نقطهٔ A به اندازهٔ $AM = ۷$ یک کمان می‌زنیم تا خط d را در نقطهٔ M قطع کند.

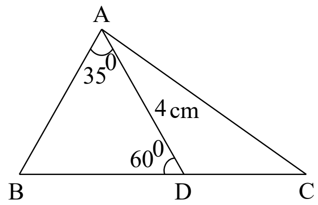


به مرکز M و به شعاع $۴cm$ یک دایره رسم می‌کنیم تا خط d را در نقاط B و C قطع کند از A به B و C وصل می‌کنیم. $\overset{\triangle}{ABC}$ جواب مسأله است.

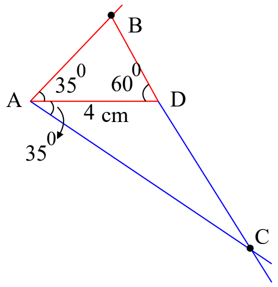


۱۵

شکل تقریبی سؤال را در نظر می‌گیریم. بنابراین ابتدا $\overset{\triangle}{BDA}$ را با «زض‌ز» معلوم رسم می‌کنیم.



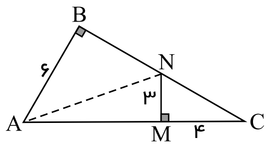
سپس زاویهٔ $C\hat{A}D$ را به اندازهٔ ۳۵° رسم می‌کنیم و ضلع BD را امتداد داده تا نقطهٔ C حاصل شود. $\overset{\triangle}{ABC}$ جواب مسأله است.



۱۶

$$\begin{cases} \hat{B} = \hat{M} = ۹۰^\circ \\ \hat{C} = \hat{C} \text{ مشترک} \end{cases} \xrightarrow{\text{زز}} \overset{\triangle}{AB}C \sim N\overset{\triangle}{M}C \rightarrow \frac{AB}{NM} = \frac{AC}{NC} = \frac{BC}{MC} \qquad (۱)$$

$$M\overset{\triangle}{N}C : \text{(قضیهٔ فیثاغورس)} \ MN^۲ + MC^۲ = NC^۲ \Rightarrow NC = ۵$$



$$(۱) \quad \Rightarrow \frac{۶}{۳} = \frac{AC}{۵} = \frac{BC}{۴} \Rightarrow AC = ۱۰ \ , \quad BC = ۸ \rightarrow \begin{cases} BN = ۳ \\ AM = ۶ \end{cases}$$

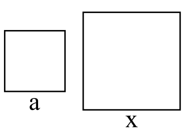
در چهارضلعی $ABNM$، قطر AN را رسم می‌کنیم:

$$S_{ABNM} = S_{\overset{\triangle}{AB}N} + S_{\overset{\triangle}{AM}N} = \frac{۱}{۲} \times ۶ \times ۳ + \frac{۱}{۲} \times ۳ \times ۶ = ۹ + ۹ = ۱۸$$

۱۷ دو حالت رخ می‌دهد:

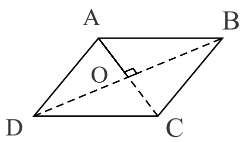
$$\text{ضلع مربع کوچک} = ۲۰cm \Rightarrow \frac{۲}{۵} = \frac{۲۰}{x} \Rightarrow x = ۵۰cm$$

$$\text{ضلع مربع بزرگ} = ۲۰cm \Rightarrow \frac{۲}{۵} = \frac{a}{۲۰} \Rightarrow a = ۸cm$$



۱۸ می‌دانیم که در متوازی‌الاضلاع قطرها منصف یکدیگر هستند. یعنی: $OA = OC$.

OA میانهٔ وارد بر ضلع BD در $\overset{\triangle}{AB}D$ است. $(OB = OD)$



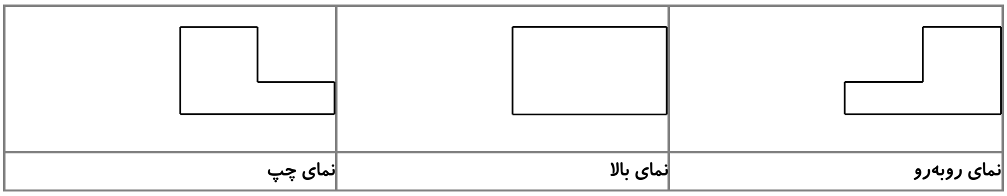
$\overset{\triangle}{ABD}:\left.\begin{array}{l}OA \text{ میانه است}\\ OA \text{ ارتفاع است}\end{array}\right\} \rightarrow \overset{\triangle}{ABD}$ متساوی‌الساقین است $\Rightarrow AB = AD$

$\left\{\begin{array}{l}AB = DC\\ AD = BC\end{array}\right. \Rightarrow ABCD$ متوازی‌الاضلاع است

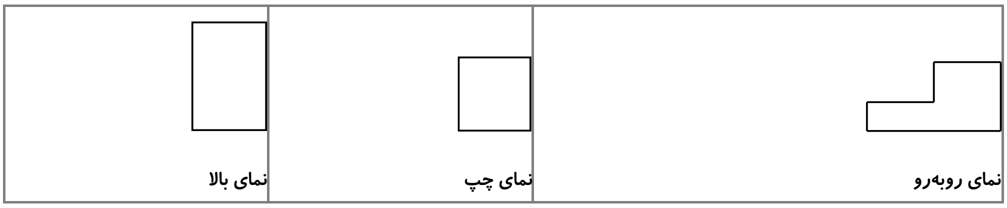
در $ABCD$ هر چهار ضلع برابر است. $\Rightarrow$

بنابراین $ABCD$ لوزی است.

