نام و نام خانوادگی:

زمان برگزاری: ۱۵۴۸۰ دقیقه

نام آزمون: حسابان دوازدهم

تاریخ آزمون: ۱۴۰۱/۱۱/۱۰

۱) ورق فلزی مربع شکل به‌طول ضلع یک متر را در نظر بگیرید. می‌خواهیم از چهار گوشهٔ آن مربع‌های کوچکی به ضلع x برش بزنیم و آنها را کنار بگذاریم. سپس لبهٔ جعبه را به اندازهٔ x برمی‌گردانیم تا یک جعبهٔ در باز ساخته شود. مقدار x چقدر باشد تا حجم جعبه حداکثر مقدار ممکن گردد؟

۲) در تابع $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2+mx+6}$، m را چنان بیابید که تابع فقط یک مجانب قائم داشته باشد.

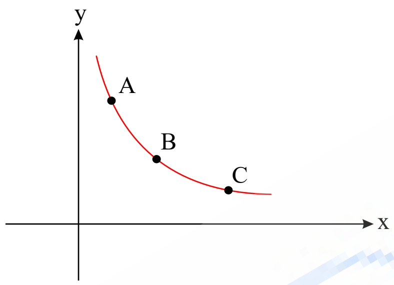
۳) اگر $f(x)=x^2-mx+2$ بر $2x-4$ بخش‌پذیر باشد، m را بیابید.

۴) اگر f روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی باشد، دامنهٔ تابع g را بیابید.

$$g(x)=\sqrt{f(|2x-1|)-f(|x+1|)}$$

۵) آهنگ لحظه‌ای تغییر حجم یک کره به‌شعاع R نسبت به تغییر مساحت سطح همان کره را برحسب R بیابید.

۶) نمودار تابع f به‌صورت مقابل است. مقادیر مشتق تابع f در نقاط C, B, A را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.



۷) اگر دورهٔ تناوب تابع $f(x)=m\cos(mx)+3$ برابر با $\dfrac{\pi}{4}$ باشد، مینیمم و ماکزیمم تابع را بیابید. $(m>0)$

۸) اگر تابع f روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی و $f(-2)=0$ باشد، دامنهٔ تابع زیر را بیابید.

$$g(x)=\sqrt{(x^2-81)f(x)}$$

۹) اگر f و g روی $\mathbb{R}$ توابعی اکیداً صعودی باشند، ثابت کنید تابع $f+g$ نیز روی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی است.

۱۰) نمودار $y=|x|$ را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم، سپس در راستای افقی با ضریب ۳ منقبض و در نهایت آن را ۲ واحد به چپ منتقل می‌کنیم. ضابطه تابع حاصل را بنویسید.

۱۱) تابع $y=x^3$ را ابتدا نسبت به محور yها قرینه کرده، سپس نمودار حاصل را دو واحد به چپ منتقل کرده و در نهایت آن را ۵ واحد به بالا منتقل می‌کنیم تا تابع f حاصل شود. ضابطهٔ تابع وارون تابع f را بیابید.

۱۲) معادلات زیر را حل کنید.

الف

$\sin x+\cos x=1 \quad [0, 2\pi]$

ب

$\sin 2x+\cos x=0$

پ

$\cos^4(x+\dfrac{\pi}{2})=\dfrac{1}{4}$

ت

$۲\sin(۳\pi x) = \sqrt{۳}$

ث

$۴\cos ۲x - ۸\cos x + ۴ = ۰$

۱۳ معادلات زیر را حل کنید.

الف

$\tan ۲x = ۳\tan x$

ب

$\tan^{۳} x - \tan^{۲} x + ۱ = \tan x$

پ

$\tan^{۴} x - ۲\tan^{۲} x - ۳ = ۰$

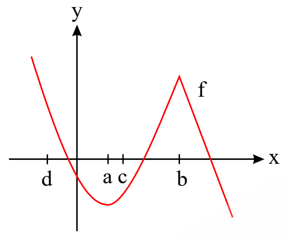
ت

$\cos ۳x = ۴\cos^{۲} x$

ث

$\sin ۳x + ۲\cos ۲x = ۲$

۱۴ با در نظر گرفتن نمودار f در شکل، به سؤالات زیر پاسخ دهید.



الف طول نقطه‌ای که مماس در آن افقی است.

ب طول نقطه‌ای که مشتق در آن مقداری منفی است.

پ طول نقطه‌ای که تابع در آن مشتق‌پذیر نیست.

۱۵ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

الف نمودار تابع $y = (x + ۲)^{۲}$ را می‌توان با ۲ واحد انتقال نمودار $y = x^{۲}$ به‌سمت چپ رسم کرد.

ب تابع $f(x) = -x^{۲} + ۲x$ روی بازهٔ $(-\infty, ۳]$ اکیداً صعودی است.

پ اگر تابع f در $x = a$ پیوسته باشد آنگاه در این نقطه مشتق‌پذیر است.

ت آهنگ متوسط تغییر با شیب خط قاطع و آهنگ لحظه‌ای تغییر با شیب خط مماس در آن نقطه برابرهستند.

۱۶ آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع $f(x) = ۲x^{۲} + ۵x + ۱$ در نقطهٔ $x = ۲$ چند برابر آهنگ تغییر لحظه‌ای آن در $x = -۱$ است؟

۱۷ ضرایب a و b را در تابع $f(x) = -x^{۴} + ax + b$ طوری تعیین کنید که در نقطهٔ $(۱, ۲)$ ماکزیمم نسبی داشته باشد.

۱۸ نمودار تابع $f(x) = (x + ۱)^{۳}$ را رسم کنید. این تابع در دامنهٔ خود اکیداً صعودی است یا اکیداً نزولی؟

۱۹ یک مستطیل در یک نیم‌دایره محاط شده است. اگر شعاع دایره، ۴ سانتی‌متر باشد، طول و عرض مستطیل را طوری به‌دست آورید که مساحت آن بیشترین مقدار ممکن باشد.

۲۰ معادلهٔ حرکت متحرکی به‌صورت $f(t) = t^{۲} - t + ۱۰$ برحسب متر در بازهٔ زمانی $[۰, ۵]$ (t برحسب ثانیه) داده شده است. در کدام لحظه سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازهٔ زمانی $[۰, ۵]$ با هم برابرهستند؟

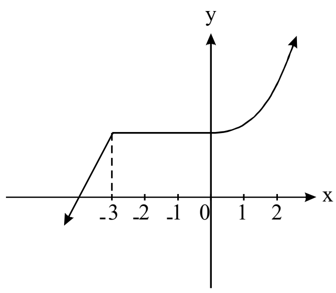
۲۱ اگر $f'(۱) = ۳$ و $g'(۱) = ۵$ مطلوب است، $(f + g)'(۱)$ و $(۳f + ۲g)'(۱)$

۲۲) با توجه به محورهای سینوس و تانژانت، در موارد زیر مقادیر $\sin\alpha$ و $\tan\alpha$ را با هم مقایسه کنید:

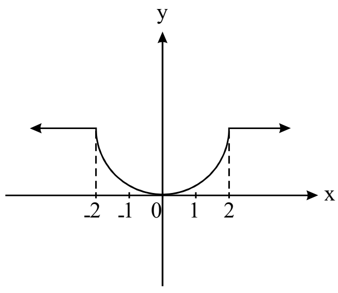
الف) $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ‏ ‏ ‏ ‏ ب) $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

۲۳) اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $x^3 + kx^2 + 2$ بر $x - 2$ برابر با ۶ باشد، k را تعیین کنید.

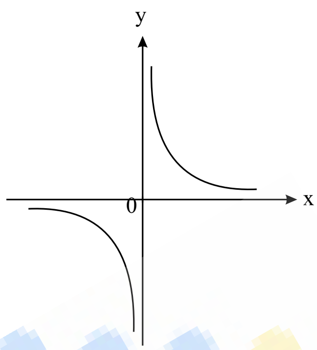
۲۴) نمودار توابع f، g و h در زیر رسم شده‌اند.



$y = f(x)$



$y = g(x)$



$y = h(x)$

الف) تابع f در چه فاصله‌هایی اکیداً صعودی و در چه فاصله‌هایی صعودی است؟

ب) تابع g در چه فاصله‌هایی اکیداً نزولی و در چه فاصله‌هایی نزولی است؟

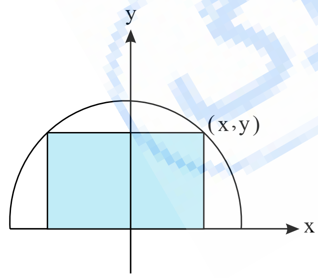
پ) تابع h در چه فاصله‌هایی اکیداً نزولی است؟

۲۵) اگر $\cos(\alpha+\beta) = \frac{3}{5}$ و $\tan(\alpha-\beta) = \frac{5}{12}$ باشد حاصل $\tan 2\alpha$ و $\tan 2\beta$ را بیابید. $(0 < \alpha+\beta < \frac{\pi}{2})$

۲۶) اگر $\tan(\alpha+\beta) = 3$ و $\tan(\alpha-\beta) = 2$ باشد حاصل $\tan 2\alpha$ را بیابید.

