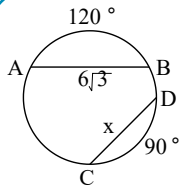


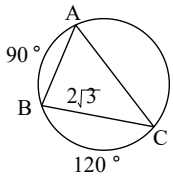
۱ در شکل مقابل، طول وتر CD چقدر است؟



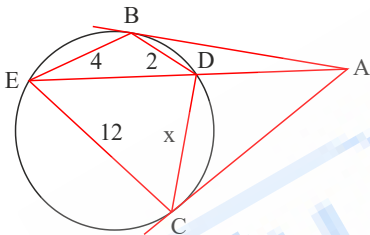
۲ در مثلث ABC ثابت کنید:

$$S_{\triangle ABC} = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$$

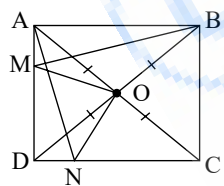
۳ در شکل مقابل، طول ضلع AB چقدر است؟



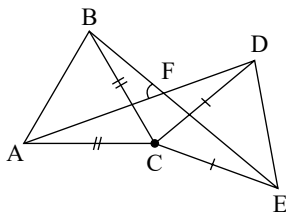
۴ در شکل مقابل B و C نقاط تماس هستند. مقدار x چقدر است؟



۵ در مربع $ABCD$ ، O مرکز مربع و $AM = DN$. ثابت کنید با دوران به مرکز O و زاویه 90° ، مثلث ABM بر مثلث ADN تصویر می‌شود.

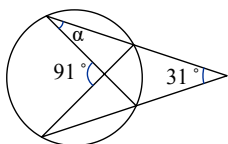


۶ در شکل روبه‌رو، مثلث‌های ABC و DEC متساوی‌الاضلاع هستند. الف) با کدام تبدیل و به چه صورت نقطه E بر B و نقطه D بر E تصویر می‌شود؟



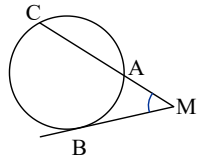
ب) با استفاده از ویژگی‌های تبدیل قسمت الف)، ثابت کنید که: $AD = BE$ و $\hat{AFB} = 60^\circ$.

۷ در شکل مقابل اندازه زاویه α را به دست آورید.

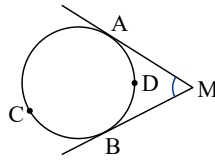


۸ در شکل‌های زیر ثابت کنید:

(راهنمایی: از نقطه تماس ضلع زاویه بر دایره، خطی موازی ضلع دیگر زاویه رسم کنید.)

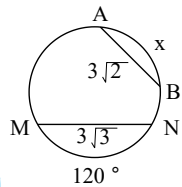
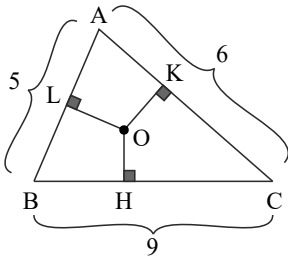


$$\hat{M} = \frac{\widehat{CB} - \widehat{AB}}{2} \text{ (ب)}$$



$$\hat{M} = \frac{\widehat{ACB} - \widehat{ADB}}{2} \text{ (الف)}$$

۹ در شکل مقابل داریم: $OK = \sqrt{2}$, $OH = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ طول OL چقدر است؟



۱۰ در شکل مقابل، اندازه کمان x چقدر است؟

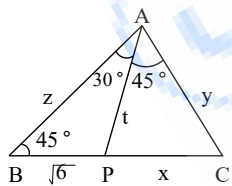
۱۱ در هر مثلث ثابت کنید:

$$\frac{a + b + c}{\sin \hat{A} + \sin \hat{B} + \sin \hat{C}} = 2R$$

۱۲ در مثلث ABC ، H محل هم‌رسی ارتفاع‌هاست.

ثابت کنید شعاع دایره محیطی مثلث‌های AHB و BHC و AHC با شعاع دایره محیطی مثلث ABC برابر است.

۱۳ در شکل مقابل، طول x و y و z و t را حساب کنید.

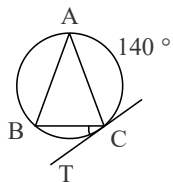


۱۴ در مثلث ABC ، $b = \sqrt{2}a$ و $\hat{A} = 30^\circ$. اندازه زاویه \hat{C} چقدر است؟

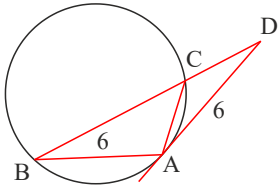
۱۵ واژه‌های زیر را تعریف کنید.

(الف) ایزومتري (ب) دو خط متنافر (ج) صفحه عمودمنصف یک پاره خط

۱۶ در شکل روبه‌رو، $AB = AC$ و $\hat{AC} = 140^\circ$ است. اگر CT مماس بر دایره در نقطه C باشد، اندازه زاویه BCT را بیابید.

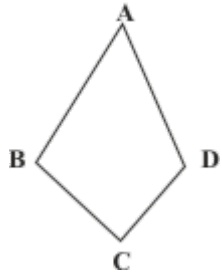


۱۷ در شکل مقابل AD بر دایره مماس بوده و $AB=AD=6$ است. اگر محیط مثلث ABC برابر با ۱۶ باشد، اندازه BC چقدر است؟

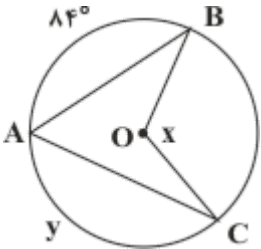


۱۸ دو زاویه مجاور یک چهارضلعی محاطی 80° و 120° است، قدرمطلق تفاضل دو زاویه دیگر چقدر است؟

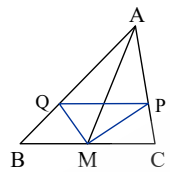
۱۹ در چهارضلعی $ABCD$ ، $AB + CD = AD + BC$ است. ثابت کنید که این چهارضلعی محیطی است.



۲۰ الف) اگر $\hat{y} = 140^\circ$ ، آنگاه اندازه زاویه x را به دست آورید. ب) اگر $\hat{x} = 165^\circ$ ، آنگاه اندازه کمان \hat{y} را به دست آورید.



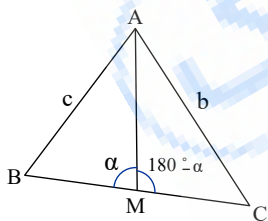
۲۱ در مثلث ABC ، M وسط BC و MP و MQ نیمسازهای زوایای AMB و AMC هستند؛ ثابت کنید: $PQ \parallel BC$



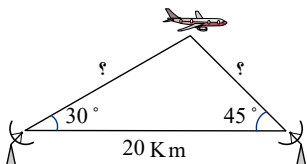
۲۲ در مثلث ABC ، میانه AM را رسم کرده ایم ($MB = MC = \frac{a}{2}$). با نوشتن قضیه کسینوسها در دو مثلث AMB و AMC ، b^2 و c^2 را محاسبه، و با جمع کردن دو تساوی حاصل، درستی تساوی زیر را ثابت کنید:

$$b^2 + c^2 = 2AM^2 + \frac{a^2}{2} \quad (\text{قضیه میانهها})$$

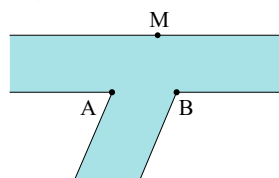
در حالت خاص $AB = 4$ و $AC = 6$ و $BC = 8$ ، طول میانه AM را به دست آورید.



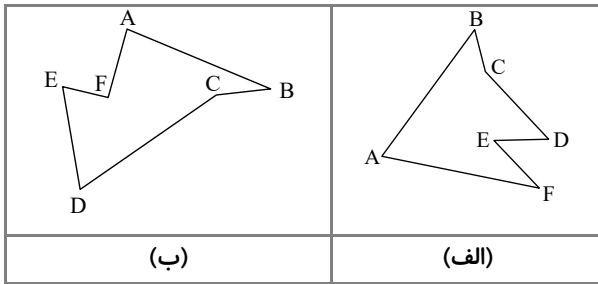
۲۳ دو ایستگاه رادار که در فاصله ۲۰ کیلومتری از هم واقع هستند، هواپیمایی را با زاویه های 30° و 45° درجه رصد کرده اند. فاصله هواپیما از دو ایستگاه را به دست آورید.



۲۴ می خواهیم کنار رودخانه ها، ۳ اسکله بسازیم. جای ۲ اسکله A و B مطابق شکل مشخص است. اسکله M را در چه نقطه ای از ساحل بسازیم که قایق ها هنگام طی مسیر $MABM$ کوتاه ترین مسیر را طی کنند؟



۲۵ دور زمین‌هایی مطابق شکل، حصارکشی شده است. چطور می‌توان بدون کم و زیاد کردن حصارها، مساحت زمین را افزایش داد؟



۲۶ در حالتی که پاره خط AB در راستای عمود بر خط بازتاب قرار دارد، ثابت کنید که اگر $A'B'$ بازتاب AB باشد، AB و $A'B'$ هم‌اندازه‌اند.

۲۷ شش ضلعی منتظم $ABCDEF$ مفروض است. با امتداد دادن اضلاع شش ضلعی، مطابق شکل، مثلث MNP را ساخته‌ایم.

الف) نشان دهید MNP متساوی‌الاضلاع است.

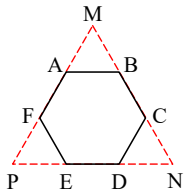
ب) نشان دهید مساحت شش ضلعی، دو سوم مساحت مثلث MNP است.

پ) از نقطه دلخواه T درون شش ضلعی عمودهای TH ، TH' و TH'' را به ترتیب بر BC ، ED و AF رسم کنید. با توجه به آنچه از هندسه پایه ۱

می‌دانید، مجموع طول‌های این سه عمود با کدام جزء از مثلث MNP برابر است؟

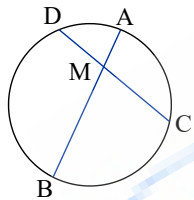
ت) مجموع مساحت‌های مثلث‌های TBC ، TDE و TAF چه کسری از مساحت مثلث MNP است؟ نشان دهید:

$$S_{TBC} + S_{TDE} + S_{TAF} = S_{TAB} + S_{TEF} + S_{TCD}$$

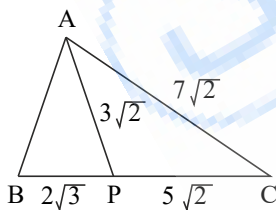


۲۸ در دایره $C(O, R)$ وتر AB ، وتر CD به طول ۹ سانتی‌متر را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم کرده است. اگر $AB = 11 \text{ cm}$ ، آنگاه وتر CD وتر

AB را به چه نسبتی قطع می‌کند؟

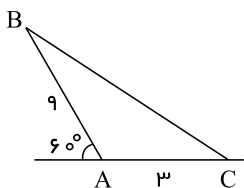


۲۹ در شکل مقابل، مساحت مثلث APB چقدر است؟



۳۰ قطر مستطیلی ۱۲ و زاویه بین قطرها 60° است. مساحت مستطیل چقدر است؟

۳۱ مساحت مثلث ABC را حساب کنید.

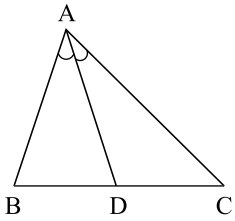


۳۲ طول سه ارتفاع یک مثلث ۳، ۴ و ۶ هستند. مساحت مثلث را حساب کنید.

۳۳ مساحت مثلث با دو ضلع به اندازه‌های ۱۶ و ۹ واحد برابر با $24\sqrt{5}$ واحد مربع است. طول بزرگ‌ترین ضلع این مثلث چقدر است؟

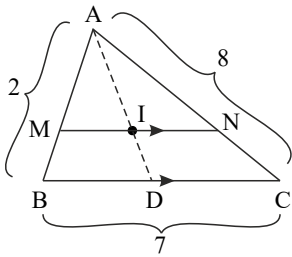
۳۴ ارتفاع‌های مثلثی با مقادیر $\sqrt{3}$ ، $\sqrt{6}$ و $\sqrt{2}$ متناسب هستند. نوع مثلث و زوایای آن را مشخص کنید.