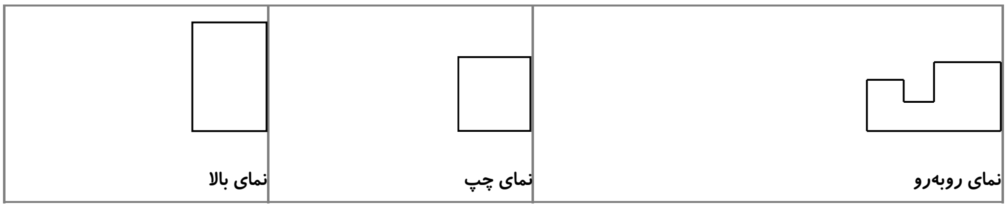
۱۹



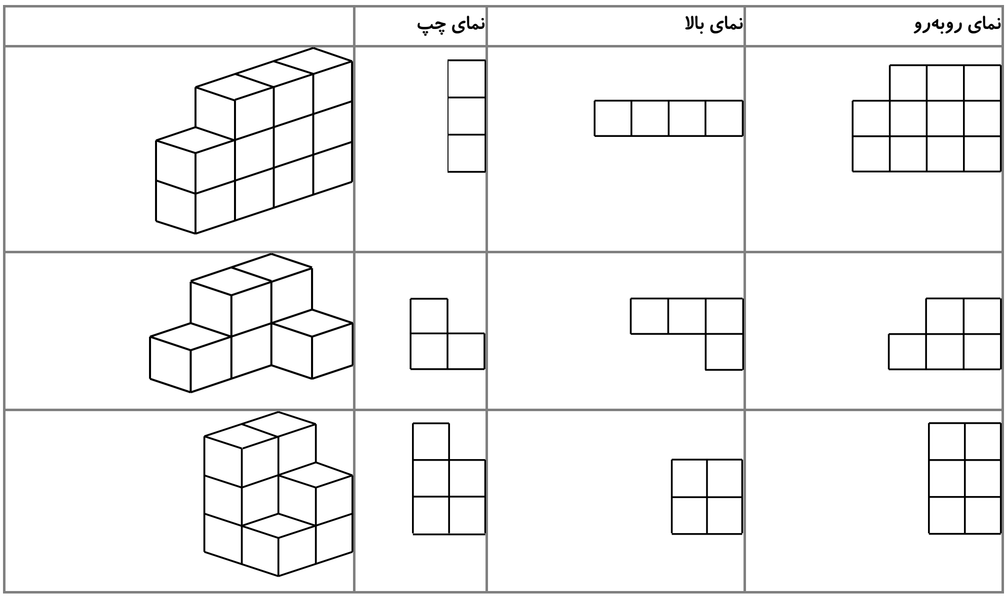
۲۰ الف)



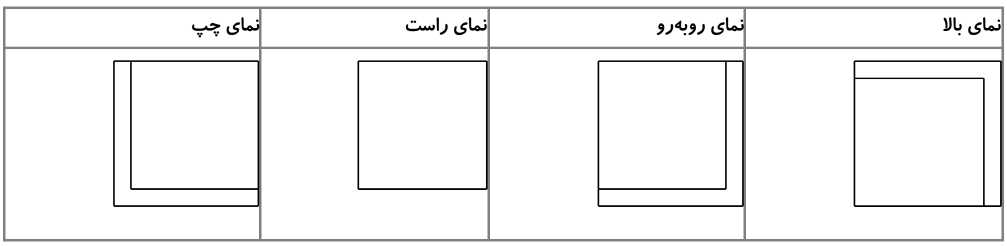
ب)



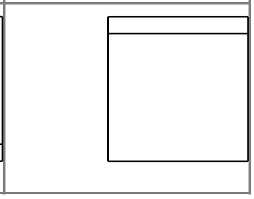
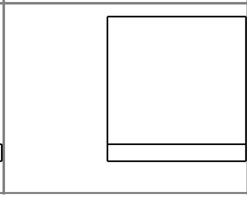
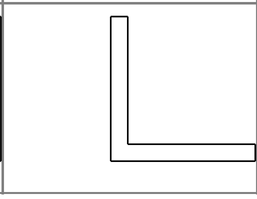
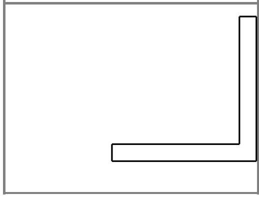
۲۱



۲۲

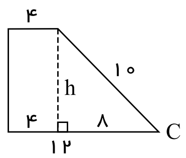


۲۳ ابتدا باید یک طرف را به‌عنوان نمای روبه‌رو انتخاب کنیم سپس رسم کنیم.