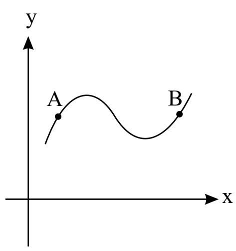
۲۷) نقاط بحرانی تابع $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 2x}$ را بیابید.

۲۸) نیم‌دایره‌ای به شعاع $\sqrt{5}$ مفروض است. مطابق شکل زیر، مستطیلی در آن محاط شده است. ابعاد مستطیل را چنان بیابید که محیط آن ماکزیمم باشد.



۲۹) اگر مرکز تقارن توابع $y = x^3 + 6x^2 + a$ و $y = \frac{2x+1}{x+b}$ بر هم منطبق باشند، a و b را بیابید.

۳۰) نمودار تابع f به‌صورت مقابل است، علامت مشتق اول و دوم را در نقاط A و B تعیین کنید.



۳۱) تابع $y = mx + n + \frac{x^2 - 1}{x+2}$ مفروض است. m و n را چنان بیابید که این تابع هموگرافیک شود و مرکز تقارنش روی نیمساز ربع اول باشد.

(۳۲) جدول تغییرات و نمودار تابع $f(x)=\dfrac{x-۲}{x}$ را رسم کنید.

(۳۳) تابع $f(x)=\dfrac{۲x+b}{ax-b}$ مفروض است. مقادیر a و b را چنان بیابید که نقطهٔ $(-۲,-\dfrac{۱}{۲})$ مرکز تقارن آن باشد.

(۳۴) نمودار هریک از توابع داده‌شده را رسم کرده و بیشترین و کمترین مقدار و دورهٔ تناوب تابع را مشخص کنید.

الف) $y=|\sin x|$

ب) $y=|\cos ۲x|$

(۳۵) در تابع $f(x)=\dfrac{ax+b}{x^۲+۱}$ مقادیر a، b را چنان بیابید که نقطهٔ $A(۱,۳)$ نقطهٔ عطف تابع باشد.

(۳۶) جهت تقعر تابع $f(x)=\dfrac{x-۱}{x+۲}$ را بررسی کنید.

(۳۷) جهت تقعر تابع $f(x)=x^۳-x+۱$ در چه بازه‌هایی رو به بالا و در چه بازه‌هایی رو به پایین است؟

(۳۸) نقاط بحرانی و اکسترمم نسبی تابع زیر را بیابید.

$$f(x)=(x-۱)\sqrt[۳]{x^۲}$$

(۳۹) نقاط بحرانی و نقاط اکسترمم نسبی تابع زیر را تعیین کنید.

$$f(x)=\begin{cases} x^۳+۳x^۲ & x\leq ۰ \\ x^۲-۶x & x>۰ \end{cases}$$

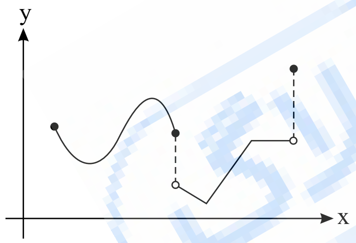
(۴۰) نقاط اکسترمم نسبی تابع زیر را یافته و مشخص کنید تابع در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی است؟

$$f(x)=\dfrac{۱}{x^۲-۲x}$$

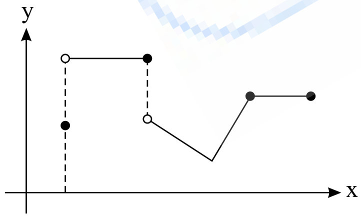
(۴۱) در بین مخروط‌هایی با مولد $۱۰\sqrt{۳}cm$، بیشترین حجم ممکن را بیابید.

(۴۲) نقاط بحرانی تابع $f(x)=x^۳+۲x^۲-۱$ را بیابید.

(۴۳) در شکل مقابل نقاط بحرانی، اکسترمم نسبی و مطلق را مشخص کنید.



(۴۴) در نمودار مقابل نقاط اکسترمم نسبی و مطلق را مشخص کنید.



(۴۵) تابع $f(x)=\dfrac{\tan x}{۲\sin x-۱}$ در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ چند مجانب قائم دارد؟

(۴۶) مجانب‌های قائم تابع $f(x)=\dfrac{x}{x^۲+۲x}$ را بیابید.

(۴۷) حاصل $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{۱+\cos x}$ را بیابید.

(۴۸) حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۳}\dfrac{x}{x-۳}$

ب) $\lim\limits_{x\to ۵}\dfrac{۱-x}{x-۵}$

(۴۹) مشتق‌پذیری تابع $f(x)=\sin x\,|\cos x|$ در نقطهٔ $x=\dfrac{\pi}{۲}$ را بررسی کنید.

۵۰ آهنگ تغییرات متوسط تابع $f(x)=\frac{۱}{۲}x^{۲}$ را وقتی x از ۲ به ۴ تغییر کند به دست آورید.

۵۱ اگر شعاع دایره‌ای از ۲ سانتی‌متر تا ۴ سانتی‌متر تغییر کند، آهنگ تغییر مساحت آن را بیابید.

۵۲ مشتق‌پذیری تابع $f(x)=\begin{cases}[x]\sin|x| & x<۰\\ x^{۲}(|x|+[x]) & x\geq ۰\end{cases}$ در نقطهٔ $x=۰$ را بررسی کنید.

۵۳ مشتق‌پذیری تابع $f(x)=\sqrt{|x+۲|}$ در نقطهٔ $x=-۲$ را بررسی کنید.

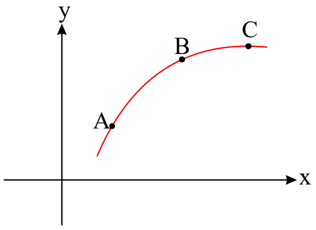
۵۴ نقاطی از منحنی $y=\frac{۲x+۳}{۱-x}$ را بیابید که مماس بر منحنی در آن نقاط بر خط $y+۵x=۸$ عمود باشد.

۵۵ مشتق تابع $f(x)=\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}$ در نقطهٔ $x=۰$ را بیابید.

۵۶ مشتق تابع $f(x)=\cos x$ در نقطهٔ $x=\frac{\pi}{۶}$ را با استفاده از تعریف مشتق بیابید.

۵۷ مشتق تابع $f(x)=\sin x$ در نقطهٔ $x=\frac{\pi}{۶}$ را با استفاده از تعریف بیابید.

۵۸ نمودار تابع f به‌صورت مقابل است. شیب مماس در A را $m_{۱}$، شیب وتر AB را $m_{۲}$، شیب مماس در C را $m_{۳}$ می‌نامیم، مقادیر $m_{۱}$، $m_{۲}$ و $m_{۳}$ را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.



۵۹ مجانب‌های افقی و قائم تابع $f(x)=\frac{۳x+۲}{x-۴}$ را بیابید.

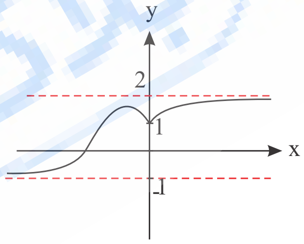
۶۰ اگر $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۲x^{n}+mx^{۳}+x^{۲}-۱}{۴x^{۳}+x^{۲}-۳}=-۲$، آنگاه m و n را بیابید. $(n\in\mathbb{N})$

۶۱ اگر $\lim_{x\to-\infty}((x+۱)^{۳}+mx^{۳}-۴x^{۲}+۲)=+\infty$، آنگاه حدود m را بیابید.

۶۲ اگر $\lim_{x\to-\infty}(mx^{۳}-(x-۱)^{۳}+x^{۲}+۲)=+\infty$، آنگاه حدود m را بیابید.

۶۳ نمودار تابع f به‌صورت مقابل است، حاصل حدهای زیر را بیابید.

ب) $\lim_{x\to-\infty}f(x)$ الف) $\lim_{x\to+\infty}f(x)$



۶۴ دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{\tan^{۲}x-۱}$ را بیابید.

۶۵ برد تابع $f(x)=[\pi\cos ۲x-\frac{\pi}{۲}]$ را بیابید. ([ ] جزء صحیح است)

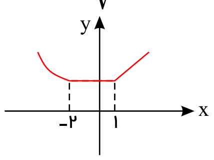
۶۶ کسرهای زیر را ساده کنید.