۳۵ در شکل مقابل، ثابت کنید: $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$ (نیمساز داخلی \hat{A} : AD)



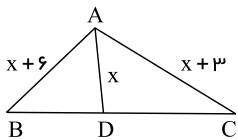
۳۶ در مثلث ABC رابطه $\hat{A} = 2\hat{B}$ برقرار است. ثابت کنید: $a^2 - b^2 = bc$.

۳۷ در شکل مقابل، محل هم‌رسی نیمسازهاست. حاصل $\frac{S_{MNCB}}{S_{\triangle ABC}}$ چقدر است؟ ($MN \parallel BC$)

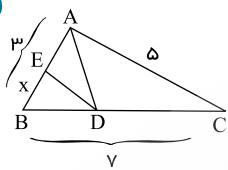


۳۸ در مثلث ABC ، $AB = 8$ و $AC = 6$ و $\hat{A} = 2\hat{C}$ است. اندازه ضلع BC را حساب کنید.

۳۹ در شکل مقابل، $\hat{A} = 120^\circ$ و AD نیمساز داخلی \hat{A} است. مقدار x را حساب کنید.



۴۰ در شکل مقابل، AD و DE نیمسازند. x چقدر است؟



۴۱ در مثلث ABC ، ثابت کنید:

$$d_a = \frac{2bc \cdot \cos \frac{\hat{A}}{2}}{b+c} \quad (d_a \text{ نیمساز داخلی زاویه } A)$$

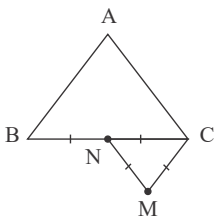
۴۲ در متوازی‌الاضلاع به طول اضلاع ۳ و ۴، حاصل مجموع مربعات قطرها چقدر است؟

۴۳ در مثلث ABC ، $AB = 3$ و $AC = 4$ و $BC = x - 1$ و $A > 90^\circ$ است. حدود x را مشخص کنید.

۴۴ خط d را نسبت به خط Δ بازتاب می‌کنیم تا خط d' به دست آید. d' را تحت زاویه α و به مرکز O دوران می‌دهیم تا خط d'' به دست آید. اگر

زاویه بین d و d' برابر β باشد، زاویه بین d و d'' کدام است؟ (دوران در جهت ساعتگرد است)

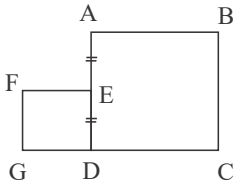
۴۵ مطابق شکل با ترکیب کدام تبدیل‌ها مثلث متساوی‌الاضلاع ABC تصویر مثلث متساوی‌الاضلاع MNC است؟



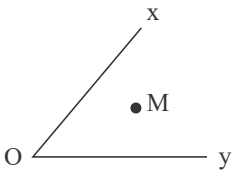
۴۶ نقطه M درون زاویه xOy قرار دارد. می‌خواهیم A و B را بر Ox و Oy بیابیم که محیط $\triangle MAB$ کمترین مقدار ممکن باشد. کدام تبدیل

استفاده می‌شود؟

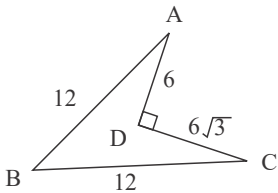
۴۷ مطابق شکل $ABCD$ و $EFGD$ مربع هستند و E وسط AD است. با ترکیب کدام تبدیل ها، $ABCD$ تصویر $EFGD$ است؟



۴۸ مطابق شکل، با استفاده از کدام تبدیل می توان خطی از M گذراند تا Ox و Oy را در A و B قطع کند طوری که $MA = MB$ باشد؟

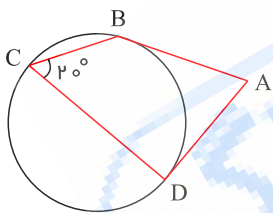


۴۹ مطابق شکل اگر بخواهیم بدون تغییر محیط، مساحت چهارضلعی را افزایش دهیم، مقدار افزایش مساحت جدید چقدر است؟



۵۰ تصویر یک خط تحت یک تبدیل بر همان خط منطبق است. این تبدیل چه تبدیلهایی می تواند باشد؟

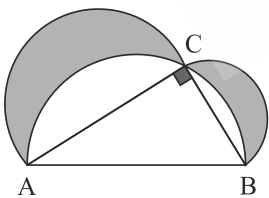
۵۱ مثلث $A'B'C'$ مجانس مستقیم مثلث ABC به مرکز تجانس O می باشد. اگر $\frac{OA'}{AA'} = 3$ و نوع تجانس انقباضی باشد، مساحت مثلث ABC چند برابر مساحت مثلث $A'B'C'$ است؟



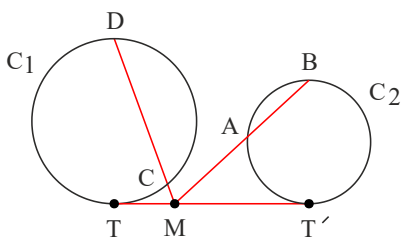
۵۲ در شکل مقابل AB و AD بر دایره مماس است. اگر $\hat{C} = 20^\circ$ باشد، اندازه زاویه \hat{A} چقدر است؟

۵۳ در یک مثلث مختلف الاضلاع اوساط اضلاع و پای یک ارتفاع رئوس یک چهارضلعی هستند. نوع این چهارضلعی چیست؟

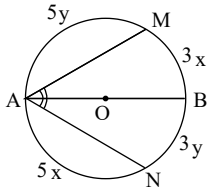
۵۴ در شکل مقابل بر اضلاع قائمه مثلث قائم الزاویه ABC ، دو نیم دایره قرار دارد. نسبت مجموع دو ناحیه هاشورخورده به مساحت مثلث ABC چقدر است؟



۵۵ در شکل مقابل T و T' نقاط تماس هستند. اگر $TM = \frac{1}{3}MT'$ باشد حاصل $\frac{MA \cdot MB}{MC \cdot MD}$ چقدر است؟

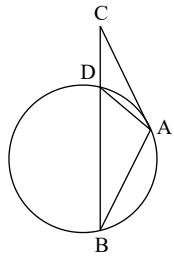


۵۶ در مثلث ABC ، نیمسازهای زاویه‌های خارجی B و C ، یکدیگر را در نقطه M قطع می‌کنند. اگر O محل هم‌رسی نیمسازهای داخلی باشد، نوع چهارضلعی $BOCM$ چیست؟

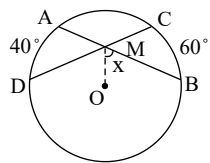


۵۷ در شکل مقابل AB قطر دایره است. اندازه زاویه MAN چند درجه است؟

۵۸ در یک شش‌ضلعی منتظم به محیط $۱۲\sqrt{3}$ فاصله مرکز دایره محیطی آن تا یکی از اضلاع شش‌ضلعی چقدر است؟

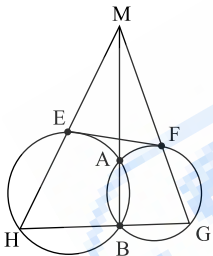


۵۹ در شکل مقابل AC در نقطه A بر دایره مماس بوده و $AC = AB$ است. ثابت کنید: $AD = DC$

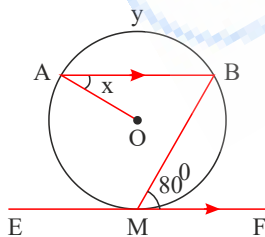


۶۰ در شکل مقابل دو وتر AB و CD مساوی‌اند. اگر O مرکز دایره باشد، زاویه x کدام است؟

۶۱ در شکل زیر، دو دایره در نقاط A و B متقاطع‌اند و M نقطه‌ای بر امتداد پاره‌خط AB است. اگر دو قاطع دلخواه MH و MG را رسم کنیم، چهارضلعی $EFGH$ همواره:



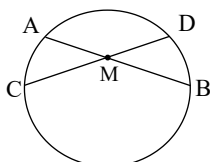
۶۲ در شکل مقابل $AB \parallel EF$ و پاره‌خط EF در نقطه M بر دایره مماس است.



مقادیر مجهول x و y را حساب کنید.

۶۳ دو دایره C و C' به مرکزهای O و O' به شعاع‌های ۳ و ۵ و طول خط‌المركزین $OO' = ۱۱$ مفروض است. چند خط می‌توان رسم کرد که از O و O' به ترتیب به فاصله‌های ۳ و ۵ باشد؟

۶۴ در دایره مقابل، دو وتر AB و CD در نقطه M متقاطع هستند. اگر $MA = ۶$ و $MB = ۳$ و $MD = ۲٫۵$ ، طول MC چقدر است؟

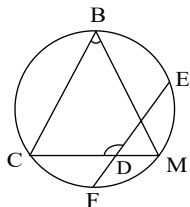


۶۵ سه دایره مساوی به شعاع R مطابق شکل بر هم مماس اند و مراکز آنها روی یک خط راست، قرار دارد. مساحت نواحی رنگ شده چقدر است؟



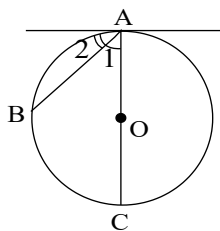
۶۶

در شکل مقابل M وسط کمان EF است و $\widehat{BC} = 50^\circ$ ، اندازه $\widehat{B} + \widehat{D}$ چند درجه است؟



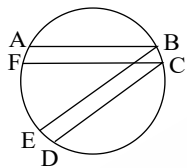
۶۷

در شکل مقابل اندازه زاویه ظلی A_2 برابر 50° است. اندازه کمان \widehat{BC} بر حسب درجه چقدر است؟



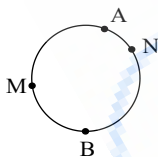
۶۸

در شکل مقابل اگر $AB \parallel FC$ و $CD \parallel BE$ و $\widehat{AB} = 60^\circ$ و $\widehat{CD} = 40^\circ$ و $\widehat{EF} = 110^\circ$ باشد، آنگاه اندازه زاویه \widehat{FCD} را بیابید.



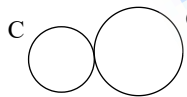
۶۹

در دایره مقابل داریم: $\widehat{AMB} = 4\widehat{ANB}$ ، کمان \widehat{ANB} چه کسری از محیط دایره است؟



۷۰

شکل زیر نشان دهنده دو دایره مماس برون است.



الف) این شکل دارای چند مماس مشترک خارجی و چند مماس مشترک داخلی است؟

ب) اگر $R = 4$ و $R' = 9$ آنگاه اندازه مماس مشترک خارجی آنها را به دست آورید.

۷۱

مقدار a را چنان بیابید که اندازه مماس مشترک خارجی دو دایره به شعاع‌های ۳ و ۸ و خط‌المركزین $d = 13$ برابر $5a - 3$ باشد.

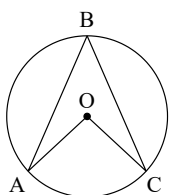
۷۲

مقدار x را چنان بیابید که اندازه مماس مشترک داخلی دو دایره به شعاع‌های ۲ و ۳ و خط‌المركزین $d = 13$ برابر $5x - 8$ باشد.

۷۳

در دایره به مرکز O ، اگر $\widehat{AOC} = (3\alpha + 12)^\circ$ و $\widehat{ABC} = (\alpha + 16)^\circ$ باشد، مقدار α و اندازه زاویه مرکزی AOC و محاطی ABC

را محاسبه کنید.