نمای بالا	نمای روبه‌رو	نمای چپ	نمای راست
			

۲۴

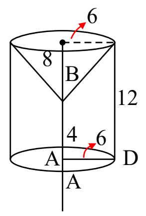
با توجه به شکل داریم:



$h^۲ = ۱۰^۲ - ۸^۲ = ۳۶$

$\Rightarrow h = ۶ \rightarrow AD = ۶$

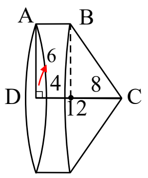
الف) حول AB:



$$V = V_{\text{استوانه}} - V_{\text{مخروط}} = \pi r^۲ h - \frac{۱}{۳}\pi r^۲ h' = \pi r^۲ (h - \frac{۱}{۳}h')$$

$$\Rightarrow V = \pi \times ۶^۲ \times (۱۲ - \frac{۸}{۳}) = \pi \times ۳۶ \times \frac{۲۸}{۳} = ۳۳۶\pi$$

ب) حول DC:



$$V = V_{\text{استوانه}} + V_{\text{مخروط}} = \pi r^۲ h + \frac{۱}{۳}\pi r^۲ h'$$

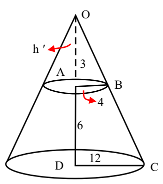
$$\Rightarrow V = \pi r^۲ (h + \frac{۱}{۳}h') = \pi \times ۶^۲ \times (۴ + \frac{۸}{۳})$$

$$V = \pi \times \overset{۱۲}{\cancel{۳۶}} \times \frac{۲۰}{\underset{۱}{\cancel{۳}}} = ۲۴۰\pi$$

ج) حول AD: یک مخروط ناقص می‌شود.

$$\overset{\Delta}{ODC} : AB || DC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{OA}{OD} = \frac{AB}{DC} \Rightarrow \frac{x}{x+۶} = \frac{۴}{۱۲}$$

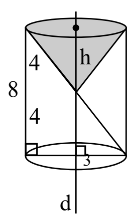
$$\Rightarrow ۱۲x = ۴x + ۲۴ \rightarrow ۸x = ۲۴ \rightarrow x = ۳ = h'$$



$$V = V_{\text{مخروط بزرگ}} - V_{\text{مخروط کوچک}} = \frac{۱}{۳}\pi r^۲ \underbrace{h}_{۶+۳} - \frac{۱}{۳}\pi r'^۲ h' = \frac{۱}{۳}\pi(۱۲^۲ \times ۹ - ۴^۲ \times ۳)$$

$$V = \frac{۱}{۳}\pi(۱۲۹۶ - ۴۸) = \frac{۱}{۳} \times \pi \times ۱۲۴۸ = ۴۱۶\pi$$

۲۵ حول خط d یک استوانه است که به‌صورت مخروط بالای آن خالی است.



$AB^۲ = AC^۲ + BC^۲$

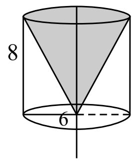
$\Rightarrow AB^۲ = ۸^۲ + ۶^۲ = ۶۴ + ۳۶ = ۱۰۰$

$\Rightarrow AB = \sqrt{۱۰۰} = ۱۰ \rightarrow h = ۴$

$$V = V_{\text{استوانه}} - V_{\text{مخروط}} = \pi r^۲ h' - \frac{\pi r^۲ h}{۳} = \pi \times ۳^۲ \times ۸ - \frac{\pi \times ۳^۲ \times ۴}{۳}$$

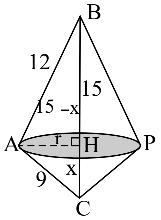
$$V = ۷۲\pi - ۱۲\pi = ۶۰\pi$$

حول d' یک استوانه است که یک مخروط با همان ارتفاع خالی است.



$$V = V_{\text{استوانه}} - V_{\text{مخروط}} = \pi r^{۲} h - \frac{\pi r^{۲} h}{۳} = \frac{۲}{۳}\pi r^{۲} h = \frac{۲}{۳} \times \pi \times ۶^{۲} \times ۸$$
$$V = ۲ \times \pi \times ۱۲ \times ۸ = ۱۹۲\pi$$

۲۶ داریم $۹^{۲} + ۱۲^{۲} = ۱۵^{۲}$، بنابراین مثلث قائم‌الزاویه است.



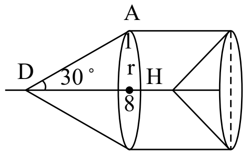
$$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{۹ \times ۱۲}{۲} = \frac{r \times ۱۵}{۲} \Rightarrow r = \frac{۹ \times ۱۲}{۱۵} = \frac{۳۶}{۵} = ۷٫۲$$

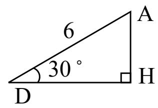
مطابق شکل، فضای اشغال‌شده، دو مخروط می‌شود:

$$V_{\text{کل}} = V_{\text{مخروط بالا}} + V_{\text{مخروط پایین}} = \frac{۱}{۳} \times \pi r^{۲} h + \frac{۱}{۳}\pi r^{۲} h' = \frac{۱}{۳}\pi r^{۲} \underbrace{(h + h')}_{۱۵}$$
$$= \frac{۱}{۳} \times \pi \times ۷٫۲^{۲} \times ۱۵ = \frac{۱}{۳}\pi \times \left(\frac{۳۶}{۵}\right)^{۲} \times ۱۵ = \frac{۵\pi \times ۳۶ \times ۳۶}{۵ \times ۵} = \frac{۱۲۹۶\pi}{۵}$$

۲۷ فضای اشغال‌شده برابر فضای یک استوانه می‌شود، چون به‌اندازهٔ یک مخروط از سمت D اضافه ولی به همان اندازه از سمت C خالی است.

می‌دانیم در مثلث قائم‌الزاویه ضلع روبه‌رو به زاویهٔ ۳۰° نصف وتر است.