ب) $\frac{(x^{۸}+x^{۷}+\cdots+۱)(x^{۸}-x^{۷}+\cdots-x+۱)}{x^{۱۸}-۱}$ الف) $\frac{(x^{۵}+۱)(x-۱)}{x^{۲}-۱}$

۶۷ اگر f روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی باشد، دامنهٔ تابع g را بیابید.

$g(x)=\sqrt{f(|x-۳|)-f(|x+۲|)}$

۶۸ نمودار تابع f به‌صورت مقابل است. مشخص کنید تابع در کدام فاصله اکیداً صعودی و در کدام فاصله اکیداً نزولی است؟



(۶۹) بازه‌هایی که تابع $y = x\sqrt{۴ - x^۲}$ بر آنها صعودی یا نزولی است را تعیین کنید.

(۷۰) صعودی و نزولی بودن تابع زیر را بررسی کنید.

$$f(x) = [-۲x] + ۱$$

(۷۱) حاصل حدود زیر را به دست آورید.

الف

حد زیر را به دست آورید؟

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{۳x + ۵}{x - ۲}$$

ب

حد زیر را بدست آورید؟

$$\lim_{t \to -\infty} \frac{t^۲ + ۱}{t^۳ - ۲t^۲ + ۱}$$

پ

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{-x^۲ + ۲x}{۴x + ۱}$$

ت

$$\lim_{x \to -\infty} (x^۳ - ۲x^۲)$$

(۷۲) مشتق توابع زیر را بیابید (ساده کردن الزامی نیست).

الف

$$y = \frac{۱ + \tan x}{۱ - \tan x}$$

ب

$$y = ۵\sin^۳(۲x - ۱) + \tan\sqrt{x}$$

پ

$$y = \cos^۳(x^۲ + x) + \tan ۴x$$

ت

$$y = \sin ۲x \cos ۷x$$

(۷۳) حاصل حدهای زیر را بیابید. ([ ] نماد جزء صحیح است.)

الف

$$\lim_{x \to +\infty} [\frac{۳x + ۱}{x + ۲}]$$

حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

ب

$$\lim_{x \to -\infty} [\frac{x + ۲}{x - ۱}]$$

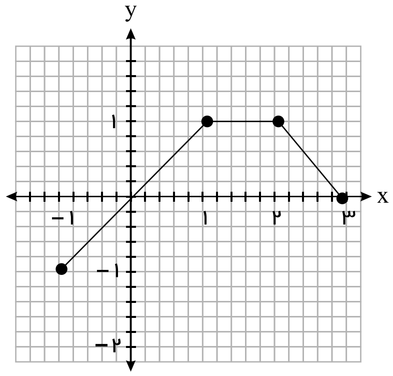
(۷۴) ضابطهٔ تابع مثلثاتی سینوس با دورهٔ تناوب ۳ و مقادیر ماکزیمم ۵ و مینیمم ۳ را بنویسید.

(۷۵) به تابعی که در یک بازه فقط صعودی یا نزولی باشد، .... می‌گوییم.

(۷۶) مجانب‌های قائم و افقی نمودار تابع $f(x) = \frac{۴x^۲ + ۱}{۲x^۲ + x}$ را در صورت وجود بیابید.

(۷۷) با رسم نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} ۱ - x^۲ & x \leq ۱ \\ -۱ & x > ۱ \end{cases}$ تعیین کنید تابع در چه بازه‌ای صعودی و در چه بازه‌ای نزولی است.

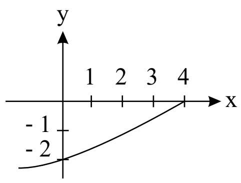
۷۸ نمودار تابع $f(x)$ به‌صورت زیر است. نمودار تابع $g(x)=f(۲x-۱)$ را رسم، دامنه و برد آن را تعیین کنید.



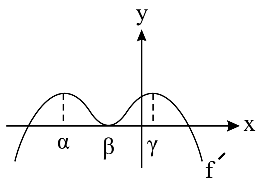
۷۹ دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y=\sqrt{۵}-\pi\cos\frac{۱}{۲}x$ را محاسبه کنید.

۸۰ الف) نقطهٔ $(۳, ۲)$ روی نمودار $f(x)$ قرار دارد. این نقطه در تابع $g(x)=f(۲-x)$ با چه نقطه‌ای متناظر است؟

ب) نمودار تابع مقابل از قرینه‌یابی و انتقال نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ به‌دست آمده است. ضابطهٔ این تابع را بنویسید.



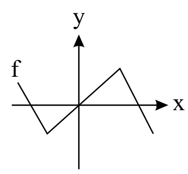
۸۱ اگر نمودار f' به‌صورت مقابل باشد، آنگاه f چند نقطهٔ عطف با طول منفی دارد؟

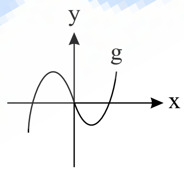


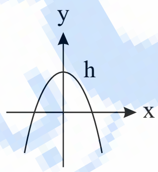
۱) ۱ ۲) ۲

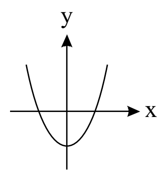
۳) ۳ ۴) صفر

۸۲ نمودار هریک از توابع را به نمودار مشتق آن وصل کنید.

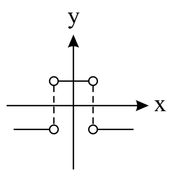




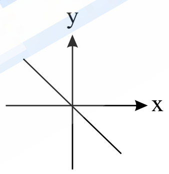




(الف)



(ب)



(پ)

۸۳ حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n+۳x^۴-x^۲+۱}{۲x^n-x^۴+۵}$ را به‌ازای مقادیر مختلف n $(n\in\mathbb{N})$ به دست آورید.

۸۴ معادلهٔ خط مماس بر منحنی تابع $f(x)=-x^۲+۱۰x$ را در نقطهٔ $A(۲, f(۲))$ واقع بر نمودار تابع بنویسید.

۸۵ مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)

الف) $f(x)=\dfrac{۲x+۳}{x^۳-۲x^۲}$

ب) $g(x)=\sin^۳(۲x+۱)$

۸۶ معادله $۲\cos ۳x-\sqrt{۳}=۰$ را حل کنید.

۸۷ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را تعیین کنید.

الف هر تابع یکنوای اکیدی، یک‌به‌یک است.

ب تابع $y = x^{۳} + ۳x^{۲} + ۳x$ در $\mathbb{R}$ صعودی است.

پ چندجمله‌ای $x^n + a^n$ بر $x + a$ بخش‌پذیر است.

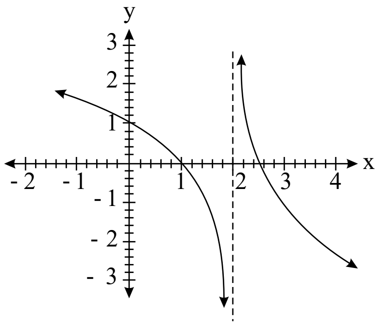
۸۸ مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)

الف
$$y = \sqrt[۳]{\sin^{۲} ۷x} + ۴\tan^{۳} x$$

ب
$$y = ۳x^{۲} \sin^{۲}(\cos x)$$

پ
$$y = ۳(۲x - ۵)^{۴} + \sqrt[۳]{x}$$

۸۹ در نمودار $f(x)$ موارد زیر را مشخص کنید.



الف
$$\lim_{x \to ۲^{+}} f(x) = ?$$

ب
$$\lim_{x \to ۲^{-}} f(x) = ?$$

۹۰ با توجه به نمودار داده شده، به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف الف) مقدار ماکزیمم مطلق را بنویسید.

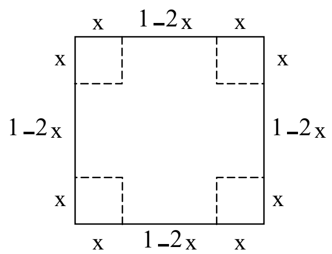
ب ب) مقدار مینیمم مطلق را بنویسید.

پ پ) طول نقطه ماکزیمم نسبی را بنویسید.

ت ت) طول نقطه مینیمم نسبی را بنویسید.