۷۴

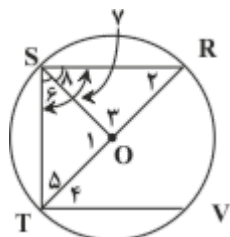
در مورد هم‌رسمی مماس مشترک‌های خارجی دو دایره و خط‌المركزین آنها چه می‌توان گفت؟

۷۵) در شکل زیر دو قاطع IE , IN با هم برابرند، ثابت کنید: $IS = ID$

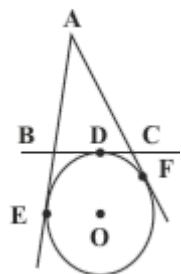


۷۶) با استفاده از تعریف زاویه محاطی، نشان دهید مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث 180° است.

۷۷) در دایره‌ای به مرکز O ، $RS \parallel VT$ ، $\widehat{TS} = 70^\circ$ و قطر RT دایره است. اندازه زاویه‌های ۱ تا ۸ را به دست آورید.

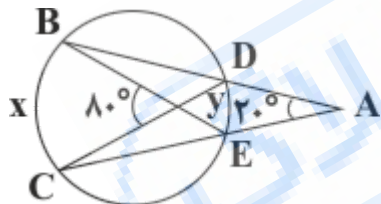


۷۸) خط‌های BC , AF , AE به ترتیب در نقطه‌های E و F و D بر دایره (O) مماس هستند. مماس BC ، خط‌های AE , AF را به ترتیب در نقطه‌های C , B قطع کرده است. ثابت کنید با تغییر مکان نقطه D روی دایره بین دو نقطه E , F ، محیط مثلث ABC ثابت می‌ماند.

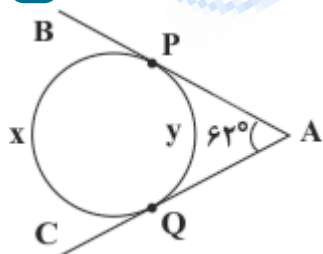


۷۹) در هر کدام از شکل‌های زیر y و x را بیابید.

الف

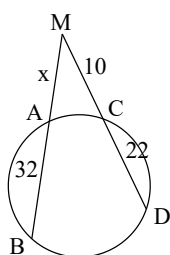


ب

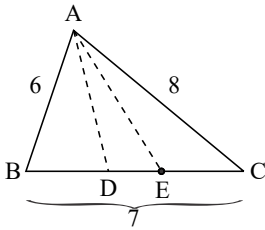


۸۰) در هریک از شکل‌های زیر x و y را بیابید.

الف) در دایره زیر، مقدار مجهول x را به دست آورید.



۸۱) در مثلث ABC ، اضلاع $AB = 6$ و $AC = 8$ و $BC = 7$ هستند. نیمساز AD را رسم می‌کنیم.



الف) طول BD و CD را حساب کنید.

ب) طول نیمساز AD را حساب کنید.

پ) اگر AE نیمساز زاویه $\hat{D}AC$ باشد، طول AE را حساب کنید.

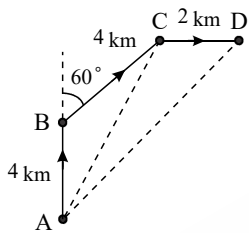
۸۲) در n ضلعی منتظم، کوچک‌ترین قطر $\sqrt{2} + \sqrt{2}$ برابر طول ضلع آن است. n چقدر است؟

۸۳) اگر در مثلثی اضلاع AB و AC و زاویه A معلوم باشند، مساحت مثلث از رابطه به دست می‌آید.

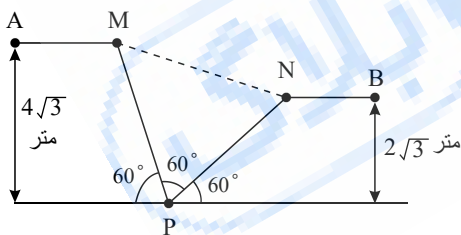
۸۴) یک پیک موتوری در مسیر رساندن مرسولات به مقصد، ابتدا ۴ کیلومتر به سمت شمال حرکت می‌کند و سپس مسیرش را 60° به سمت شرق

منحرف نموده و ۴ کیلومتر دیگر حرکت می‌کند و در انتها ۲ کیلومتر مستقیم به سمت شرق حرکت می‌کند تا به مقصد می‌رسد. فاصله مبدأ تا مقصد (AD) چقدر است؟

(راهنمایی: ابتدا در مثلث ABC ، طول AC را حساب کنید، سپس در مثلث ACD ، زاویه $\hat{A}CD$ را یافته و طول AD را محاسبه کنید)



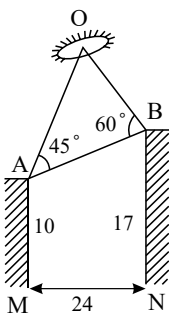
۸۵) مطابق شکل، دونده‌ای از نقطه A به سمت نقطه B شروع به دویدن می‌کند. مسافتی را که این دونده روی پل MN طی می‌کند، حساب کنید.



۸۶) دو نفر (A, B) به طور هم‌زمان از بالای دو ساختمان به ارتفاع‌های ۱۷ و ۱۰ متر، یک شیء نورانی را مطابق شکل با زاویه دید 45° و 60°

(نسبت به پاره‌خط AB) رؤیت کرده‌اند. اگر فاصله دو ساختمان از یکدیگر ۲۴ متر باشد، فاصله شیء نورانی از دو نفر را حساب کنید. (OB و OA)

حساب کنید.) ($\sin 75^\circ \sim 0.9$)

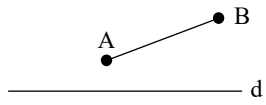


۸۷) در هر مثلث، اگر یک زاویه منفرجه باشد، مرکز دایره محیطی مثلث قرار می‌گیرد.

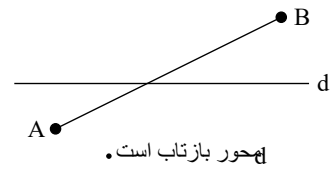
۸۸) در هر مثلث قائم‌الزاویه، حاصل $\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$ برابر با است. ($\hat{A} = 90^\circ$)

- ۸۹ الف. آیا با داشتن دو وتر موازی از دایره‌ای، می‌توان مرکز دایره را پیدا کرد؟ چرا؟
 ب. آیا در حالتی که دو وتر ناموازی از دایره‌ای را داشته باشیم، می‌توان مرکز آن دایره را یافت؟ چرا؟
 ۹۰ ثابت کنید بازتاب محوری یک تبدیل طولپا است. (مسئله را در دو حالت زیر بررسی کنید)

الف



محور بازتاب است.



محور بازتاب است.

ب

از فایلی بیای

پاسخنامه تشریحی

۱ از نقطه دلخواه M روی محیط دایره به A و B وصل می‌کنیم. داریم:

$$\widehat{AMB} = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ \Rightarrow 2R = \frac{6\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} = 12$$

$\Rightarrow R = 6$ (شعاع دایره محیطی $\triangle MAB$ و شعاع دایره)

حال اگر از نقطه دلخواه N روی محیط دایره به C و D وصل کنیم، داریم:

$$\widehat{CND} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ \Rightarrow 2R = \frac{x}{\sin 45^\circ}$$

$$\Rightarrow 12 = \frac{x}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow x = 6\sqrt{2}$$

۲ می‌دانیم که:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin \hat{A}$$

$$\begin{cases} b = 2R \times \sin \hat{B} \\ c = 2R \times \sin \hat{C} \end{cases} \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 2R \times \sin \hat{B} \times 2R \times \sin \hat{C} \times \sin \hat{A}$$

$$\Rightarrow S_{\triangle ABC} = 2R^2 \sin \hat{A} \sin \hat{B} \sin \hat{C}$$

$$\widehat{A} = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ, \quad \widehat{C} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$$

$$\frac{AB}{\sin \hat{C}} = \frac{BC}{\sin \hat{A}} \Rightarrow \frac{AB}{\sin 45^\circ} = \frac{2\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} \Rightarrow \frac{AB}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow AB = 2\sqrt{2}$$

$$\begin{cases} \triangle ABD \sim \triangle ABE \Rightarrow \frac{BD}{BE} = \frac{AB}{AE} \\ \triangle ADC \sim \triangle ACE \Rightarrow \frac{CD}{CE} = \frac{AC}{AE} \end{cases}, \quad AB = AC$$

مماس‌های رسم شده بر دایره

$$\Rightarrow \frac{BD}{BE} = \frac{CD}{CE} \Rightarrow \frac{2}{4} = \frac{x}{12} \Rightarrow x = 6$$

۵ ابتدا ثابت می‌کنیم که دو مثلث $\triangle DON$ و $\triangle AOM$ هم‌نهشت هستند:

$$\begin{cases} OA = OD \\ AM = DN \\ \widehat{OAM} = \widehat{ODN} = 45^\circ \end{cases} \Rightarrow \triangle AOM \cong \triangle DON \Rightarrow \begin{cases} OM = ON & (1) \\ \widehat{AOM} = \widehat{DON} & (2) \end{cases}$$

از رابطه (۲) داریم:

$$\widehat{AOM} = \widehat{DON} \Rightarrow \widehat{AOM} + \widehat{MOD} = \widehat{DON} + \widehat{MOD} \Rightarrow \widehat{AOD} = \widehat{MON}, \quad \widehat{AOD} = 90^\circ \Rightarrow \begin{cases} \widehat{MON} = 90^\circ \\ (1): OM = ON \end{cases}$$

بنابراین نقطه M با دوران به مرکز O و زاویه 90° بر N تصویر می‌شود. از دوران به مرکز O و زاویه 90° ، A بر D تصویر می‌شود و به همین ترتیب، B بر A تصویر می‌شود.

به این ترتیب، رأس‌های مثلث $\triangle ABM$ بر رأس‌های مثلث $\triangle ADN$ تصویر می‌شوند. پس دوران یافته $\triangle ABM$ به مرکز O و زاویه 90° ، بر مثلث $\triangle ADN$ منطبق می‌شود.

$$\triangle ABC \text{ متساوی‌الاضلاع} \Rightarrow \widehat{ACB} = 60^\circ, \quad AC = CB$$

الف) پس می‌توان گفت که نقطه B دوران یافته A به مرکز C و زاویه $60^\circ -$ است. به همین ترتیب:

$$1\lambda = 9 + 9 - 1\lambda \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = 0 \Rightarrow \theta = 90^\circ \Rightarrow x = 90^\circ$$

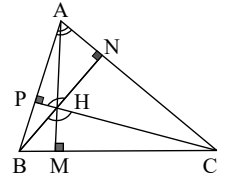
۱۱) طبق قضیه سینوس ها داریم:

$$a = 2R \sin \hat{A}, \quad b = 2R \sin \hat{B}, \quad c = 2R \sin \hat{C} \Rightarrow \frac{a+b+c}{\sin \hat{A} + \sin \hat{B} + \sin \hat{C}}$$

$$= \frac{2R(\sin \hat{A} + \sin \hat{B} + \sin \hat{C})}{\sin \hat{A} + \sin \hat{B} + \sin \hat{C}} = 2R$$

$$APHN : \hat{P} + \hat{N} = 180^\circ \Rightarrow \hat{A} + \hat{PHN} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{PHN} = 180^\circ - \hat{A} = \hat{BHC}$$



$$\begin{cases} 2R \Delta_{BHC} = \frac{BC}{\sin \hat{BHC}} = \frac{BC}{\sin(180^\circ - \hat{A})} = \frac{BC}{\sin \hat{A}} & (1) \\ 2R \Delta_{ABC} = \frac{BC}{\sin \hat{A}} & (2) \end{cases}$$

(1), (2) $\Rightarrow 2R \Delta_{BHC} = 2R \Delta_{ABC} \Rightarrow R \Delta_{BHC} = R \Delta_{ABC}$