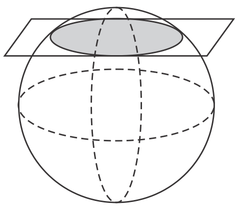




$$AH = \frac{۱}{۲}AD = \frac{۱}{۲} \times ۶ = ۳$$
$$V_{\text{استوانه}} = \pi r^{۲} h = \pi \times ۳^{۲} \times ۸ = ۷۲\pi$$

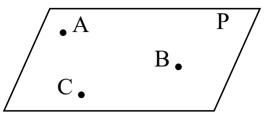
۲۸

یک کره به هر نحوی توسط یک صفحه برش داده شود یک دایره ایجاد می‌شود.

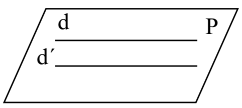


۲۹

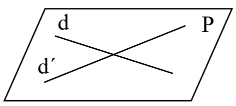
الف) از هر سه نقطهٔ متمایز در فضا که روی یک خط قرار ندارند دقیقاً یک صفحه عبور می‌کند.



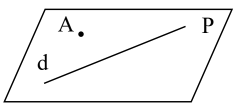
ب) از دو خط موازی دقیقاً یک صفحه می‌گذرد.



ج) از دو خط متقاطع فقط یک صفحه می‌گذرد.



د) از یک خط و یک نقطهٔ خارج آن، فقط یک صفحه عبور می‌کند.



۳۰

طبق فرمول پیک داریم:

مساحت شبکه‌ای = نقاط درون چندضلعی + $\frac{\text{نقاط مرزی}}{۲} - ۱$

$S = i + \frac{b}{۲} - ۱$

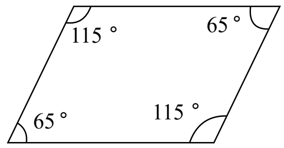
$S = ۳ + \frac{۸}{۲} - ۱ = ۶$

می‌دانیم : $\frac{S}{S'} = (k)^۲ = ۳^۲ = ۹$

$\Rightarrow S = ۶ \times ۹ = ۵۴$

۳۱ در متوازی‌الاضلاع، زوایای روبه‌روی هم با هم برابر هستند، پس:

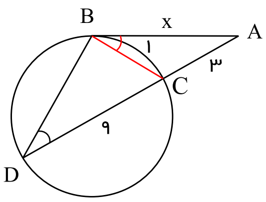
$۳x - ۱۰^\circ = x + ۴۰^\circ \rightarrow ۳x - x = ۴۰^\circ + ۱۰^\circ \rightarrow ۲x = ۵۰^\circ \rightarrow x = ۲۵^\circ$



$$\begin{cases} \text{زاویه‌های تند} = ۳ \times ۲۵^\circ - ۱۰^\circ = ۷۵^\circ - ۱۰^\circ = ۶۵^\circ \\ \text{زاویه‌های باز} = ۱۸۰^\circ - ۶۵^\circ = ۱۱۵^\circ \end{cases}$$

۳۲ در شکل (الف) داریم:

از B به C وصل می‌کنیم.

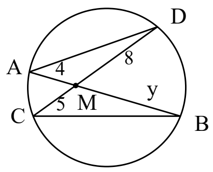


$$\left.\begin{array}{l} (\text{ظلّی}) \quad \hat{B}_۱ = \hat{D} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲} \\ \hat{A} = \hat{A} \quad \text{مشترک} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{زز}} \overset{\triangle}{A}BC \sim \overset{\triangle}{A}DB$$

$$\Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{AB}{AD} \Rightarrow \frac{۳}{x} = \frac{x}{۳+۹} \Rightarrow x^۲ = ۳۶ \Rightarrow x = \sqrt{۳۶} = ۶$$

در شکل (ب) داریم:

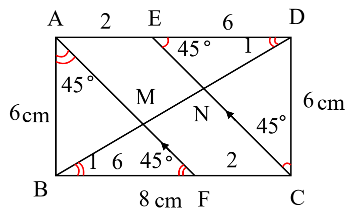
از A به D و از B به C وصل می‌کنیم.



$$\left.\begin{array}{l} \hat{A} = \hat{C} = \frac{\overset{\frown}{BD}}{۲} \\ \hat{D} = \hat{B} = \frac{\overset{\frown}{AC}}{۲} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{زز}} \overset{\triangle}{M}AD \sim \overset{\triangle}{M}CB$$

$$\Rightarrow \frac{MA}{MC} = \frac{MD}{MB} \Rightarrow \frac{۴}{۵} = \frac{۸}{y} \Rightarrow y = \frac{۵ \times ۸}{۴} = ۱۰$$

۳۳



$$\overset{\triangle}{AB}D : AB^۲ + AD^۲ = BD^۲ \Rightarrow ۶^۲ + ۸^۲ = BD^۲ \Rightarrow BD = ۱۰$$

$$\left.\begin{array}{ll} \overset{\triangle}{AB}F : \hat{A} = \hat{F} = ۴۵^\circ \Rightarrow & AB = BF = ۶cm \\ \overset{\triangle}{DC}E : \hat{C} = \hat{E} = ۴۵^\circ \Rightarrow & DE = DC = ۶cm \\ & \hat{B} = \hat{D} = ۹۰^\circ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\triangle}{AB}F \cong \overset{\triangle}{DC}E \Rightarrow AF = CE$$

$$\left.\begin{array}{l} AD \parallel BC \xrightarrow{\text{مورب } BD} \hat{D}_۱ = \hat{B}_۱ \\ \hat{E} = \hat{F} = ۴۵^\circ \\ DE = BF = ۶cm \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ز ض ز}} \overset{\triangle}{DE}N \cong \overset{\triangle}{BF}M \Rightarrow BM = DN$$

$$\overset{\triangle}{AM}D : EN \parallel AM \xrightarrow{\text{ق تالس}} \frac{DE}{AD} = \frac{DN}{DM} \Rightarrow \frac{۶}{۸} = \frac{DN}{DM} \xrightarrow{\text{ترکیب صورت و مخرج}} \frac{۶}{۱۴} = \frac{DN}{\underbrace{DM + DN}_{BD}}$$