پاسخنامه تشریحی

۱



$\rightarrow V_{\text{جعبه}} = \text{مساحت قاعده} \times \text{ارتفاع}$

$$V = (1-2x)^2 \cdot x = (1+4x^2-4x)x = 4x^3-4x^2+x$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق}=0} 12x^2-8x+1=0 \xrightarrow{\Delta=b^2-4ac=64-48=16} \begin{cases} x=\dfrac{8+4}{24}=\dfrac{1}{2} \ \text{غ ق ق} \\ x=\dfrac{8-4}{24}=\dfrac{1}{6} \end{cases}$$

۲ حالت ۱ — مخرج ریشهٔ مضاعف داشته باشد.

$$f(x)=\frac{x+2}{x^2+mx+6}$$

$$x^2+mx+6=0 \Rightarrow \Delta=0 \Rightarrow m^2-24=0 \Rightarrow m=\pm 2\sqrt{6}$$

$$m=2\sqrt{6} \Rightarrow f(x)=\frac{x+2}{x^2+2\sqrt{6}x+6}=\frac{x+2}{(x+\sqrt{6})^2}$$

فقط $x=-\sqrt{6}$ مجانب قائم است.

$$m=-2\sqrt{6} \Rightarrow f(x)=\frac{x+2}{x^2-2\sqrt{6}x+6}=\frac{x+2}{(x-\sqrt{6})^2}$$

فقط $x=\sqrt{6}$ مجانب قائم است.

حالت ۲ : عبارت $x+2$ از صورت و مخرج ساده شود، یعنی مخرج بر $x+2$ بخش‌پذیر باشد.

$$x+2=0 \Rightarrow x=-2 \Rightarrow x^2+mx+6=0 \Rightarrow 4-2m+6=0 \Rightarrow m=5$$

$$f(x)=\frac{x+2}{x^2+5x+6}=\frac{x+2}{(x+2)(x+3)}=\frac{1}{x+3}$$

فقط $x=-3$ مجانب قائم است.

۳ برای یافتن باقی‌مانده باید ریشهٔ مقسوم‌علیه را در مقسوم قرار دهیم.

$$2x-4=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow \text{باقی‌مانده}=f(2)=0 \Rightarrow 4-2m+2=0$$
$$\Rightarrow 2m=6 \Rightarrow \boxed{m=3}$$

۴ نکته: اگر f تابعی اکیداً نزولی و $f(a) \leq f(b)$ باشد، آنگاه $a \geq b$.

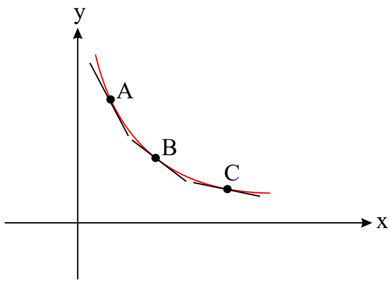
$$g(x)=\sqrt{f(|2x-1|)-f(|x+1|)} \Rightarrow f(|2x-1|)-f(|x+1|) \geq 0$$
$$\Rightarrow f(|2x-1|) \geq f(|x+1|) \xrightarrow{f\ \text{اکیداً نزولی}} |2x-1| \leq |x+1|$$
$$\Rightarrow (2x-1)^2 \leq (x+1)^2 \Rightarrow 4x^2-4x+1 \leq x^2+2x+1 \Rightarrow 3x^2-6x \leq 0$$
$$\Rightarrow 3x(x-2) \leq 0 \Rightarrow \begin{array}{c|ccccc} x & & 0 & & 2 & \\ \hline 3x(x-2) & + & 0 & - & 0 & + \end{array} \Rightarrow 0 \leq x \leq 2$$
$$\Rightarrow D_g=[0,2]$$

۵ آهنگ لحظه‌ای تغییر حجم یک کره نسبت به کره نسبت به تغییر مساحت سطح کره یعنی باید مشتق حجم کره را نسبت به سطح کره بیابیم.

$V = \frac{۴}{۳}\pi R^۳, S = ۴\pi R^۲$

$V'_S = ?\ \ V'_R = V'_S \cdot S'_R \Rightarrow V'_S = \frac{V'_R}{S'_R} = \frac{۴\pi R^۲}{۸\pi R} = \frac{۱}{۲}R$

۶ با رسم خطوط مماس بر منحنی f در نقاط C, B, A داریم:



$\rightarrow$ شیب خط مماس در C $<$ شیب خط مماس در B $<$ شیب خط مماس در A

$f'(A) < f'(B) < f'(C)$

۷ در تابع $y = a\cos bx + c$ داریم:

$T = \frac{۲\pi}{|b|}\ ,\ \ max = |a| + c\ ,\ \ min = -|a| + c$

$f(x) = m\cos(mx) + ۳ \Rightarrow T = \frac{۲\pi}{m} = \frac{\pi}{۴} \Rightarrow m = ۸$

$f(x) = ۸\cos(۸x) + ۳ \rightarrow max = ۸ + ۳ = ۱۱\ ,\ min = -۸ + ۳ = -۵$

۸

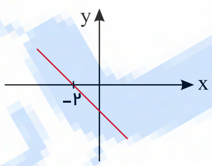
$g(x) = \sqrt{(x^۲ - ۸۱)f(x)} \Rightarrow (x^۲ - ۸۱)f(x) \geq ۰$

چون f روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی و $f(-۲) = ۰$ است، داریم:

برای $x < -۲$ تابع f مثبت است. $\Rightarrow x < -۲ \Rightarrow f(x) > f(-۲) \Rightarrow f(x) > ۰$

برای $x > -۲$ تابع f منفی است. $\Rightarrow x > -۲ \Rightarrow f(x) < f(-۲) \Rightarrow f(x) < ۰$

نمودار f تقریباً به‌صورت مقابل است.



$x^۲ - ۸۱ = ۰ \Rightarrow x = \pm ۹$

x		-۹		-۲		۹	
$x^۲ - ۸۱$	+	۰	−		−	۰	+
$f(x)$	+		+	۰	−		−
$(x^۲ - ۸۱)f(x)$	+	۰	−	۰	+	۰	−

$\Rightarrow x \leq -۹$ یا $-۲ \leq x \leq ۹ \Rightarrow D_g = (-\infty, -۹] \cup [-۲, ۹]$

۹ برای هردو مقدار $x_۱$ و $x_۲$ از $\mathbb{R}$ داریم:

$\left.\begin{array}{l} x_۱ < x_۲ \xrightarrow{f \text{ اکیداً صعودی}} f(x_۱) < f(x_۲) \\ x_۱ < x_۲ \xrightarrow{g \text{ اکیداً صعودی}} g(x_۱) < g(x_۲) \end{array}\right\} \Rightarrow f(x_۱) + g(x_۱) < f(x_۲) + g(x_۲)$

$x_۱ < x_۲ \Rightarrow (f+g)(x_۱) < (f+g)(x_۲) \Rightarrow$ $f + g$ اکیداً صعودی است.

۱۰

$y = |x| \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به } x \text{ ها}} y = -|x| \xrightarrow[x \to ۳x]{\text{انقباض افقی با ضریب ۳}} y = -|۳x|$

$\xrightarrow[x \to x+۲]{\text{۲ واحد به چپ}} y = -|۳(x+۲)| = -|۳x + ۶|$

ضابطهٔ تابع حاصل به‌صورت $y = -|۳x + ۶|$ است.

۱۱

$$y=x^3 \xrightarrow[x\to -x]{\text{قرینه نسبت به محور } y \text{ ها}} y=(-x)^3=-x^3 \xrightarrow[x\to x+2]{\text{۲ واحد چپ}} y=-(x+2)^3$$
$$\xrightarrow{\text{۵ واحد بالا}} y=f(x)=-(x+2)^3+5 \Rightarrow (x+2)^3=5-y$$
$$\Rightarrow x+2=\sqrt[3]{5-y} \Rightarrow x+2=-\sqrt[3]{y-5} \Rightarrow x=-2-\sqrt[3]{y-5}$$
$$\Rightarrow y=f^{-1}(x)=-2-\sqrt[3]{x-5}$$

۱۲

الف دو طرف معادله را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x=1$$
$$\Rightarrow 1+\sin 2x=1 \Rightarrow \sin 2x=0 \Rightarrow 2x=k\pi \Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}$$

چون طرفین را به توان ۲ رساندیم، باید ریشه‌ها را در معادلهٔ اصلی امتحان کنیم. π و $\frac{3\pi}{2}$ در معادله صدق نمی‌کند پس دو جواب دارد.

$$x=\frac{\pi}{2}\ ,\ 2\pi$$

ب می‌دانیم: $\sin 2x=2\sin x\cos x$ بنابراین:

$$\sin 2x+\cos x=0 \Rightarrow 2\sin x\cos x+\cos x=0$$
$$\Rightarrow \cos x(2\sin x+1)=0$$
$$\begin{cases} 1)\ \cos x=0=\cos\frac{\pi}{2} \Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{2}\ \ (k\in\mathbb{Z}) \\ 2)\ 2\sin x+1=0 \Rightarrow \sin x=\frac{-1}{2}=\sin(-\frac{\pi}{6}) \Rightarrow x=\begin{cases} 2k\pi-\frac{\pi}{6}\ \ (k\in\mathbb{Z}) \\ 2k\pi+\pi-(-\frac{\pi}{6})=2k\pi+\frac{7\pi}{6}\ \ (k\in\mathbb{Z}) \end{cases} \end{cases}$$