به همین ترتیب، چون $\hat{AHC} = 180^\circ - \hat{B}$ و $\hat{AHB} = 180^\circ - \hat{C}$ بنابراین: $R \Delta_{AHC} = R \Delta_{BHC} = R \Delta_{AHB} = R \Delta_{ABC}$

$$\Delta_{APB} \text{ قانون سینوس ها در } \frac{\sqrt{6}}{\sin 30^\circ} = \frac{AP}{\sin 45^\circ} \Rightarrow \frac{\sqrt{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{AP}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow AP = t = 2\sqrt{3}$$

$$\hat{C} = 180^\circ - (45^\circ + 30^\circ + 45^\circ) = 60^\circ$$

$$\Delta_{APC} \text{ قانون سینوس ها در } \frac{AP}{\sin 60^\circ} = \frac{x}{\sin 45^\circ} \Rightarrow \frac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{x}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow x = 2\sqrt{2}$$

$$\Delta_{APC} \sim \Delta_{ABC} \Rightarrow y^2 = x \times BC$$

$$\Rightarrow y^2 = 2\sqrt{2}(2\sqrt{2} + \sqrt{6}) = 8 + 4\sqrt{3} \Rightarrow y = 2\sqrt{2 + \sqrt{3}}$$

$$\Delta_{ABC} : \frac{z}{\sin 60^\circ} = \frac{y}{\sin 45^\circ} \Rightarrow \frac{z}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow z = \sqrt{12 + 6\sqrt{3}}$$

$$\text{قانون سینوس ها } b = \sqrt{2}a \Rightarrow 2R \times \sin \hat{B} = \sqrt{2} \times 2R \times \sin \hat{A}$$

$$\sin \hat{B} = \sqrt{2} \times \sin 30^\circ = \sqrt{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin \hat{B} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \hat{B} = 45^\circ \text{ یا } 135^\circ \Rightarrow \begin{cases} \hat{C} = 180^\circ - (30^\circ + 45^\circ) = 105^\circ \\ \hat{C} = 180^\circ - (30^\circ + 135^\circ) = 15^\circ \end{cases}$$

۱۵) الف) تبدیلی که فاصله بین نقطه‌ها (طول پاره‌خطها) را حفظ کند، ایزومتری نامیده می‌شود.

ب) دو خط در فضا را که در یک صفحه قرار نمی‌گیرند، دو خط متنافر می‌نامیم.

ج) صفحه‌ای را که در وسط یک پاره‌خط بر آن عمود باشد، صفحه عمودمنصف آن پاره‌خط می‌نامیم.

$$AB = AC \Rightarrow \hat{AB} = \hat{AC} = 140^\circ \Rightarrow \hat{BC} = 360^\circ - 2 \times 140^\circ = 80^\circ \Rightarrow \hat{BCT} = 40^\circ$$

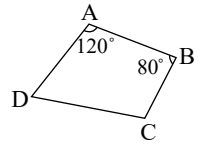
$$AB = AD \Rightarrow \hat{B} = \hat{D}, \quad (\text{محاظی}) \quad \hat{B} = \frac{\hat{AC}}{2}, \quad (\text{ظلی}) \quad \hat{A} = \frac{\hat{AC}}{2}$$

$$\Rightarrow \hat{A} = \hat{D} = \frac{\hat{AC}}{2} \Rightarrow AC = CD$$

$$\begin{aligned} \Delta ABC \text{ محیط} &= 16 = AB + AC + BC = 6 + AC + BC \Rightarrow AC + BC = 10 \\ CD = AC &\Rightarrow BD = BC + CD = BC + AC = 10 \Rightarrow BD = 10 \\ AD^2 &= CD \times BD \Rightarrow 36 = CD \times 10 \Rightarrow CD = 3,6 \\ \Rightarrow BC &= BD - CD = 10 - 3,6 = 6,4 \end{aligned}$$

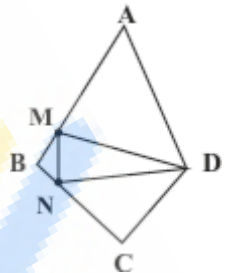
۱۸) بیق شکل داریم:

$$\begin{cases} \hat{A} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \hat{C} = 60^\circ \\ \hat{B} + \hat{D} = 180^\circ \Rightarrow \hat{D} = 100^\circ \Rightarrow \hat{D} - \hat{C} = 40^\circ \end{cases}$$



۱۹) اگر روی ضلع AB نقطه M را طوری انتخاب کنیم که AM = AD و اگر روی ضلع BC نقطه N را طوری انتخاب کنیم که DC = CN باشد در این صورت مثلث‌های ADM, DCN متساوی‌الساقین هستند. ضمناً با توجه به فرض مسأله داریم:

$$AB + CD = AD + BC \Rightarrow AM + MB + CD = AD + BN + CN$$



چون $AM = AD$, $DC = CN$ می‌باشد پس $MB = BN$ می‌باشد. بنابراین مثلث BMN نیز متساوی‌الساقین است.

اگر عمودمنصف‌های مثلث DMN را رسم کنیم همدیگر را در نقطه‌ای مانند I قطع می‌کنند از طرفی عمودمنصف‌های اضلاع DM , MN , DN نقش نیمسازهای زوایای \hat{A} , \hat{B} , \hat{C} را نیز دارند پس طبق ویژگی مکان هندسی نیمساز، فاصله نقطه I از همه اضلاع AD , AB , BC , DC مساوی است. بنابراین نقطه I مرکز دایره محاطی این چهارضلعی است پس این چهارضلعی محیطی است.

۲۰) الف) با توجه به شکل داریم:

$$\begin{aligned} 84^\circ + y + \hat{BC} &= 360^\circ \Rightarrow \hat{BC} = 360^\circ - 84^\circ - 140^\circ = 136^\circ \\ \hat{x} = \hat{BC} &= 136^\circ \end{aligned}$$

(ب)

$$\hat{x} = 165^\circ \Rightarrow \hat{BC} = 165^\circ \Rightarrow 84^\circ + 165^\circ + y = 360^\circ \Rightarrow \hat{y} = 111^\circ$$

۲۱)

$$\begin{aligned} \Delta AMB : MQ \text{ نیمساز} : \frac{AQ}{BQ} &= \frac{AM}{BM} \\ \Delta AMC : MP \text{ نیمساز} : \frac{AP}{CP} &= \frac{AM}{MC} \end{aligned} \quad , \quad BM = MC$$

$$\Rightarrow \frac{AQ}{BQ} = \frac{AP}{CP} \xrightarrow{\text{عکس تالس}} PQ \parallel BC$$

۲۲)

$$\Delta AMB : c^2 = AM^2 + BM^2 - 2AM \cdot BM \cdot \cos \alpha \quad , \quad BM = CM = \frac{a}{2}$$

$$\Rightarrow c^2 = m_a^2 + \frac{a^2}{4} - 2m_a \cdot \frac{a}{2} \cdot \cos \alpha$$

$$\Delta AMC : b^2 = AM^2 + CM^2 - 2AM \cdot CM \cdot \cos(180^\circ - \alpha), \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\Rightarrow b^2 = m_a^2 + \frac{a^2}{4} - 2m_a \cdot \frac{a}{2} \times (-\cos \alpha) = m_a^2 + \frac{a^2}{4} + 2m_a \cdot \frac{a}{2} \cdot \cos \alpha$$

$$\Rightarrow b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2}$$

$$a^2 + c^2 = 2m_b^2 + \frac{b^2}{2} \quad , \quad a^2 + b^2 = 2m_c^2 + \frac{c^2}{2}$$

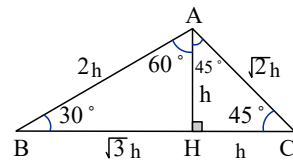
برای بقیه میانه‌ها هم به همین ترتیب، اثبات می‌شود:

$$\begin{cases} b^2 + c^2 = 2AM^2 + \frac{a^2}{2} \Rightarrow 6^2 + 4^2 = 2AM^2 + \frac{8^2}{2} \\ b = 6, c = 4, a = 8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 36 + 16 = 2AM^2 + 32 \Rightarrow 2AM^2 = 20 \Rightarrow AM = \sqrt{10}$$

۲۳ با فرض $AH = h$ داریم:

$$\triangle AHC : \hat{C} = \widehat{HAC} = 45^\circ \Rightarrow AC = \sqrt{2}h, CH = h$$

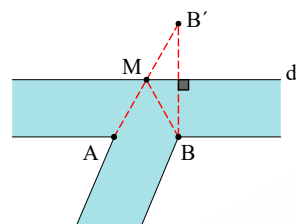


$$\triangle ABH : \hat{B} = 30^\circ, \sin 30^\circ = \frac{AH}{AB} = \frac{h}{AB} = \frac{1}{2} \Rightarrow AB = 2h$$

$$\triangle ABH : \hat{A} = 60^\circ, \sin 60^\circ = \frac{BH}{AB} \Rightarrow BH = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2h = \sqrt{3}h$$

$$BC = 20 = h + \sqrt{3}h = h(1 + \sqrt{3}) \Rightarrow h = \frac{20}{\sqrt{3} + 1} \times \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} - 1} = 10(\sqrt{3} - 1)$$

$$AB = 2h = 20(\sqrt{3} - 1), AC = 10\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)$$



۲۴ این مسأله به این معناست که روی خط d ، نقطه M را طوری بیابیم که مسیر AMB کوتاه‌ترین باشد. برای این کار، بازتاب B نسبت به d (B') را یافته و به A وصل می‌کنیم. طبق مسأله هرون مسیر AMB کوتاه‌ترین مسیر می‌باشد. پس اسکله سوم در M قرار می‌گیرد.

۲۵ الف) بنا بر مسائل هم‌محیطی، کافی است که در رأس‌هایی که زوایا بیشتر از 180° هستند، بازتاب محوری انجام شود:

$$\text{محور بازتاب } AE \Rightarrow F \text{ بازتاب } F' \\ \Rightarrow AF = AF', EF = EF'$$

$$\text{محور بازتاب } BD \Rightarrow C \text{ بازتاب } C' \\ \Rightarrow BC = BC', DC = DC'$$

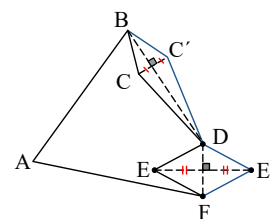
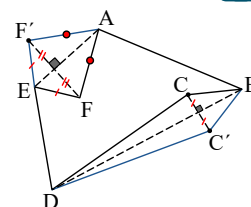
$$\Rightarrow \begin{cases} \text{محیط } ABCDEF = \text{محیط } ABC'DEF' \\ S_{ABC'DEF'} > S_{ABCDEF} \end{cases}$$

$$\text{محور بازتاب } BD \Rightarrow C \text{ بازتاب } C' \\ \Rightarrow BC = BC', DC = DC' \\ \text{محور بازتاب } DF \Rightarrow E \text{ بازتاب } E' \\ \Rightarrow DE = DE', FE = FE'$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{محیط } ABCDEF = \text{محیط } ABC'DE'F \\ S_{ABC'DE'F} > S_{ABCDEF} \end{cases}$$

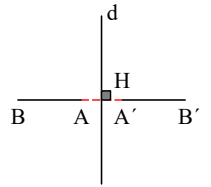
$$AB \perp d, \hat{H} = 90^\circ$$

$$AH = A'H, BH = B'H$$



۲۶

$$\begin{cases} AB = BH - AH \\ A'B' = B'H - A'H \end{cases} \Rightarrow AB = A'B'$$



قسمت‌های (الف) و (ب): زوایای داخلی شش‌ضلعی منتظم برابر با 120° می‌باشد. پس زوایای مثلث‌های ABM و PFE و CDN برابر با 60° می‌باشد. بنابراین: $\hat{M} = \hat{N} = \hat{P} = 60^\circ$

$$(a \text{ ضلع شش‌ضلعی}) \Rightarrow \Delta MNP \text{ ضلع} = 3a \Rightarrow S_{\Delta MNP} = \frac{\sqrt{3}}{4} (3a)^2 = \frac{9\sqrt{3}}{4} a^2$$