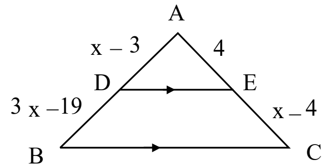
$$\Rightarrow \frac{۶}{۱۴} = \frac{DN}{۱۰} \Rightarrow DN = \frac{۳۰}{۷} = BM \Rightarrow MN = ۱۰ - ۲ \times \frac{۳۰}{۷} = \frac{۱۰}{۷}$$

۳۴

طبق قضیهٔ تالس داریم:

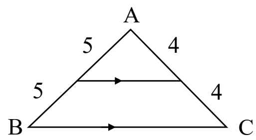
$$\left.\begin{array}{l}\overset{\triangle}{AB}C: DE \parallel BC \xrightarrow{\text{ق تالس}} \dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AE}{EC} \\ \overset{\triangle}{AB}F: DC \parallel BF \xrightarrow{\text{ق تالس}} \dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AC}{CF}\end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{AE}{EC} = \dfrac{AC}{CF}$$

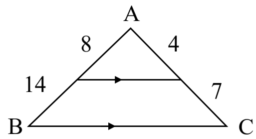
۳۵ طبق قضیهٔ تالس داریم:



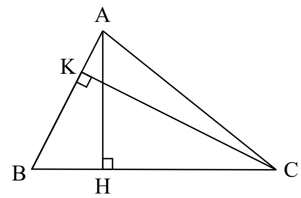
$$DE \parallel BC \xrightarrow{\text{ق تالس}} \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow \frac{x-۳}{۳x-۱۹} = \frac{۴}{x-۴}$$
$$\Rightarrow x^۲ - ۷x + ۱۲ = ۱۲x - ۷۶$$

$$x^۲ - ۷x - ۱۲x + ۱۲ + ۷۶ = ۰ \Rightarrow x^۲ - ۱۹x + ۸۸ = ۰ \Rightarrow (x-۸)(x-۱۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۸ \text{ ق.ق} \rightarrow \\ x = ۱۱ \text{ ق.ق} \rightarrow \end{cases}$$





۳۶



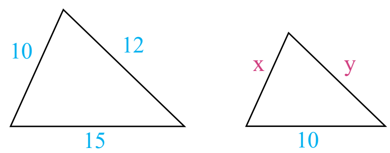
$$\text{حکم}: \frac{AH}{CK} = \frac{AB}{BC}$$

$$S_{\overset{\triangle}{AB}C} = \frac{۱}{۲}AH \times BC = \frac{۱}{۲}CK \times AB$$
$$\Rightarrow AH \times BC = CK \times AB \Rightarrow \frac{AH}{CK} = \frac{AB}{BC}$$

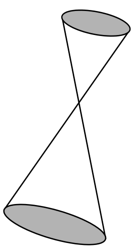
۳۷

$$\text{دو مثلث متشابهند.} \Rightarrow \frac{۱۰}{x} = \frac{۱۲}{y} = \frac{۱۵}{۱۰} \Rightarrow x = \frac{۲۰}{۳}, \; y = ۸$$

$$\text{محیط} = \frac{۲۰}{۳} + ۱۰ + ۸ = \frac{۲۰ + ۳ \times ۱/۸}{۳} = \frac{۷۴}{۳}$$



۳۸ جسم حاصل دو مخروط است که از رأس به هم چسبیده‌اند.



۳۹

طبق فرمول پیک داریم:

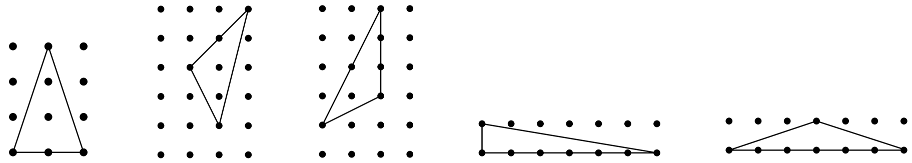
$$S = \frac{b}{۲} + i - ۱ = ۳ \Rightarrow b + ۲i = ۸$$

از طرفی می‌دانیم $b \geq ۳$ و $i \geq ۰$ در نتیجه، $۸ - b \geq ۰$ پس $۳ \leq b \leq ۸$.

چون $b = 2(4 - i)$ پس باید b نیز زوج باشد در نتیجه b می‌تواند فقط یکی از سه مقدار $\{4, 6, 8\}$ را اختیار کند. بنابراین می‌توان i را نیز محاسبه کرد.

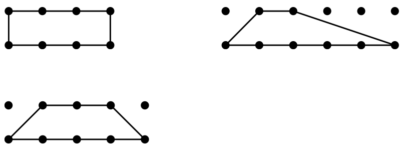
b	۴	۶	۸
i	۲	۱	۰

می‌توانیم تعدادی را رسم کنیم. مثلاً سه‌ضلعی‌ها به‌صورت زیر می‌توانند باشند.