پ

$$\cos^4(x+\frac{\pi}{2})=\frac{1}{4} \Rightarrow \cos^2(x+\frac{\pi}{2})=\frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow \cos(x+\frac{\pi}{2})=\pm\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$$
$$1)\ \cos(x+\frac{\pi}{2})=+\frac{\sqrt{2}}{2}=\cos(\frac{\pi}{4}) \Rightarrow x+\frac{\pi}{2}=2k\pi\pm\frac{\pi}{4}$$
$$\Rightarrow x=\begin{cases} 2k\pi-\frac{\pi}{4}\ \ (k\in\mathbb{Z}) \\ 2k\pi-\frac{3\pi}{4}\ \ (k\in\mathbb{Z}) \end{cases}$$
$$2)\ \cos(x+\frac{\pi}{2})=-\frac{\sqrt{2}}{2}=\cos(\frac{3\pi}{4}) \Rightarrow x+\frac{\pi}{2}=2k\pi\pm\frac{3\pi}{4}$$
$$\Rightarrow x=\begin{cases} 2k\pi+\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{2} \\ 2k\pi-\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow x=\begin{cases} 2k\pi+\frac{\pi}{4}\ \ (k\in\mathbb{Z}) \\ 2k\pi-\frac{5\pi}{4}\ \ (k\in\mathbb{Z}) \end{cases}$$

ت با تقسیم طرفین معادله بر ۲ داریم:

$$\sin(3\pi x)=\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin(\frac{\pi}{3})$$
$$\Rightarrow 3\pi x=\begin{cases} 2k\pi+\frac{\pi}{3} \\ 2k\pi+\pi-\frac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow x=\begin{cases} \frac{2k\pi}{3\pi}+\frac{\pi}{9\pi} \\ \frac{2k\pi}{3\pi}+\frac{\pi-\frac{\pi}{3}}{3\pi} \end{cases} \Rightarrow x=\begin{cases} \frac{2k}{3}+\frac{1}{9}\ \ (k\in\mathbb{Z}) \\ \frac{2k}{3}+\frac{2}{9}\ \ (k\in\mathbb{Z}) \end{cases}$$

ث معادلهٔ داده‌شده را به معادله‌ای درجهٔ ۲ تبدیل می‌کنیم به کمک رابطهٔ $\cos 2x=2\cos^2 x-1$ بنابراین:

$$4\cos 2x-8\cos x+4=0 \Rightarrow 4(\cos 2x+1)-8\cos x=0$$
$$4(2\cos^2 x)-8\cos x=0 \Rightarrow 8\cos^2 x-8\cos x=0$$
$$\Rightarrow \cos^2 x-\cos x=0 \Rightarrow \cos x(\cos x-1)=0$$
$$1)\ \cos x=0=\cos(\frac{\pi}{2}) \Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{2}\ \ (k\in\mathbb{Z})$$
$$2)\ \cos x-1=0 \Rightarrow \cos x=1=\cos(0) \Rightarrow x=2k\pi\ \ (k\in\mathbb{Z})$$

۱۳

الف نکته:

$$\tan 2x=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$$

به کمک رابطهٔ فوق ظاهر معادله را تغییر می‌دهیم:

$$\frac{۲\tan x}{۱-\tan^۲ x}=۳\tan x$$

$۱)\ \tan x=۰=\tan(۰)\Rightarrow x=k\pi\ \ (k\in\mathbb{Z})$

$$۲)\ \tan x\neq ۰\Rightarrow \frac{۲\cancel{\tan x}}{۱-\tan^۲ x}=۳\cancel{\tan x}\Rightarrow \frac{۲}{۱-\tan^۲ x}=۳$$

$$\Rightarrow ۳-۳\tan^۲ x=۲\Rightarrow ۳\tan^۲ x-۱=۰\Rightarrow \tan^۲ x=\frac{۱}{۳}$$

$$\Rightarrow \tan x=\pm\frac{\sqrt{۳}}{۳}\Rightarrow\begin{cases}۱)\ \tan x=\frac{\sqrt{۳}}{۳}=\tan(\frac{\pi}{۶})\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۶}\ \ (k\in\mathbb{Z})\\ ۲)\ \tan x=-\frac{\sqrt{۳}}{۳}=\tan(-\frac{\pi}{۶})\Rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{۶}\ \ (k\in\mathbb{Z})\end{cases}$$

ب با مرتب کردن معادلهٔ داده‌شده داریم:

$$\tan^۳ x-\tan^۲ x-\tan x+۱=۰\xrightarrow{\tan x=t}$$

$$t^۳-t^۲-t+۱=۰\Rightarrow t^۲(t-۱)-(t-۱)=۰$$

$$\Rightarrow (t-۱)(t^۲-۱)=۰\Rightarrow (t-۱)^۲(t+۱)=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}۱)\ t=\tan x=-۱=\tan(-\frac{\pi}{۴})\Rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{۴}\ \ (k\in\mathbb{Z})\\ ۲)\ t=\tan x=۱=\tan(\frac{\pi}{۴})\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۴}\ \ (k\in\mathbb{Z})\end{cases}$$

پ با جای‌گذاری $\tan^۲ x=m$ در معادله داریم:

$$m^۲-۲m-۳=۰\Rightarrow (m+۱)(m-۳)=۰\Rightarrow$$

$۱)\ m=\tan^۲ x=-۱\rightarrow$ امکان ندارد.

$$۲)\ m=\tan^۲ x=۳\Rightarrow \tan x=\pm\sqrt{۳}\Rightarrow\begin{cases}\tan x=\sqrt{۳}=\tan(\frac{\pi}{۳})\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۳}\ \ (k\in\mathbb{Z})\\ \tan x=-\sqrt{۳}=\tan(\frac{-\pi}{۳})\Rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{۳}\ \ (k\in\mathbb{Z})\end{cases}$$

ت نکته: $\cos ۳x=۴\cos^۳ x-۳\cos x$

طبق نکتهٔ فوق معادله را ساده می‌کنیم:

$$\cos ۳x=۴\cos^۲ x\Rightarrow ۴\cos^۳ x-۳\cos x=۴\cos^۲ x$$

$$\Rightarrow ۴\cos^۳ x-۴\cos^۲ x-۳\cos x=۰\Rightarrow \cos x(۴\cos^۲ x-۴\cos x-۳)=۰$$

$$\Rightarrow ۱)\cos x=۰=\cos\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۲}\ \ (k\in\mathbb{Z})$$

$$۲)\ ۴\cos^۲ x-۴\cos x-۳=۰\Rightarrow \sqrt{\Delta}=\sqrt{۱۶+۴۸=۶۴}=۸$$

$$\Rightarrow \cos x=\begin{cases}\frac{۴+۸}{۸}=\frac{۳}{۲}\rightarrow \text{نا ممکن است.}\\ \frac{۴-۸}{۸}=\frac{-۱}{۲}\Rightarrow \cos x=\cos(\frac{۲\pi}{۳})\Rightarrow x=۲k\pi\pm\frac{۲\pi}{۳}\ \ (k\in\mathbb{Z})\end{cases}$$

ث نکته: $\sin ۳x=۳\sin x-۴\sin^۳ x$ ، $۱-\cos ۲x=۲\sin^۲ x$

طبق نکتهٔ فوق معادله را تغییر شکل می‌دهیم:

$$۳\sin x-۴\sin^۳ x+۲\cos ۲x=۲\Rightarrow ۳\sin x-۴\sin^۳ x=۲-۲\cos ۲x=۲(۱-\cos ۲x)\qquad (*)$$

$$\Rightarrow ۳\sin x-۴\sin^۳ x=۲\times ۲\sin^۲ x\Rightarrow ۴\sin^۳ x+۴\sin^۲ x-۳\sin x=۰$$

$$\Rightarrow \sin x(۴\sin^۲ x+۴\sin x-۳)=۰$$

$$\Rightarrow ۱)\ \sin x=۰=\sin(۰)\Rightarrow x=k\pi\ \ (k\in\mathbb{Z})$$

$$۲)\ ۴\sin^۲ x+۴\sin x-۳=۰\Rightarrow (۲\sin x+۳)(۲\sin x-۱)=۰\Rightarrow\begin{cases}\sin x=\frac{-۳}{۲}\rightarrow \text{ناممکن است.}\\ \sin x=\frac{۱}{۲}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \sin x=\frac{۱}{۲}=\sin(\frac{\pi}{۶})\Rightarrow x=\begin{cases}۲k\pi+\frac{\pi}{۶}\ \ (k\in\mathbb{Z})\\ ۲k\pi+\frac{۵\pi}{۶}\ \ (k\in\mathbb{Z})\end{cases}$$

۱۴

الف a

ب d

پ b

۱۵

الف درست

ب نادرست. زیرا با توجه به جدول در بازهٔ $(-\infty,۳]$ اکیداً صعودی نیست.