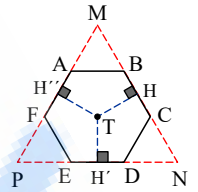
$$\text{مساحت شش‌ضلعی} = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2 \Rightarrow \text{مساحت شش‌ضلعی} = \frac{2}{3} \times S_{\Delta MNP}$$

قسمت‌های (پ) و (ت): مجموع طول‌های سه عمود TH و TH' و TH'' برابر است با ارتفاع مثلث MNP :

$$\Delta MNP \text{ ارتفاع} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times (3a) = \frac{3\sqrt{3}}{2} a$$

$$S_{\Delta TBC} + S_{\Delta TDE} + S_{\Delta TAF} = \frac{1}{2} (TH + TH' + TH'') \times a = \frac{3\sqrt{3}}{4} a^2$$

$$= \frac{1}{2} S_{\text{شش‌ضلعی}} \Rightarrow S_{\Delta TAB} + S_{\Delta TEF} + S_{\Delta TCD} = \frac{1}{2} \times S_{\text{شش‌ضلعی}}$$



$$DC = 9, CM = 2DM \Rightarrow DM = 3, CM = 6$$

$$\text{روابط طولی: } DM \times MC = AM \times MB \Rightarrow \begin{cases} AM \times MB = 3 \times 6 = 18 \\ AM + MB = 11 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} AM = 2 \\ BM = 9 \end{cases} \Rightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{2}{9}$$

$$\Delta APC \text{ قانون کسینوس‌ها در } (\sqrt{2})^2 = (5\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{2})^2 - 2 \times 5\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} \times \cos \hat{P}$$

$$2 \times 49 = 25 \times 2 + 9 \times 2 - 60 \cos \hat{P} \Rightarrow \cos \hat{P} = \frac{-1}{2} \Rightarrow \hat{P} = 120^\circ$$

$$\text{رابطه سینوسی مساحت: } S_{\Delta APB} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 3\sqrt{2} \times \underbrace{\sin 60^\circ}_{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{9\sqrt{2}}{2}$$

مساحت مستطیل برابر است با نصف حاصل ضرب قطر‌ها در سینوس زاویه بین قطر‌ها: 30

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \times 12 \times 12 \times \underbrace{\sin 60^\circ}_{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 36\sqrt{3}$$

$$\hat{BAC} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

$$\text{رابطه سینوسی مساحت: } S = \frac{1}{2} \times 3 \times 9 \times \underbrace{\sin 120^\circ}_{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{27\sqrt{3}}{4}$$

$$S = \frac{1}{2} a \cdot h_a = \frac{1}{2} b \cdot h_b = \frac{1}{2} c \cdot h_c$$

$$S = \frac{1}{2} a \times 3 = \frac{1}{2} b \times 4 = \frac{1}{2} c \times 6 \Rightarrow a = \frac{2S}{3}, b = \frac{S}{2}, c = \frac{S}{3}$$

$$p = \frac{a + b + c}{2} = \frac{\frac{2S}{3} + \frac{S}{2} + \frac{S}{3}}{2} = \frac{3S}{4}$$

مساحت مثلث را از دستور هرون به دست می‌آوریم:

$$p - a = \frac{3}{4}S - \frac{2S}{3} = \frac{S}{12}, \quad p - b = \frac{3S}{4} - \frac{S}{2} = \frac{S}{4}, \quad p - c = \frac{3}{4}S - \frac{S}{3} = \frac{5S}{12}$$

$$\Rightarrow S = \sqrt{\frac{3S}{4} \times \frac{S}{12} \times \frac{S}{4} \times \frac{5S}{12}} \Rightarrow S = \frac{\sqrt{15}}{48} S^2 \Rightarrow S = \frac{48}{\sqrt{15}}$$

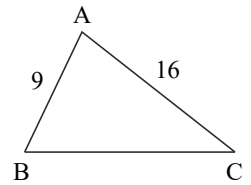
رابطه سینوسی مساحت : $S = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin \hat{A}$

$$S = \frac{1}{2} \times 9 \times 16 \times \sin \hat{A} = 24\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \sin \hat{A} = \frac{\sqrt{5}}{3} \Rightarrow \cos \hat{A} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2} = \pm \frac{2}{3}$$

قانون کسینوسها : $BC^2 = 9^2 + 16^2 - 2 \times 9 \times 16 \times \cos \hat{A}$ (مقدار بیشتر با $\frac{-2}{3}$)

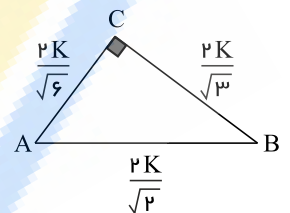
$$BC^2 = 529 \Rightarrow BC = 23$$



۳۳

$$\frac{1}{(\sqrt{3})^2} + \frac{1}{(\sqrt{6})^2} = \frac{1}{(\sqrt{2})^2}$$

داریم: ۳۴



بنابراین داریم که:

$$\frac{1}{h_a^2} + \frac{1}{h_b^2} = \frac{1}{h_c^2}, \quad \frac{1}{h_a} = \frac{a}{2S}, \quad \frac{1}{h_b} = \frac{b}{2S}, \quad \frac{1}{h_c} = \frac{c}{2S}$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{4S^2} + \frac{b^2}{4S^2} = \frac{c^2}{4S^2} \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2 \quad (c \text{ وتر است})$$

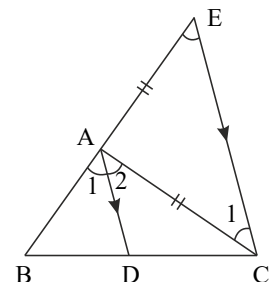
$$S = \frac{1}{2} a \cdot h_a = \frac{1}{2} b \cdot h_b = \frac{1}{2} c \cdot h_c \Rightarrow \frac{1}{2} \times a \cdot \sqrt{6} = \frac{1}{2} b \cdot \sqrt{3} = \frac{1}{2} c \cdot \sqrt{2} = k$$

$$\Rightarrow c = \frac{2k}{\sqrt{2}}, \quad b = \frac{2k}{\sqrt{3}}, \quad a = \frac{2k}{\sqrt{6}} \Rightarrow \sin \hat{A} = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{c} = \frac{\frac{2k}{\sqrt{6}}}{\frac{2k}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \hat{A} = 30^\circ \Rightarrow \hat{B} = 60^\circ$$

بنابراین، مثلث قائم‌الزاویه است.

۳۵ مطابق شکل، $CE \parallel AD$ است. داریم:

$$\begin{cases} AD \parallel CE \text{ و } BE \text{ مورب} \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{E} \\ AD \parallel CE \text{ و } AC \text{ مورب} \Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{C}_1 \end{cases}, \quad \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \Rightarrow \hat{C}_1 = \hat{E} \Rightarrow AE = AC$$

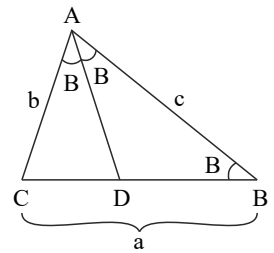


$$AD \parallel CE \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AE} = \frac{AB}{AC}$$

۳۶

$$\text{نیمساز } AD \Rightarrow \hat{CAD} = \hat{DAB} = \hat{B} \Rightarrow AD = BD$$

$$\text{مشتک } \hat{C}, \hat{CAD} = \hat{B} \Rightarrow \hat{ACD} \sim \hat{ABC}$$



$$\Rightarrow \frac{CD}{b} = \frac{b}{a} \Rightarrow CD = \frac{b^2}{a} \quad (1)$$

$$\text{نیمساز } AD: \frac{CD}{BD} = \frac{b}{c} \Rightarrow \frac{CD}{a} = \frac{b}{b+c} \Rightarrow CD = \frac{ab}{b+c} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \frac{ab}{b+c} = \frac{b^2}{a} \Rightarrow a^2 = b^2 + bc \Rightarrow a^2 - b^2 = bc$$

(37) مطابق شکل، AD نیمساز است. داریم:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{BD}{BC} = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{BD}{a} = \frac{1}{5} \Rightarrow BD = \frac{a}{5}$$

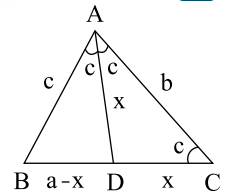
$$\hat{ABD}: \text{نیمساز } BI \Rightarrow \frac{AI}{DI} = \frac{AB}{BD} \Rightarrow \frac{AI}{DI} = \frac{2}{\frac{a}{5}} = \frac{10}{a} \Rightarrow \frac{AI}{AD} = \frac{10}{17}$$

$$MN \parallel BC \Rightarrow \hat{AMN} \sim \hat{ABC} \Rightarrow \frac{S_{\hat{AMN}}}{S_{\hat{ABC}}} = \left(\frac{10}{17}\right)^2 = \frac{100}{289}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{MNCB}}{S_{\hat{ABC}}} = 1 - \frac{100}{289} = \frac{189}{289}$$

(38) در شکل مقابل، AD نیمساز داخلی \hat{A} است. داریم:

$$\hat{BAD} = \hat{DAC} = \frac{\hat{A}}{2} = \frac{2\hat{C}}{2} = \hat{C} \Rightarrow AD = CD = x, BD = a - x$$



$$AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot CD \Rightarrow x^2 = bc - x(a-x) = bc - ax + x^2$$

$$\Rightarrow bc - ax = 0 \Rightarrow ax = bc \Rightarrow x = \frac{bc}{a} \Rightarrow x = \frac{6 \times 8}{a} = \frac{48}{a} \quad (1)$$

$$\text{نیمساز } AD: \frac{BD}{DC} = \frac{c}{b} \Rightarrow \frac{a-x}{x} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \Rightarrow 3x = 4a - 4x \Rightarrow 7x = 4a \Rightarrow x = \frac{4a}{7} \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1), (2)} \frac{4a}{7} = \frac{48}{a} \Rightarrow a^2 = 16 \times 7 \Rightarrow a = 4\sqrt{7}$$

(39)

$$AD = \frac{2AB \cdot AC \cdot \cos \frac{\hat{A}}{2}}{AB + AC} \Rightarrow AD = \frac{2 \times (x+2)(x+3) \times \overbrace{\cos 60^\circ}^{\frac{1}{2}}}{\underbrace{x+2+x+3}_{2x+5}}$$

$$\Rightarrow x(2x+5) = x^2 + 5x + 6 \Rightarrow 2x^2 + 5x = x^2 + 5x + 6 \Rightarrow x^2 = 6 \Rightarrow x = \sqrt{6}$$

(40)

$$AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot DC$$

$$\text{قضیه نیمسازها: } \frac{BD}{DC} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{BD}{\frac{BC}{2}} = \frac{3}{5} \Rightarrow BD = \frac{21}{8}, CD = \frac{35}{8}$$

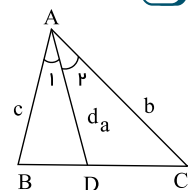
$$\Rightarrow AD^2 = 3 \times 5 - \frac{21}{8} \times \frac{35}{8} \Rightarrow AD = \frac{15}{8}$$

$$\hat{ABD}: \text{قضیه نیمسازها در } \hat{A}: \frac{x}{AE} = \frac{BD}{AD} \Rightarrow \frac{x}{AB} = \frac{BD}{AD + BD}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{\frac{r_1}{\lambda}}{\frac{15}{\lambda} + \frac{r_1}{\lambda}} = \frac{\frac{r_1}{\lambda}}{\frac{r_1}{\lambda} + \frac{r_1}{\lambda}} = \frac{r_1}{2r_1} = \frac{r_1}{2r_1} = \frac{r_1}{2r_1} = \frac{r_1}{2r_1} \Rightarrow x = \frac{r_1}{2} = \frac{r_1}{2}$$

$$\hat{A}_1 = \hat{A}_r = \hat{A}$$

$$S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ADC} = S_{\triangle ABC}$$