$\begin{cases} i = 2 \\ b = 4 \end{cases}$ $\begin{cases} i = 2 \\ b = 4 \end{cases}$ $\begin{cases} i = 1 \\ b = 6 \end{cases}$ $\begin{cases} i = 0 \\ b = 8 \end{cases}$ $\begin{cases} i = 0 \\ b = 8 \end{cases}$

وقتی نقاط مرزی بیشترین مقدار را دارد که $b = 8$ و $i = 0$؛ سه نمونه چهارضلعی نظیر آن به‌صورت زیر است.



با تغییر دو نقطهٔ بالایی می‌توان ذوزنقه‌های دیگری نیز رسم کرد.

۴۰ موازی

۴۱ الف) صفحهٔ P در نقطهٔ C با خطوط d_1 و d_2 مشترک است. پس سه حالت ممکن است پدید آید؛ حالت (۱) دو خط d_1 و d_2 با صفحهٔ P متقاطع باشند. حالت (۲) هر دو خط d_1 و d_2 در صفحهٔ P قرار داشته باشند. حالت (۳) یکی از دو خط d_1 و d_2 در صفحهٔ P باشد و دیگری با صفحهٔ P متقاطع باشد.

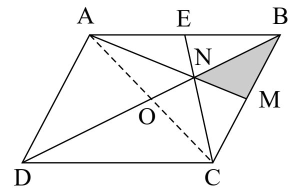
ب) d_1 در صفحهٔ P واقع است و خط d_2 صفحهٔ P را در نقطهٔ C قطع کرده است.

ج) دو خط متقاطع d_1 و d_2 در صفحهٔ P واقع هستند.

د) دو خط متقاطع d_1 و d_2 در صفحهٔ P واقع هستند.

۴۲ از C به N وصل کرده و ادامه می‌دهیم تا ضلع AB را در نقطه‌ای مانند E قطع کند. نقطهٔ N محل همرسی میانه‌های مثلث ABC است، پس خواهیم داشت:

$$\left.\begin{aligned} S_{\overset{\Delta}{BMN}} &= \frac{1}{6} S_{\overset{\Delta}{ABC}} \\ S_{\overset{\Delta}{ABC}} &= \frac{1}{2} S_{ABCD} \end{aligned}\right\} \Rightarrow S_{\overset{\Delta}{BMN}} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} S_{ABCD} = \frac{1}{12} S_{ABCD}$$



$$\Rightarrow \frac{S_{\overset{\Delta}{BMN}}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{12}$$

توجه کنید که AM میانهٔ BC و BO نیز میانهٔ AC است.

۴۳ چون در هرکدام از دو متوازی‌الاضلاع داده‌شده در شکل، قاعده‌ها برابر با AB و ارتفاع‌ها برابر با فاصلهٔ دو خط موازی است، بنابراین:

$$S_1 = S_2 = AB \times h = S$$

۴۴

واسطهٔ هندسی بین دو پاره‌خط فوق به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

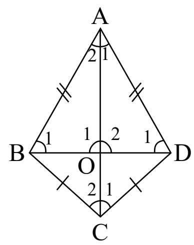
$a^2 = bc \to a^2 = 10 \times 8 = 80 \to a = \sqrt{80} = 4\sqrt{5} \to$ طول پاره‌خط

۴۵ طبق فرض داریم:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{6} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{x+y+z}{2+3+6} = \frac{3}{5} \Rightarrow x + y + z = \frac{11 \times 3}{5} = \frac{33}{5}$$

۴۶ با توجه به شکل زیر داریم:

$$\left.\begin{aligned} AB &= AD \\ BC &= CD \\ AC &= AC \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{(ض ض ض)}} \overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{ACD} \Rightarrow \begin{cases} \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \\ \hat{C}_1 = \hat{C}_2 \end{cases}$$



یعنی AC نیمساز زوایای $\hat{A}$ و $\hat{C}$ است.

$$AB = AD \Rightarrow \overset{\triangle}{ABD} \text{ متساوی‌الساقین است } \Rightarrow \left.\begin{matrix} \hat{B}_۱ = \hat{D}_۱ \\ \hat{A}_۱ = \hat{A}_۲ \\ AB = AD \end{matrix}\right\} \xrightarrow{(\text{ز ض ز})} \overset{\triangle}{OAB} \cong \overset{\triangle}{OAD}$$

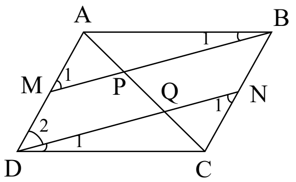
$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{O}_۱ = \hat{O}_۲ \ , \quad \hat{O}_۱ + \hat{O}_۲ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۲\hat{O}_۱ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{O}_۱ = \hat{O}_۲ = ۹۰^\circ \Rightarrow AC \text{ عمودمنصف } BD \text{ است} \\ OB = OD \end{cases}$$

بنابراین $\hat{O}_۱ = \hat{O}_۲ = \hat{O}_۳ = \hat{O}_۴ = ۹۰^\circ$ یعنی دو قطر AC و BD بر هم عمود هستند. پس:

$$S = \frac{AC \times BD}{۲} = \frac{۶ \times ۸}{۲} = ۲۴$$

۴۷

با توجه به شکل داریم:



$$AD = BC \xrightarrow{\div ۲} \frac{AD}{۲} = \frac{BC}{۲} \Rightarrow AM = CN$$

$$\left.\begin{matrix} \left.\begin{matrix} AM = CN \\ AB = CD \\ \hat{A} = \hat{C} \end{matrix}\right\} \xrightarrow{(\text{ض ز ض})} \overset{\triangle}{AMB} \cong \overset{\triangle}{CND} \Rightarrow \hat{M}_۱ = \hat{N}_۱ \\ AD \parallel BC \xrightarrow{DN \text{ مورب}} \hat{N}_۱ = \hat{D}_۲ \end{matrix}\right\} \Rightarrow \hat{M}_۱ = \hat{D}_۲$$