در بازهٔ $(-\infty,۱]$ اکیداً صعودی است.

$$f'(x) = -۲x + ۲$$

x	$-\infty$		۱		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\circ$	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

پ نادرست. زیرا باید مشتق چپ و راست برابر باشند.

ت درست

۱۶ آهنگ تغییر لحظه‌ای متغیر با مقدار مشتق و شیب خط مماس در آن نقطه برابر است؛ داریم:

$$f(x) = ۲x^۲ + ۵x + ۱ \Rightarrow f'(x) = ۴x + ۵ \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f'(-۱) = ۱ \\ f'(۲) = ۱۳ \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{f'(۲)}{f'(-۱)} = ۱۳$$

در نتیجه ۱۳ برابر است.

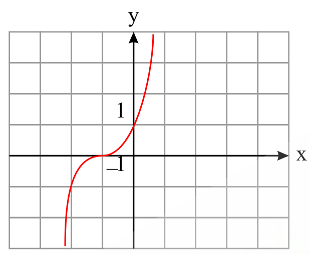
۱۷

$$f'(x) = -۴x^۳ + a \xrightarrow{f'(۱)=\circ} -۴ + a = \circ \Rightarrow a = ۴$$

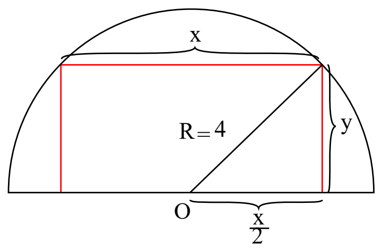
$$f(۱) = ۲ \Rightarrow -۱ + ۴ + b = ۲ \Rightarrow b = -۱$$

۱۸ برای رسم نمودار تابع ابتدا نمودار $y = x^۳$ را رسم می‌کنیم، سپس آن را یک واحد به بالا انتقال می‌دهیم.

تابع اکیداً صعودی است.



۱۹



$$(\frac{x}{۲})^۲ + y^۲ = ۴^۲ \Rightarrow \frac{x^۲}{۴} + y^۲ = ۱۶$$

$$y^۲ = ۱۶ - \frac{x^۲}{۴} = \frac{۶۴ - x^۲}{۴} \Rightarrow y = \frac{۱}{۲}\sqrt{۶۴ - x^۲}$$

$$S = xy = x \times \frac{۱}{۲}\sqrt{۶۴ - x^۲} \Rightarrow S(x) = \frac{۱}{۲}\sqrt{۶۴x^۲ - x^۴}$$

$$y^۲ \geq \circ \Rightarrow ۱۶ - \frac{x^۲}{۴} \geq \circ \Rightarrow \frac{x^۲}{۴} \leq ۱۶ \Rightarrow x^۲ \leq ۶۴ \Rightarrow -۸ \leq x \leq ۸ \quad (۱)$$

$$x \geq \circ \xrightarrow{(۱)} \circ \leq x \leq ۸ \Rightarrow S(x) = \frac{۱}{۲}\sqrt{۶۴x^۲ - x^۴} \quad \text{دامنه} = [\circ, ۸]$$

$$S'(x) = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱۲۸x - ۴x^۳}{۲\sqrt{۶۴x^۲ - x^۴}} = \circ \Rightarrow ۱۲۸x - ۴x^۳ = \circ \Rightarrow ۴x(۳۲ - x^۲) = \circ$$

$$\Rightarrow x = \circ \ , \ x = \pm ۴\sqrt{۲}$$

$$x = \circ \Rightarrow S(\circ) = \circ \ , \ x = ۴\sqrt{۲} \Rightarrow S(۴\sqrt{۲}) = \frac{۱}{۲}\sqrt{۶۴ \times ۳۲ - ۲۵۶ \times ۴} = ۱۶$$

$x = ۸ \Rightarrow S(۸) = \circ$ ، مقدار ماکزیمم مساحت $= ۱۶$

به‌ازای $x = ۴\sqrt{۲}$، مساحت مستطیل بیشترین مقدار ممکن را دارد. پس داریم:

$$x = ۴\sqrt{۲} \Rightarrow y = \frac{۱}{۲}\sqrt{۶۴ - x^۲} = \frac{۱}{۲}\sqrt{۶۴ - ۳۲} = \frac{۱}{۲}\sqrt{۳۲} = \frac{۱}{۲} \times ۴\sqrt{۲} = ۲\sqrt{۲}$$

۲۰

$[۰,۵]$ سرعت متوسط در بازهٔ $= \dfrac{f(۵)-f(۰)}{۵-۰} = \dfrac{۵^۲-۵+۱۰-۱۰}{۵} = \dfrac{۲۵-۵}{۵} = ۴\dfrac{m}{s}$

سرعت لحظه‌ای $V(t) = f'(t) = ۲t-۱ \Rightarrow V(t) = ۴ \Rightarrow ۲t-۱ = ۴ \Rightarrow t = ۲/۵$

۲۱

$(f+g)'(۱) = f'(۱) + g'(۱) = ۳ + ۵ = ۸$

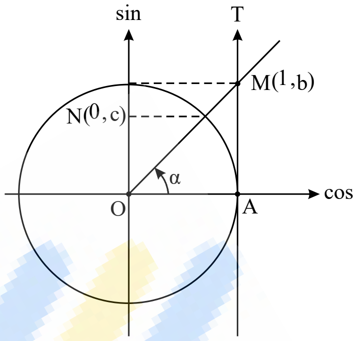
$(۳f+۲g)'(۱) = ۳f'(۱) + ۲g'(۱) = ۳\times۳ + ۲\times۵ = ۱۹$

۲۲ الف) $۰ < \alpha < \dfrac{\pi}{۲}$

در دایرهٔ مثلثاتی زیر زاویهٔ α را در ناحیهٔ اول در نظر می‌گیریم، داریم:

$\sin\alpha = ON = y_N = c > ۰$

$\tan\alpha = AM = y_M = b > ۰$



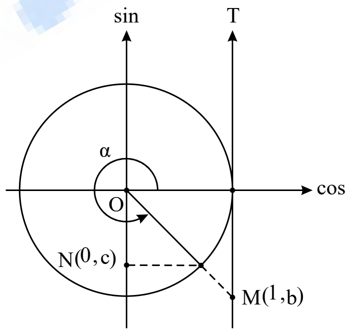
از روی شکل واضح است که: $c < b \Rightarrow \sin\alpha < \tan\alpha$

ب) $\dfrac{۳\pi}{۲} < \alpha < ۲\pi$

در دایرهٔ مثلثاتی زیر زاویهٔ α را در ناحیهٔ چهارم در نظر می‌گیریم، داریم:

$\sin\alpha = y_N = c < ۰$

$\tan\alpha = y_M = b < ۰$



از روی شکل واضح است که: $b < c \Rightarrow \tan\alpha < \sin\alpha$

۲۳ باید ریشهٔ مقسوم‌علیه را در مقسوم قرار داده و حاصل را برابر ۶ قرار دهیم.

$x-۲ = ۰ \Rightarrow x = ۲ \Rightarrow (۲)^۳ + k(۲)^۲ + ۲ = ۶ \Rightarrow ۸ + ۴k + ۲ = ۶ \Rightarrow ۴k = -۴ \Rightarrow k = -۱$

۲۴

الف) صعودی $\Leftarrow (-\infty, ۰]$ ، اکیداً صعودی $\Leftarrow (-\infty, -۳]$

صعودی $\Leftarrow \mathbb{R}$ ، اکیداً صعودی $\Leftarrow [۰, +\infty)$ ، صعودی $\Leftarrow [-۳, +\infty)$

ب) اکیداً نزولی $\Leftarrow [-۲, ۰]$ ، نزولی $\Leftarrow (\infty, ۰]$

پ) تابع h در بازه‌های $(-\infty, ۰)$ و $(۰, +\infty)$ اکیداً نزولی است.