با نوشتن مساحت سینوسی برای مثلث ABC داریم:

$$\frac{1}{2} \times d_a \times c \times \sin \frac{\hat{A}}{2} + \frac{1}{2} \times d_a \times b \times \sin \frac{\hat{A}}{2} = \frac{1}{2} bc \cdot \sin \hat{A} = \frac{1}{2} bc \times 2 \sin \frac{\hat{A}}{2} \cdot \cos \frac{\hat{A}}{2}$$

$$\frac{1}{2} \sin \frac{\hat{A}}{2} \times d_a (b+c) = \frac{1}{2} bc \cdot 2 \sin \frac{\hat{A}}{2} \cdot \cos \frac{\hat{A}}{2}$$

$$\Rightarrow (b+c)d_a = 2bc \cdot \cos \frac{\hat{A}}{2} \Rightarrow d_a = \frac{2bc \cdot \cos \frac{\hat{A}}{2}}{b+c}$$

می‌دانیم در هر متوازی‌الاضلاع، مجموع مربعات قطرها برابر است با مجموع مربعات چهارضلعی، یعنی:

$$\text{مجموع مربعات قطرها} = 2(3^2 + 4^2) = 2 \times 25 = 50$$

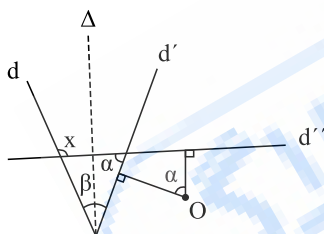
می‌دانیم که:

$$\hat{A} > 90^\circ \Leftrightarrow \sqrt{b^2 + c^2} < a < b + c$$

$$\Rightarrow \sqrt{3^2 + 4^2} < x - 1 < 3 + 4 \Rightarrow 5 < x - 1 < 7 \Rightarrow 6 < x < 8$$

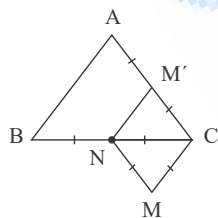
مطابق شکل، خط d به محوریت \triangle بازتاب می‌شود که d' می‌باشد.

به مرکز O و زاویه α خط d' را دوران می‌دهیم تا خط d'' حاصل شود. مطابق شکل داریم: $x = \alpha + \beta$



۴۴

مطابق شکل، $M'N'C$ بازتاب محوری MNC نسبت به محور BC است. از آنجا که:

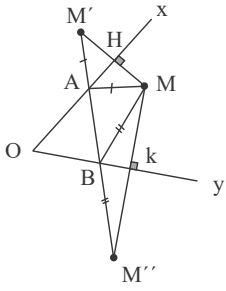


$$\begin{cases} CM' = CN = \frac{BC}{2} \Rightarrow CM' = \frac{AC}{2} \\ CN = \frac{BC}{2} \end{cases} \Rightarrow \text{عکس نالسی: } M'N' \parallel AB \Rightarrow \frac{CA}{CM'} = \frac{CB}{CN} = 2$$

پس $NM'C$ با ABC به مرکز C و نسبت $k=2$ به تصویر می‌شود.

۴۶

مطابق شکل، بازتاب M نسبت به Ox و Oy به ترتیب، M' و M'' می‌باشد.
 مطابق شکل، اضلاع زاویه را در A و B قطع می‌کند.

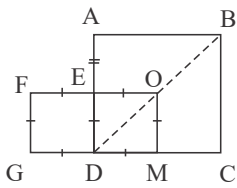


محیط MAB کمترین می‌باشد، زیرا:

$$\begin{cases} MA = AM' \\ MB = M''B \end{cases} \Rightarrow MA + MB + AB = M'A + M''B + AB = M'M''$$

(۴۷)

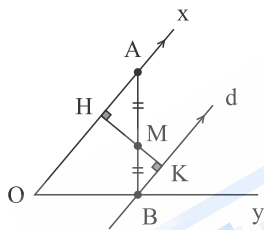
مطابق شکل، مربع $OEDM$ بازتاب محوری $EFGD$ نسبت به محور AD می‌باشد.



از آنجا که D هم‌سند و داریم: $\frac{CD}{DM} = \frac{DB}{OD} = \frac{AD}{DE} = 2$ ، پس $ABCD$ مجانس $OEDM$ به مرکز تجانس D و ضریب ۲ می‌باشد.
 همچنین می‌توان با دوران $EFGD$ به مرکز D و زاویه 90° ، $OEDM$ را به وجود آورد و سپس با تجانس به مرکز D و ضریب ۲، آن را بر $ABCD$ تصویر کرد.

(۴۸)

مطابق شکل، MH بر Ox عمود است. قرینه H نسبت به M ، نقطه K می‌باشد. از نقطه K خط d عمود بر HK می‌گذرانیم.
 $d \parallel Oy$ می‌باشد و B را در Oy قطع می‌کند.

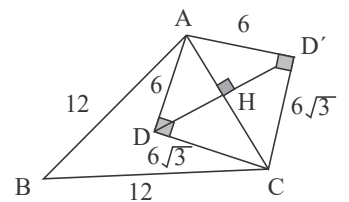


دو مثلث MAH و MBK هم‌نهشت هستند، پس داریم: $AM = MB$.
 در این روش از بازتاب مرکزی H نسبت به M استفاده کردیم.

(۴۹) اگر بخواهیم بدون تغییر محیط، مساحت چهارضلعی را افزایش دهیم باید بازتاب D را نسبت به محور AC بدست آوریم. بدین ترتیب چهارضلعی جدید محیطش با محیط $ABCD$ برابر است و مساحت آن از مساحت $ABCD$ بیشتر است. به این ترتیب داریم:

$$\triangle ADC : AC^2 = 6^2 + (6\sqrt{3})^2 \Rightarrow AC = 12$$

$$S_{\triangle AD'C} = \frac{6 \times 6\sqrt{3}}{2} = 18\sqrt{3}$$



افزایش مساحت برابر است با:

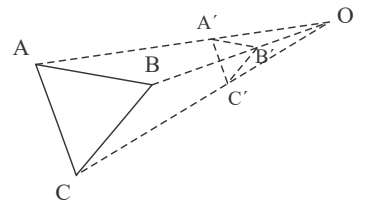
$$2S_{\triangle ADC} = 2 \times 18\sqrt{3} = 36\sqrt{3}$$

(۵۰) اگر مرکز تجانس روی خط قرار گیرد، مجانس خط بر آن منطبق می‌شود. اگر محور بازتاب، همان خط یا محور عمود بر خط باشد، بازتاب خط بر خود آن منطبق خواهد شد. با انتقال خط تحت برداری موازی با خط، تصویر انتقال بر خط منطبق خواهد شد.

(۵۱) مطابق شکل، مثلث $A'B'C'$ مجانس مستقیم انقباضی مثلث ABC به مرکز تجانس O و ضریب k است. داریم:

$$k = \frac{OA'}{AA'} = 3 \Rightarrow \frac{OA'}{OA' + AA'} = \frac{OA'}{OA} = \frac{3}{4}$$

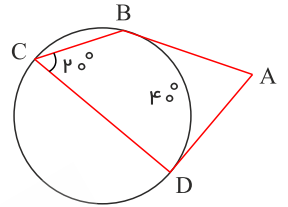
$$\frac{S(\triangle A'B'C')}{S(\triangle ABC)} = \left(\frac{OA'}{OA}\right)^2 = \frac{9}{16} \Rightarrow S(\triangle ABC) = \frac{16}{9} S(\triangle A'B'C')$$



۵۲

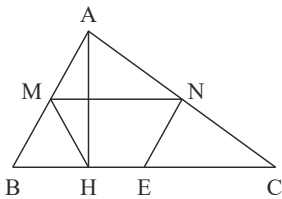
$$\left. \begin{aligned} \hat{C} &= 20^\circ \\ \hat{C} &= \frac{\widehat{BD}}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\widehat{BD}}{2} = 20^\circ \Rightarrow \widehat{BD} = 40^\circ \Rightarrow \widehat{BCD} = 360^\circ - 40^\circ = 320^\circ$$

$$\hat{A} = \frac{\widehat{BCD} - \widehat{BD}}{2} = \frac{320^\circ - 40^\circ}{2} = \frac{280^\circ}{2} = 140^\circ$$



۵۳

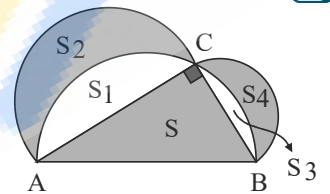
اگر M و N وسط اضلاع AB و E و H پای ارتفاع باشد آنگاه چون میانه وارد بر وتر نصف وتر است، $NE = MH = \frac{AB}{2}$ و $MN \parallel BC$ پس چهارضلعی $MNEH$ دوزنقه متساوی الساقین است. در دوزنقه متساوی الساقین زوایای مقابل مکمل اند پس نوع چهارضلعی، دوزنقه محاطی است.



۵۴ با توجه به شکل داریم:

$$\hat{C} = 90^\circ \Rightarrow AB^2 = AC^2 + BC^2$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{4} AB^2 = \frac{\pi}{4} AC^2 + \frac{\pi}{4} BC^2$$



۵۵

روابط طولی را در دو دایره می نویسیم:

$$\Rightarrow \text{مساحت نیم دایره به قطر } AB = \text{مساحت نیم دایره به قطر } AC + \text{مساحت نیم دایره به قطر } BC$$

$$\Rightarrow S + \cancel{S_1} + \cancel{S_2} = (\cancel{S_1} + S_3) + (\cancel{S_2} + S_4) \Rightarrow S = S_3 + S_4 \Rightarrow \frac{S_3 + S_4}{S} = 1$$

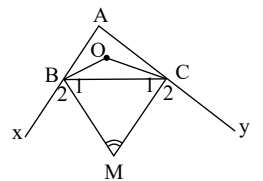
$$C_1 \text{ دایره: } MT^2 = MC \cdot MD \Rightarrow \frac{MA \cdot MB}{MC \cdot MD} = \frac{MT^2}{MT^2} = \left(\frac{MT^1}{MT}\right)^2 = 3^2 = 9$$

$$C_2 \text{ دایره: } MT'^2 = MA \cdot MB$$

۵۶

$$\hat{M} = 180^\circ - (\hat{B}_1 + \hat{C}_1) = 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \hat{B} + 180^\circ - \hat{C})$$

$$\Rightarrow \hat{M} = 180^\circ - \frac{1}{2}(360^\circ - (180^\circ - \hat{A}))$$



$$\Rightarrow \hat{M} = 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ + \hat{A}) \Rightarrow \hat{M} = 90^\circ - \frac{1}{2}\hat{A}$$

$$\hat{M} + \hat{O} = 90^\circ - \frac{\hat{A}}{2} + 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2} = 180^\circ$$

از طرفی می دانیم که $\hat{BOC} = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}$ پس:

پس $BOCM$ محاطی است.

راه دوم:

$$\left\{ \begin{aligned} \hat{OBM} = \hat{OBC} + \hat{CBM} = \frac{\hat{AB}x}{2} = 90^\circ \\ \hat{OCM} = \hat{OCB} + \hat{BCM} = \frac{\hat{AC}y}{2} = 90^\circ \end{aligned} \right. \Rightarrow \hat{OCM} + \hat{OBM} = 180^\circ$$

پس $BOCM$ محاطی است.