با توجه به عکس قضیهٔ خطوط موازی می‌توان نتیجه گرفت: $DN \parallel BM$

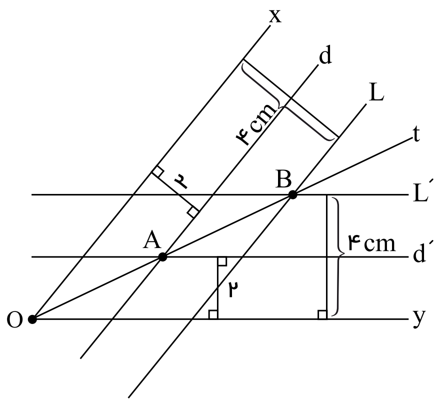
$$DN \parallel BM \Rightarrow \begin{cases} QN \parallel BP \xrightarrow{\text{طبق قضیه تالس در } \overset{\triangle}{PBC}} \frac{CN}{NB} = \frac{QC}{PQ} = ۱ \Rightarrow PQ = QC \quad (۱) \\ MP \parallel DQ \xrightarrow{\text{طبق قضیه تالس در } \overset{\triangle}{ADQ}} \frac{AM}{DM} = \frac{AP}{PQ} = ۱ \Rightarrow AP = PQ \quad (۲) \end{cases}$$

۴۸

الف) زاویهٔ $x\hat{o}y$ را در نظر می‌گیریم. خطوط d و d' را موازی اضلاع ox و oy و به فاصلهٔ $۲cm$ از آنها ترسیم می‌کنیم محل برخورد آنها از هر دو ضلع $۲cm$ فاصله دارد. (نقطهٔ A)

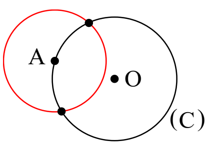
ب) بار دیگر خطوط L و L' را به موازات $۴cm$ از دو ضلع رسم می‌کنیم تا نقطهٔ B به‌دست آید. نقطهٔ B از دو ضلع به فاصلهٔ $۴cm$ است.

پ) از O به A و B رسم کرده و امتداد می‌دهیم. این نیم‌خط نیمساز زاویه است. (ot)



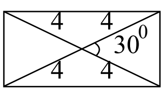
۴۹ دایرهٔ C به مرکز O و به شعاع $۶cm$ را در نظر می‌گیریم. از نقطهٔ A روی دایرهٔ C یک دایره به شعاع $۴cm$ رسم می‌کنیم. نقاط برخورد این دایره با دایرهٔ C جواب‌های مسأله است.

مطابق شکل، این سؤال ۲ جواب دارد.

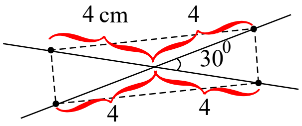


۵۰

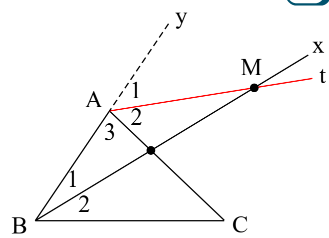
شکل تقریبی به‌صورت مقابل است.



بنابراین ابتدا یک زاویهٔ ۳۰° رسم کرده و دو ضلع آن را از سمت رأس امتداد می‌دهیم و روی این چهار نیم‌خط حاصل پاره‌خط‌هایی به طول $۴cm$ جدا کرده و به یکدیگر وصل می‌کنیم. چهارضلعی حاصل (مستطیل) جواب مسأله است.



۵۱



فرض : $\begin{cases} \widehat{A}_۱ = \widehat{A}_۲ \\ \widehat{B}_۱ = \widehat{B}_۲ \end{cases}$ حکم : $\widehat{M} = \dfrac{\widehat{C}}{۲}$

$$\overset{\triangle}{ABC} \ : \ y\widehat{A}C = \widehat{B} + \widehat{C}$$

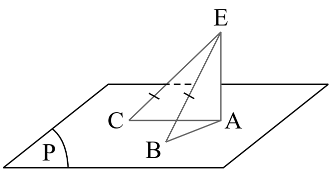
$$\widehat{A}_۱ + \widehat{A}_۲ = \widehat{B}_۱ + \widehat{B}_۲ + \widehat{C} \rightarrow ۲\widehat{A}_۲ = ۲\widehat{B}_۱ + \widehat{C}$$

$$\rightarrow \widehat{C} = ۲\widehat{A}_۲ - ۲\widehat{B}_۱ \rightarrow \frac{\widehat{C}}{۲} = \widehat{A}_۲ - \widehat{B}_۱ \ \ (۱)$$

$$\overset{\triangle}{ABM} \ : \ \underbrace{y\widehat{A}t}_{\widehat{A}_۱} = \widehat{B}_۱ + \widehat{M} \xrightarrow{\widehat{A}_۱ = \widehat{A}_۲} \widehat{A}_۲ = \widehat{B}_۱ + \widehat{M} \ \ (۲)$$

$$(۱) \, , \, (۲) \Rightarrow \frac{\widehat{C}}{۲} = \widehat{B}_۱ + \widehat{M} - \widehat{B}_۱ \rightarrow \frac{\widehat{C}}{۲} = \widehat{M}$$