۲۵ ابتدا باید حاصل $\tan(\alpha+\beta)$ را به‌دست آوریم:

$$۱ + \tan^۲(\alpha+\beta) = \dfrac{۱}{\cos^۲(\alpha+\beta)} \Rightarrow ۱ + \tan^۲(\alpha+\beta) = \dfrac{۱}{\frac{۹}{۲۵}} = \dfrac{۲۵}{۹}$$

$$\Rightarrow \tan^۲(\alpha+\beta) = \dfrac{۱۶}{۹} \Rightarrow \tan(\alpha+\beta) = \pm\dfrac{۴}{۳} \xrightarrow{۰<\alpha+\beta<\frac{\pi}{۲}} \tan(\alpha+\beta) = \dfrac{۴}{۳}$$

$$۲\alpha = (\alpha+\beta) + (\alpha-\beta) \Rightarrow \tan ۲\alpha = \tan((\alpha+\beta)+(\alpha-\beta))$$

$$=\frac{\tan(\alpha+\beta)+\tan(\alpha-\beta)}{۱-\tan(\alpha+\beta)\tan(\alpha-\beta)}=\frac{\frac{۴}{۳}+\frac{۵}{۱۲}}{۱-\frac{۴}{۳}\times\frac{۵}{۱۲}}=\frac{\frac{۲۱}{۱۲}}{۱-\frac{۵}{۹}}=\frac{\frac{۲۱}{۱۲}}{\frac{۴}{۹}}=\frac{۲۱\times ۹}{۴\times ۱۲}=\frac{۲۱\times ۳}{۴\times ۴}=\frac{۶۳}{۱۶}$$

$$\tan(۲\beta)=\tan((\alpha+\beta)-(\alpha-\beta))=\frac{\tan(\alpha+\beta)-\tan(\alpha-\beta)}{۱+\tan(\alpha+\beta)\tan(\alpha-\beta)}$$

$$=\frac{\frac{۴}{۳}-\frac{۵}{۱۲}}{۱+\frac{۴}{۳}\times\frac{۵}{۱۲}}=\frac{\frac{۱۱}{۱۲}}{۱+\frac{۵}{۹}}=\frac{\frac{۱۱}{۱۲}}{\frac{۱۴}{۹}}=\frac{۹۹}{۱۶۸}$$

۲۶ ابتدا زاویهٔ ۲α را برحسب $\alpha+\beta$ و $\alpha-\beta$ می‌نویسیم:

$$۲\alpha=(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)\xrightarrow[\text{tan می‌گیریم.}]{\text{از طرفین}}\tan ۲\alpha=\tan((\alpha+\beta)+(\alpha-\beta))$$

$$\Rightarrow \tan ۲\alpha=\frac{\tan(\alpha+\beta)+\tan(\alpha-\beta)}{۱-\tan(\alpha+\beta)\tan(\alpha-\beta)}$$

$$\Rightarrow \tan ۲\alpha=\frac{۳+۲}{۱-۳\times(+۲)}=\frac{۵}{-۵}=-۱$$

۲۷ تابع f در کل $\mathbb{R}$ پیوسته است.

$$f(x)=\sqrt[۳]{x^۳-۲x}$$

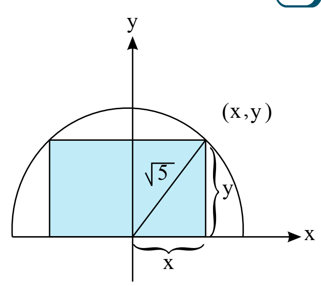
$$f'(x)=\frac{۲x-۲}{۳\sqrt[۳]{(x^۲-۲x)^۲}}$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow ۲x-۲=۰\Rightarrow x=۱$$

$$f'(x)=\text{تعریف نشده}\Rightarrow x^۲-۲x=۰\Rightarrow x(x-۲)=۰\Rightarrow x=۰\ ,\ x=۲$$

نقاط $x=۰$، $x=۱$ و $x=۲$ نقاط بحرانی تابع هستند.

۲۸



$$x^۲+y^۲=(\sqrt{۵})^۲=۵\Rightarrow y^۲=۵-x^۲\Rightarrow y=\sqrt{۵-x^۲}$$

$$y^۲\geq ۰\Rightarrow ۵-x^۲\geq ۰\Rightarrow x^۲\leq ۵\Rightarrow -\sqrt{۵}\leq x\leq\sqrt{۵}$$

$$x\geq ۰\Rightarrow ۰\leq x\leq\sqrt{۵}$$

محیط $P=۴x+۲y=۴x+۲\sqrt{۵-x^۲}\quad ,\quad ۰\leq x\leq\sqrt{۵}$

$$P'=۴+۲\times\frac{-۲x}{۲\sqrt{۵-x^۲}}=۴-\frac{۲x}{\sqrt{۵-x^۲}}=\frac{۴\sqrt{۵-x^۲}-۲x}{\sqrt{۵-x^۲}}=۰$$

$$۴\sqrt{۵-x^۲}=۲x\Rightarrow ۲\sqrt{۵-x^۲}=x\Rightarrow ۴(۵-x^۲)=x^۲$$

$$۲۰-۴x^۲=x^۲\Rightarrow ۵x^۲=۲۰\Rightarrow x^۲=۴\Rightarrow x=۲$$

$$x=۰\Rightarrow P=۰+۲\sqrt{۵}=۲\sqrt{۵}\quad ,\quad x=\sqrt{۵}\Rightarrow P=۴\sqrt{۵}$$

$$x=۲\Rightarrow P=۸+۲\sqrt{۵-۴}=۸+۲=۱۰\Rightarrow P_{\max}=۱۰$$

۲۹

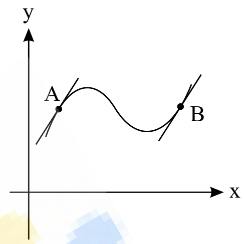
$y = x^۳ + ۶x^۲ + a \Rightarrow y' = ۳x^۲ + ۱۲x \Rightarrow y'' = ۶x + ۱۲ = ۰ \Rightarrow x = -۲$

$y = -۸ + ۲۴ + a = ۱۶ + a \Rightarrow$ مرکز تقارن $= (-۲, ۱۶ + a)$

$y = \dfrac{۲x + ۱}{x + b} \quad , \quad x + b = ۰ \Rightarrow x = -b \quad , \quad y = \dfrac{۲}{۱} = ۲ \Rightarrow$ مرکز تقارن $= (-b, ۲)$

$(-۲, ۱۶ + a) = (-b, ۲) \Rightarrow \begin{cases} -b = -۲ \Rightarrow b = ۲ \\ ۱۶ + a = ۲ \Rightarrow a = -۱۴ \end{cases}$

۳۰ خطوط مماس بر منحنی f در نقاط A و B را رسم می‌کنیم.



شیب مماس در $A > ۰ \Rightarrow f'(A) > ۰$

تقعر منحنی در نقطهٔ A رو به پایین $\Rightarrow f''(A) < ۰$

شیب مماس در $B > ۰ \Rightarrow f'(B) > ۰$

تقعر منحنی در نقطهٔ B رو به بالا $\Rightarrow f''(B) > ۰$

۳۱

$y = mx + n + \dfrac{x^۲ - ۱}{x + ۲} = \dfrac{(x + ۲)(mx + n) + x^۲ - ۱}{x + ۲}$

$y = \dfrac{mx^۲ + nx + ۲mx + ۲n + x^۲ - ۱}{x + ۲} = \dfrac{(m + ۱)x^۲ + (n + ۲m)x + ۲n - ۱}{x + ۲}$

$m + ۱ = ۰ \Rightarrow m = -۱ \Rightarrow y = \dfrac{(n - ۲)x + ۲n - ۱}{x + ۲}$

$x + ۲ = ۰ \Rightarrow x = -۲ \quad , \quad y = \dfrac{n - ۲}{۱} = n - ۲$

مرکز تقارن $= (-۲, n - ۲) \quad , \quad y = x \Rightarrow n - ۲ = -۲ \Rightarrow n = ۰$

۳۲

$f(x) = \dfrac{x - ۲}{x} \quad , \quad x = ۰$ مجانب قائم

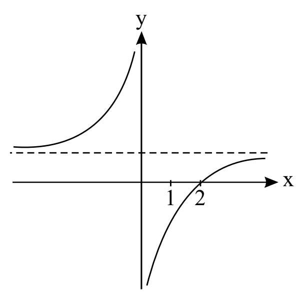
$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = ۱ \Rightarrow y = ۱$ مجانب افقی

$f'(x) = \dfrac{x - x + ۲}{x^۲} = \dfrac{۲}{x^۲} > ۰ \Rightarrow$ مشتق همواره مثبت

$f''(x) = \dfrac{۰ - ۲x \times ۲}{x^۴} = \dfrac{-۴}{x^۳}$ مشتق دوم در $x = ۰$ تغییر علامت می‌دهد.