۵۷) با توجه به شکل داریم:

$$5y + 3x + 3y + 5x = 360^\circ \Rightarrow 8(x + y) = 360^\circ \Rightarrow x + y = 45^\circ$$

$$(\text{محاطی}) \widehat{MAN} = \frac{3x + 3y}{2} = \frac{3}{2}(x + y) = 67,5^\circ$$

۵۸) فاصله مرکز دایره محیطی شش ضلعی منتظم تا یک ضلع برابر ارتفاع مثلث متساوی الاضلاع است. زیرا شش ضلعی منتظم از ۶ مثلث متساوی الاضلاع تشکیل می شود.

$$\text{محیط} = 12\sqrt{3} \Rightarrow 6a = 12\sqrt{3} \Rightarrow a = 2\sqrt{3}$$

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{2}(2\sqrt{3}) = 3$$

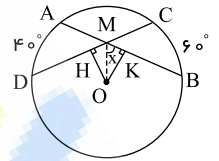
۵۹)

$$AB = AC \Rightarrow \widehat{C} = \widehat{B}, \quad (\text{ظلی}) \quad \widehat{DAC} = \frac{\widehat{AD}}{2}, \quad (\text{محاطی}) \quad \widehat{B} = \frac{\widehat{AD}}{2} \Rightarrow \widehat{DAC} = \widehat{B}, \widehat{B} = \widehat{C} \Rightarrow \widehat{C} = \widehat{DAC} \Rightarrow AD = DC$$

۶۰) دو وتر AB و CD مساوی اند. پس فاصله مرکز دایره O از AB و CD برابر است. پس OM نیمساز زاویه \widehat{DMB} می باشد:

$$OH = OK, \widehat{H} = \widehat{K} = 90^\circ \Rightarrow \triangle OMH \cong \triangle OKK$$

$$\Rightarrow \widehat{OMK} = \frac{\widehat{DMB}}{2}$$



$$\widehat{AD} + \widehat{BC} = 40^\circ + 60^\circ = 100^\circ \Rightarrow \widehat{AC} + \widehat{BD} = 360^\circ - 100^\circ = 260^\circ$$

$$\widehat{DMB} = \frac{\widehat{AC} + \widehat{BD}}{2} = \frac{260^\circ}{2} = 130^\circ \Rightarrow x = \frac{\widehat{DMB}}{2} = \frac{130^\circ}{2} = 65^\circ$$

۶۱)

$$\text{طبق روابط طولی} : \begin{cases} MA \times MB = ME \times MH \\ MA \times MB = MF \times MG \end{cases} \Rightarrow ME \times MH = MF \times MG$$

طبق قضیه عکس روابط طولی، از چهار نقطه E, F, G, H یک دایره می گذرد، پس $EFGH$ محاطی است.

۶۲)

$$(\text{ظلی}) \quad \widehat{M} = \frac{\widehat{BM}}{2} \Rightarrow 80^\circ = \frac{\widehat{BM}}{2} \Rightarrow \widehat{BM} = 160^\circ$$

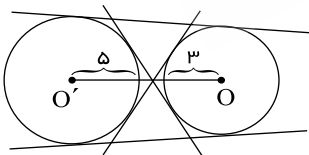
$$AB \parallel EF \Rightarrow \widehat{MA} = \widehat{MB} = 160^\circ \Rightarrow y = 360^\circ - (160^\circ + 160^\circ) = 40^\circ$$

$$\triangle OAB : OA = OB, \quad (\text{مرکزی}) \quad \widehat{AOB} = y = 40^\circ, \quad \widehat{OAB} = \widehat{OBA} = x$$

$$\Rightarrow 2x + 40^\circ = 180^\circ \Rightarrow x = 70^\circ$$

۶۳) تمام خطوطی که از O به فاصله ۳ هستند، خطوط مماس بر دایره C هستند و همچنین خطوطی که به فاصله ۵ از O' قرار دارند، خطوط مماس بر دایره C' هستند. بنابراین خطهایی این

دو ویژگی را با هم دارند که بر هر دو دایره مماس باشند، یا به عبارت دیگر مماس مشترک دو دایره باشند. حال چون $OO' > R + R'$ است، دو دایره متخارج هستند و ۴ مماس مشترک دارند و ۴ خط راست با این ویژگیها وجود دارد.

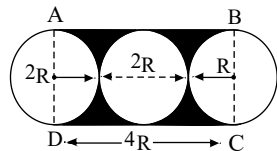


۶۴)

$$MA \cdot MB = MC \cdot MD \Rightarrow 3 \times 6 = 2,5 \times MD \Rightarrow MD = 7,2$$

۶۵) سطح رنگی برابر است با مساحت مستطیل $ABCD$ منهای مساحت دو دایره کامل به شعاع R یعنی:

$$S_{\text{رنگی}} = (2R)(4R) - 2(\pi R^2) = 8R^2 - 2\pi R^2 = 2R^2(4 - \pi)$$



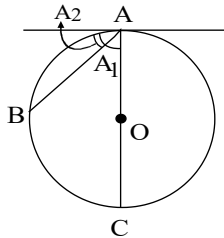
۶۶) چون M وسط کمان \widehat{EF} است پس $\widehat{ME} = \widehat{FM}$ و در ضمن داریم:

$$\begin{cases} \widehat{B} \text{ محاطی} = \frac{\widehat{CF} + \widehat{FM}}{2} \\ \widehat{D} \text{ زاویه بین دو وتر} = \frac{(\widehat{BC} + \widehat{BE}) + \widehat{FM}}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \widehat{B} + \widehat{D} = \frac{\widehat{CF} + \widehat{FM} + \widehat{BC} + \widehat{BE} + \widehat{FM}}{2} \xrightarrow{\widehat{FM} = \widehat{ME}} \frac{36^\circ}{2} = 18^\circ$$

۶۷ در شکل، AC قطر دایره است. قطر، محیط دایره را به دو قسمت برابر تقسیم می‌کند.

یعنی هر کدام از این کمان‌ها برابر با 18° است، داریم:



$$(\text{ظلی}) \widehat{A}_1 = 5^\circ \Rightarrow \widehat{AB} = 10^\circ \Rightarrow \widehat{BC} = 18^\circ - 10^\circ = 8^\circ$$

۶۸ از موازی بودن وترها نتیجه می‌شود که:

$$\begin{cases} AB \parallel FC \Rightarrow \widehat{AF} = \widehat{BC} = x \Rightarrow \widehat{AF} = \widehat{BC} = \widehat{ED} = x \\ BE \parallel DC \Rightarrow \widehat{ED} = \widehat{BC} = x \end{cases}$$

از طرفی داریم:

$$6^\circ + x + 4^\circ + x + 11^\circ + x = 36^\circ \Rightarrow 3x = 15^\circ \Rightarrow x = 5^\circ$$

چون زاویه‌ی محاطی \widehat{FCD} روبرو به کمان \widehat{FED} است، پس با نصف کمان مقابل خودش برابر است:

$$\widehat{C} = \frac{1}{2}(11^\circ + x) = \frac{1}{2}(11^\circ + 5^\circ) = 8^\circ$$

۶۹

طبق شکل داریم:

$$\text{محیط دایره} = \widehat{AMB} + \widehat{ANB} \Rightarrow \text{محیط دایره} = 4\widehat{ANB} + \widehat{ANB} \Rightarrow \widehat{ANB} = \frac{1}{5}(\text{محیط دایره})$$

۷۰ الف) یک مماس مشترک داخلی و دو مماس مشترک خارجی دارد.

$$\text{ب) } R = 4 \quad \text{و} \quad R' = 9 \xrightarrow{\text{مماس بیرون}} d = d = 13$$

$$TT' = \sqrt{d^2 - (R - R')^2} = \sqrt{(R + R')^2 - (R - R')^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12$$

۷۱

$$R = 3 \quad \text{و} \quad R' = 8 \quad \text{و} \quad d = 13$$

$$TT' = \sqrt{d^2 - (R - R')^2} \Rightarrow 5a - 3 = \sqrt{13^2 - (8 - 3)^2}$$

$$\Rightarrow 5a - 3 = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12 \Rightarrow a = 3$$

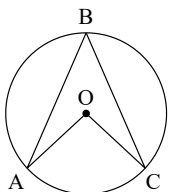
۷۲

طبق فرض داریم:

$$\begin{cases} R = 2 \\ R' = 3 \\ d = 13 \end{cases}, \quad TT' = \sqrt{d^2 - (R + R')^2}$$

$$\Rightarrow 5x - 8 = \sqrt{13^2 - (2 + 3)^2} \Rightarrow 5x - 8 = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12 \Rightarrow x = 4$$

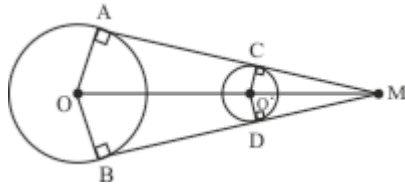
۷۳



$$\begin{cases} \widehat{ABC} = \frac{\widehat{AC}}{2} \\ \widehat{AOC} = \widehat{AC} \end{cases} \Rightarrow \alpha + 16^\circ = \frac{3\alpha + 12^\circ}{2} \Rightarrow \alpha = 2^\circ \Rightarrow \begin{cases} \widehat{ABC} = 36^\circ \\ \widehat{AOC} = 72^\circ \end{cases}$$

۷۴

پاره خط OO' را به M وصل می‌کنیم.



$$\begin{cases} OA = OB \\ OM = OM \Rightarrow \triangle OAM \cong \triangle OBM \Rightarrow \text{نیمساز زاویه } \widehat{AMB} \text{ است} \\ MA = MB \\ O'C = O'D \\ O'M = O'M \Rightarrow \triangle O'DM \cong \triangle O'CM \Rightarrow \text{نیمساز زاویه } \widehat{AMB} \text{ است} \\ MC = MD \end{cases}$$

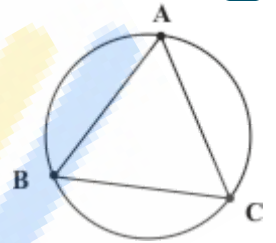
چون هر زاویه یک نیمساز منحصر به فرد دارد پس OM ، $O'M$ بر یکدیگر منطبقند و این بدان معناست که نقاط O ، M ، O' بر یک استقامت قرار دارند. پس خط‌المركزین و مماس‌های مشترک خارجی هم‌رسند.

۷۵

$$\begin{cases} ID \times IE = IS \times IN \\ IE = IN \end{cases} \Rightarrow ID = IS$$

۷۶ می‌دانیم که همه مثلث‌ها محاطی هستند پس دایره محیطی مثلث ABC را رسم می‌کنیم. داریم:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \frac{\widehat{BC}}{2} + \frac{\widehat{AC}}{2} + \frac{\widehat{AB}}{2} = \frac{\widehat{BC} + \widehat{AC} + \widehat{AB}}{2} = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$$



۷۷

$$RS \parallel VT \Rightarrow \widehat{TS} = \widehat{RV} = 7^\circ$$

$$\widehat{TS} + \widehat{SR} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{SR} = 110^\circ \Rightarrow \widehat{TV} = 110^\circ$$

$$\hat{1} = \widehat{TS} = 7^\circ, \hat{2} = \frac{\widehat{TS}}{2} = 3.5^\circ, \hat{3} = \widehat{RS} = 110^\circ$$

$$\hat{4} = \frac{\widehat{RV}}{2} = 3.5^\circ, \hat{5} = \frac{\widehat{SR}}{2} = 55^\circ, \hat{6} = \hat{5} = 55^\circ$$

$$\hat{7} = \frac{\widehat{RVT}}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ, \hat{8} = \hat{2} = 3.5^\circ$$

۷۸ از نقطه B دو مماس BD ، BE بر دایره رسم شده است پس $BD = BE$.

از نقطه C دو مماس CD ، CF بر دایره رسم شده است پس $CD = CF$.

$$\begin{aligned} \triangle ABC \text{ محیط } P_{ABC} &= AB + BC + AC = AB + BD + DC + AC \\ &= AB + BE + CF + AC = AE + AF \end{aligned}$$

بنابراین محیط مثلث ABC هیچ ارتباطی به محل نقطه D ندارد و همواره برابر مقدار ثابت $AE + AF$ می‌باشد.