۵۲



$$EA \perp P \rightarrow \begin{cases} EA \perp AB \\ EA \perp AC \end{cases}$$

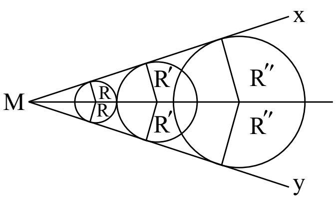
در نتیجه دو مثلث EAC و EAB در رأس A قائمه هستند و از آنجا که طبق فرض داریم $EB = EC$ پس دو مثلث بنا به حالت تساوی وتر و یک ضلع قائمه (AE مشترک) هم‌نهشت هستند، پس $AB = AC$.

۵۳ می‌دانیم که میانهٔ مثلث، آن را به دو مثلث هم‌مساحت (هم‌ارز) تقسیم می‌کند، پس داریم:

$$S_{\overset{\triangle}{PNC}} = \frac{۱}{۲}(S_{\overset{\triangle}{APC}}) = \frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۲}S_{\overset{\triangle}{AMC}}) = \frac{۱}{۴}(\frac{۱}{۲}S_{\overset{\triangle}{ABC}}) = \frac{۱}{۸}S_{\overset{\triangle}{ABC}}$$

۵۴ برای بررسی راحت‌تر، روی شکل چند تا از دایره‌ها را رسم می‌کنیم. در هریک از دایره‌ها، شعاع را بر نقاط تماس وارد می‌کنیم.

این شعاع‌ها بر نقاط تماس عمود هستند و ما می‌دانیم نقاطی که از دو ضلع زاویه به یک فاصله‌اند روی نیمساز آن زاویه واقع هستند. پس مکان موردنظر نیمساز $x\widehat{M}y$ است.

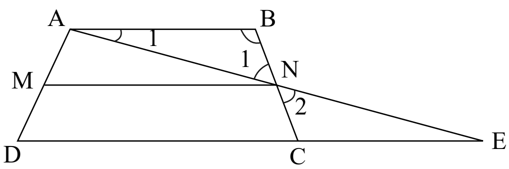


۵۵ الف) ۵۲ عدد

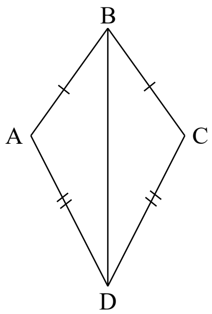
ب) ۳۸ عدد

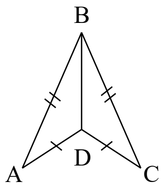
۵۶ در ذوزنقهٔ $ABCD$ وسط ساق AD را M و وسط ساق BC را N می‌نامیم و از M به N وصل می‌کنیم. حال از A به N وصل نموده، امتداد می‌دهیم تا امتداد قاعدهٔ CD را در نقطهٔ E قطع کند. دو مثلث ABN و NCE هم‌نهشت هستند. پس $AB = CE$ و $AN = NE$ است و $DE = DC + CE = DC + AB$. از طرفی، چون $MN||DE$ و نقطه‌های M و N وسط ضلع‌های AD و AE از مثلث ADE هستند. طبق قضیهٔ تالس داریم:

$$\overset{\triangle}{ADE} : \frac{AM}{AD} = \frac{MN}{DE} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow MN = \frac{۱}{۲}DE = \frac{۱}{۲}(AB + CD)$$



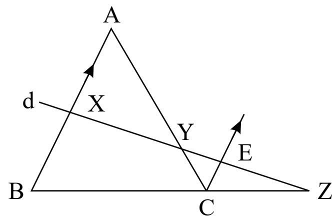
۵۷ خیر، مثال نقض‌هایی را نشان می‌دهیم.





۵۸ شکل‌های (ب) و (ت) چندضلعی هستند و شکل‌های (الف)، (پ) و (ث) چندضلعی نیستند.

۵۹ از C خطی موازی AB رسم می‌کنیم تا d را در E قطع کند.



$$\overset{\Delta}{AXY} \sim \overset{\Delta}{YCE} \rightarrow \frac{CE}{AX} = \frac{CY}{YA}$$

$$\overset{\Delta}{BXZ} : CE || BX \rightarrow \frac{ZC}{BZ} = \frac{CE}{XB} \rightarrow \frac{XB}{CE} = \frac{BZ}{ZC}$$

از ضرب طرفین تساوی‌های بالا داریم:

$$\frac{BZ}{ZC} \times \frac{CY}{YA} = \frac{CE}{AX} \times \frac{XB}{CE} \rightarrow \frac{AX}{XB} \times \frac{BZ}{ZC} \times \frac{CY}{YA} = ۱$$

۶۰ با توجه به شکل و قضیهٔ تالس داریم:

$$\left.\begin{aligned} BC||AF \rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{FC}{EF} \\ DC||AE \rightarrow \frac{AD}{AF} = \frac{EC}{EF} \end{aligned}\right\} \rightarrow \frac{AB}{AE} + \frac{AD}{AF} = \frac{FC}{EF} + \frac{EC}{EF} = \frac{FC+EC}{EF} = \frac{EF}{EF} = ۱ \rightarrow \frac{AB}{AE} + \frac{AD}{AF} = ۱$$