۷۹

الف

$$\begin{cases} 80^\circ = \frac{x+y}{2} \rightarrow \begin{cases} x+y = 160^\circ \\ x-y = 40^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 100^\circ \\ y = 60^\circ \end{cases} \\ 20^\circ = \frac{x-y}{2} \end{cases}$$

ب

$$\begin{cases} x+y = 360^\circ \\ \frac{x-y}{2} = 62^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y = 360^\circ \\ x-y = 124^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 242^\circ \\ y = 118^\circ \end{cases}$$

الف

$$x(x+32) = 10 \times 32 \rightarrow x^2 + 32x - 320 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 8 \text{ (ق ق)} \\ x = -40 \text{ (غ ق)} \end{cases}$$

۸۰

طبق روابط طولی در دایره داریم:

۸۱

با نوشتن قضیه نیمسازها داریم:

$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \Rightarrow BD = \frac{3}{4}CD \quad (1)$$

$$BC = v = BD + CD \quad (2)$$

از روابط (1) و (2) داریم:

$$v = \frac{3}{4}CD + CD \Rightarrow \frac{v}{4}CD = v \Rightarrow CD = 4 \Rightarrow BD = 3$$

$$AD^2 = AB \times AC - BD \times CD \Rightarrow AD^2 = 6 \times 8 - 3 \times 4 \Rightarrow AD = 6$$

برای محاسبه طول نیمساز AD داریم:

$$\begin{cases} \frac{DE}{CE} = \frac{AD}{AC} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \Rightarrow DE = \frac{3}{4}CE \\ CD = 4 = DE + CE \end{cases}$$

با نوشتن قضیه نیمسازها در مثلث ADC داریم:

$$4 = \frac{3}{4}CE + CE = \frac{7}{4}CE \Rightarrow CE = \frac{16}{7}$$

$$DE = \frac{3}{4} \times \frac{16}{7} = \frac{12}{7}$$

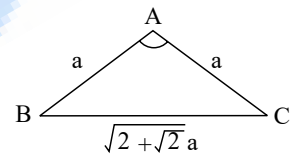
$$AE^2 = AD \times AC - DE \times CE = 6 \times 8 - \frac{12}{7} \times \frac{16}{7} = 48 - \frac{192}{49} = \frac{2160}{49}$$

$$\Rightarrow AE = \frac{\sqrt{2160}}{7}$$

(۸۲) در n ضلعی منتظم، کوچک‌ترین قطر، قطری است که نزدیک‌ترین رأس‌ها را به هم وصل می‌کند، بنابراین داریم:

$$\triangle ABC \text{ قضیه کسینوس‌ها در } (\sqrt{2} + \sqrt{2}a)^2 = a^2 + a^2 - 2a^2 \cos \hat{A} \Rightarrow (2 + \sqrt{2})a^2 = 2a^2(1 - \cos \hat{A})$$

$$\Rightarrow \cos \hat{A} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \hat{A} = 135^\circ, \hat{A} = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n} \Rightarrow 180^\circ - \frac{360^\circ}{n} = 135^\circ \Rightarrow \frac{360^\circ}{n} = 45^\circ \Rightarrow n = 8$$



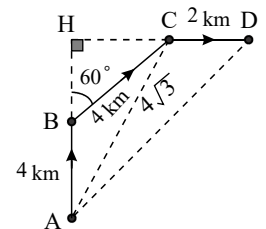
(۸۳)

$$S = \frac{1}{2}AB \times AC \times \sin \hat{A}$$

$$\hat{ABC} = 120^\circ$$

$$AB = BC = 4 \text{ km} \Rightarrow \hat{BAC} = \hat{BCA} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$$

(۸۴) در مثلث ABC داریم:



در این مثلث با نوشتن قضیه کسینوس‌ها، طول AC را حساب می‌کنیم:

$$AC^2 = 4^2 + 4^2 - 2 \times 4 \times 4 \times \underbrace{\cos 120^\circ}_{-\frac{1}{2}} \Rightarrow AC = 4\sqrt{3}$$

زاویه \hat{ACD} زاویه خارجی برای مثلث قائم‌الزاویه AHC است، پس:

$$\hat{ACD} = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ$$

با نوشتن قضیه کسینوس‌ها در مثلث ACD داریم:

$$AD^2 = AC^2 + CD^2 - 2AC \times CD \times \cos 120^\circ$$

$$AD^2 = (4\sqrt{3})^2 + 2^2 - 2 \times 4\sqrt{3} \times 2 \times (-\frac{1}{2}) \Rightarrow AD^2 = 52 + 8\sqrt{3} \Rightarrow AD = \sqrt{52 + 8\sqrt{3}} \sim 8,1 \text{ km}$$

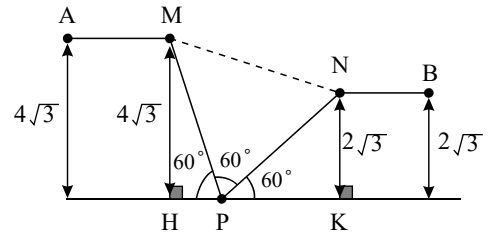
(۸۵) مطابق شکل در مثلث‌های PMH و PNK داریم:

$$\begin{cases} \triangle PKN : \hat{P} = 60^\circ \\ \triangle PMH : \hat{P} = 60^\circ \end{cases}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{KN}{PN} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{PN} \Rightarrow PN = 4$$

$$\sin 60^\circ = \frac{MH}{PM} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{PM} \Rightarrow PM = 8$$

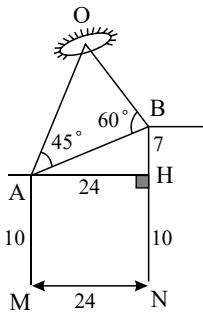
$$MN^2 = PM^2 + PN^2 - 2PM \times PN \times \cos 60^\circ \Rightarrow MN^2 = 8^2 + 4^2 - 2 \times 8 \times 4 \times \frac{1}{2} = 48 \Rightarrow MN = 4\sqrt{3}$$



با نوشتن قضیه سینوس‌ها در مثلث PMN داریم:

۸۶

از رأس A ، عمود AH بر ضلع BN وارد می‌کنیم.



در مثلث ABH داریم:

$$\hat{H} = 90^\circ \Rightarrow AB^2 = AH^2 + BH^2 \Rightarrow AB^2 = 24^2 + 7^2 = 625 \Rightarrow AB = 25$$

$$\hat{AOB} = 180^\circ - (45^\circ + 60^\circ) = 75^\circ$$



با نوشتن قضیه سینوس‌ها در مثلث AOB داریم:

$$\frac{OA}{\sin 60^\circ} = \frac{OB}{\sin 45^\circ} = \frac{AB}{\sin 75^\circ} \Rightarrow \frac{OA}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{OB}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{25}{\frac{5\sqrt{6}}{8}} \Rightarrow OA = \frac{125\sqrt{3}}{9}, OB = \frac{125\sqrt{2}}{9}$$

خارج از ۸۷

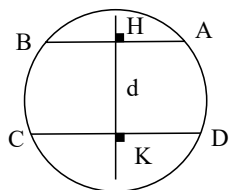
۸۸

(ارتفاع وارد بر وتر) $\frac{1}{h_a^2}$

$$\begin{cases} \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{b^2 + c^2}{b^2 c^2} \\ S_{\triangle ABC} = \frac{a \times h_a}{2} = \frac{b \times c}{2} \Rightarrow bc = a \times h_a \Rightarrow b^2 c^2 = a^2 \times h_a^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{a^2}{a^2 \times h_a^2} = \frac{1}{h_a^2}$$

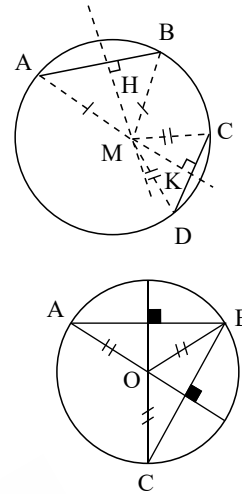
۸۹ الف. می‌دانیم که عمودمنصف هر وتر یک دایره از مرکز آن دایره می‌گذرد. از آنجا که دو وتر AB و CD موازی‌اند، مطابق شکل خط d که عمودمنصف مشترک هر دو می‌باشد، از مرکز دایره می‌گذرد. به عبارت دیگر مرکز دایره روی خط d قرار می‌گیرد و نمی‌توان دقیقاً آن را به‌عنوان یک نقطه مشخص کرد.



هفتمه باز هم ب.

مطابق شکل، دو وتر AB و CD ناهم‌وازی هستند. می‌دانیم مرکز دایره از A و B به یک فاصله است، پس روی عمودمنصف AB قرار دارد. از طرفی مرکز دایره نیز روی عمودمنصف CD نیز قرار دارد، پس تلاقی این دو عمودمنصف همان مرکز دایره است. مطابق شکل عمودمنصف‌های AB و CD در نقطه M (مرکز دایره) متقاطع‌اند و داریم:

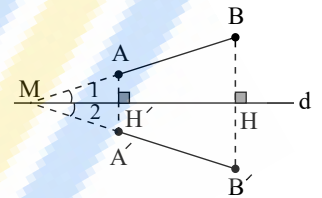
$$\begin{cases} AB \text{ روی عمودمنصف } M \Rightarrow MA = MB \\ CD \text{ روی عمودمنصف } M \Rightarrow MC = MD \end{cases}$$



۹۰

الف امتداد AB ، خط d را در نقطه M قطع می‌کند. نقطه B را نسبت به محور d بازتاب می‌کنیم تا B' به دست آید. MB' را رسم می‌کنیم. بازتاب نقطه A نسبت به خط d را پیدا می‌کنیم و ثابت می‌کنیم نقطه A' می‌باشد، به طوری که A' روی MB' قرار می‌گیرد. مثلث‌های MAA' و MBB' متساوی‌الساقین هستند، زیرا:

$$\begin{cases} \hat{H} = 90^\circ, BH = B'H \Rightarrow BB' \text{ عمودمنصف } d \Rightarrow MB = MB' \quad (1) \\ \hat{H}' = 90^\circ, AH' = A'H' \Rightarrow AA' \text{ عمودمنصف } d \Rightarrow MA = MA' \quad (2) \end{cases}$$



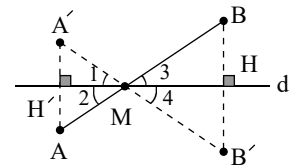
از طرفی می‌دانیم که در مثلث متساوی‌الساقین، عمودمنصف d ، نیمساز زاویه M می‌باشد، پس $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$ و در نتیجه، A' روی MB' قرار دارد. از طرفی از موارد (۱) و (۲) داریم:

$$MB = MB', MA = MA' \Rightarrow MB - MA = MB' - MA' \Rightarrow AB = A'B'$$

بنابراین در این حالت، بازتاب طولی می‌باشد.

ب پاره‌خط AB محور بازتاب d را در نقطه M قطع می‌کند. بازتاب A نسبت به خط d ، نقطه A' می‌باشد. MA' را رسم کرده و امتداد می‌دهیم و ادعا می‌کنیم بازتاب نقطه B نسبت به خط d ، یعنی نقطه B' بر امتداد MA' واقع است. چون نقطه A' بازتاب A نسبت به خط d می‌باشد، داریم:

$$\hat{H}' = 90^\circ, AH' = A'H' \Rightarrow AA' \text{ عمودمنصف } d \Rightarrow MA = MA', \hat{M}_1 = \hat{M}_2$$



از طرفی داریم:

$$\begin{cases} \hat{M}_1 = \hat{M}_2 = \hat{M}_3 = \hat{M}_4 \\ BH = B'H, \hat{H} = 90^\circ \end{cases}$$

پس B' در امتداد MA' قرار دارد و همچنین مثلث MBB' متساوی‌الساقین خواهد بود. بنابراین:

$$\begin{cases} AB = AM + MB \\ A'B' = A'M + MB' \\ AM = A'M, BM = B'M \end{cases} \Rightarrow AB = A'B'$$

بنابراین، بازتاب پاره‌خط AB نسبت به خط d ، پاره‌خط $A'B'$ است و بازتاب طولی می‌باشد.