$y = ۰ \Rightarrow x - ۲ = ۰ \Rightarrow x = ۲ \Rightarrow (۲, ۰)$

x	$-\infty$	0		2		$+\infty$
$f'(x) = \frac{2}{x^2}$	+		+		+	
$f''(x) = \frac{-4}{x^3}$	+		−		−	
f(x)	1 ↗ $+\infty$		$-\infty$ ↗	0	↗	1



۳۳ در تابع هموگرافیک مرکز تقارن نقطهٔ برخورد مجانب‌های قائم و افقی تابع است.

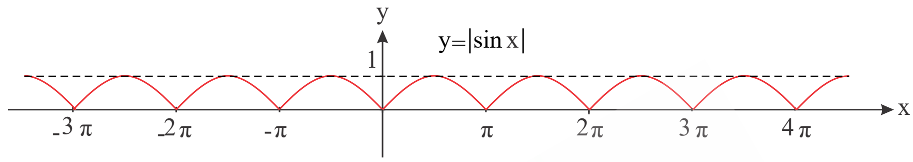
$$f(x)=\frac{۲x+b}{ax-b}\text{، مرکز تقارن } \left(-۲,-\frac{۱}{۲}\right)\Rightarrow\begin{cases}x=-۲ & \text{مجانب قائم}\\ y=-\dfrac{۱}{۲} & \text{مجانب افقی}\end{cases}$$

$$y=\frac{۲}{a}=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow a=-۴$$

$$ax-b=۰\Rightarrow x=\frac{b}{a}=-۲\Rightarrow\frac{b}{-۴}=-۲\Rightarrow b=۸$$

۳۴ الف) با رسم $y=\sin x$ و قرینه کردن قسمت‌های زیر محور طول‌ها نسبت به این محور خواهیم داشت:

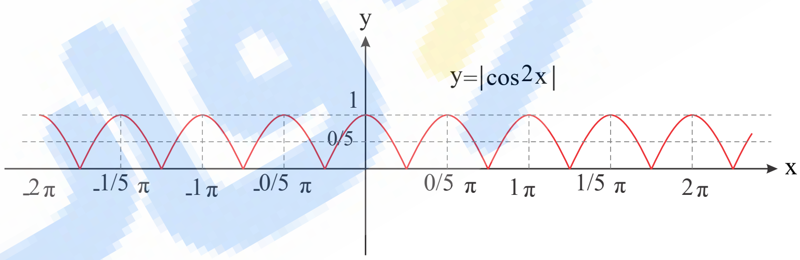
$$\begin{cases}T=\pi\\ \max=۱\\ \min=۰\end{cases}$$



ب) کافی است نمودار $y=\cos x$ را رسم کرده و سپس طول نقاط را در $\frac{۱}{۲}$ ضرب کرده $(\cos ۲x)$ و سپس نقاط با عرض منفی را نسبت به محور طول‌ها قرینه کنیم $|\cos ۲x|$ تا به نمودار زیر برسیم:

$$x=۰,\ \frac{\pi}{۲},\ \pi,\ \frac{۳\pi}{۲},\ ۲\pi,\ \cdots\rightarrow y=۱\Rightarrow T=\frac{\pi}{۲}$$

$$\begin{cases}T=\dfrac{\pi}{۲}\\ \max=۱\\ \min=۰\end{cases}$$



۳۵

$$f(x)=\frac{ax+b}{x^۲+۱}\quad \text{نقطهٔ عطف } A(۱,۳)$$

$$f(۱)=۳\Rightarrow\frac{a+b}{۲}=۳\Rightarrow a+b=۶$$

$$f'(x)=\frac{a(x^۲+۱)-۲x(ax+b)}{(x^۲+۱)^۲}=\frac{ax^۲+a-۲ax^۲-۲bx}{(x^۲+۱)^۲}=\frac{-ax^۲-۲bx+a}{(x^۲+۱)^۲}$$

$$f''(x)=\frac{(-۲ax-۲b)(x^۲+۱)^۲-۲\times۲x(x^۲+۱)(-ax^۲-۲bx+a)}{(x^۲+۱)^۴}$$

$$f''(x)=\frac{(x^۲+۱)\Big((-۲ax-۲b)(x^۲+۱)-۴x(-ax^۲-۲bx+a)\Big)}{(x^۲+۱)^۴}$$

$$f''(x)=\frac{(-۲ax-۲b)(x^۲+۱)-۴x(-ax^۲-۲bx+a)}{(x^۲+۱)^۳}\Rightarrow f''(۱)=۰$$

$$\Rightarrow(-۲a-۲b)\times۲-۴(-a-۲b+a)=۰\Rightarrow-۴a-۴b+۸b=۰$$

$$\Rightarrow-۴a+۴b=۰\Rightarrow b=a\Rightarrow a+b=۶\Rightarrow ۲a=۶\Rightarrow a=b=۳$$

۳۶

$f(x)=\dfrac{x-۱}{x+۲}\ ,\ x+۲=۰\Rightarrow x=-۲$ مجانب قائم

$$f'(x)=\frac{x+۲-x+۱}{(x+۲)^۲}=\frac{۳}{(x+۲)^۲}\Rightarrow f''(x)=\frac{۰-۲(x+۲)\times ۳}{(x+۲)^۴}=\frac{-۶}{(x+۲)^۳}$$

علامت مشتق دوم به عبارت $x+۲$ بستگی دارد، پس داریم:

$$x+۲=۰\Rightarrow x=-۲$$

x	$-\infty$		-۲		$+\infty$
$f''(x)=\frac{-۶}{(x+۲)^۳}$		$+$	ت ن	$-$	
		$\smile$		$\frown$	

در بازهٔ $(-\infty,-۲)$ تقعر رو به بالا و در بازهٔ $(-۲,+\infty)$ تقعر رو به پایین است.

(۳۷)

$$f(x)=x^۳-x+۱\Rightarrow f'(x)=۳x^۲-۱\Rightarrow f''(x)=۶x=۰\Rightarrow x=۰$$

x	$-\infty$		۰		$+\infty$
$f'(x)=۶x$		$-$	۰	$+$	
		$\frown$		$\smile$	

در بازهٔ $(-\infty,۰)$ تقعر رو به پایین و در بازهٔ $(۰,+\infty)$ تقعر رو به بالا است.

(۳۸) تابع f در کل R پیوسته است.

$$f(x)=(x-۱)\sqrt[۳]{x^۲}$$

$$f'(x)=۱\times\sqrt[۳]{x^۲}+\frac{۲}{۳\sqrt[۳]{x}}(x-۱)=\frac{۳x+۲x-۲}{۳\sqrt[۳]{x}}=\frac{۵x-۲}{۳\sqrt[۳]{x}}\Rightarrow\begin{cases}۵x-۲=۰\Rightarrow x=\frac{۲}{۵}\\ x=۰\end{cases}$$

x	$-\infty$		۰		$\frac{۲}{۵}$		$+\infty$
$f'(x)=\frac{۵x-۲}{۳\sqrt[۳]{x}}$		$+$	ت ن	$-$	۰	$+$	
		$\nearrow$	۰	$\searrow$	$f(\frac{۲}{۵})$	$\nearrow$	

نقطهٔ $x=۰$ ماکزیمم نسبی و نقطهٔ $x=\dfrac{۲}{۵}$ مینیمم نسبی است.

تابع در $x=۰$ مشتق‌ناپذیر و بحرانی است و در $x=\dfrac{۲}{۵}$ مشتق صفر است و به‌همین دلیل نقطهٔ بحرانی است.

(۳۹)

$$f(۰)=۰\ ,\ \text{حد چپ}=\lim_{x\to ۰^-}(x^۳+۳x^۲)=۰\ ,\ \text{حد راست}=\lim_{x\to ۰^+}(x^۲-x)=۰$$

تابع در $x=۰$ پیوسته است.

$$f'(x)=\begin{cases}۳x^۲+۶x & x<۰\Rightarrow ۳x^۲+۶x=۰\Rightarrow ۳x(x+۲)=۰\Rightarrow x=۰\ ,\ x=-۲\\ ۲x-۶ & x>۰\Rightarrow ۲x-۶=۰\Rightarrow x=۳\end{cases}$$

$f'_-(۰)=۰\ ,\ f'_+(۰)=۰-۶=-۶\Rightarrow f'_-(۰)\neq f'_+(۰)\Rightarrow$ مشتق ناپذیر $x=۰$

نقاط بحرانی عبارتند از: $x=۰\ ,\ x=-۲\ ,\ x=۳$

x	$-\infty$		-۲		۰		۳		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	۰	$-$		$-$	۰	$+$	
		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

$$x=-۲\Rightarrow f(-۲)=-۸+۱۲=۴\ ,\ x=۳\Rightarrow f(۳)=۹-۱۸=-۹$$

نقطهٔ $(-۲,۴)$ ماکزیمم نسبی و نقطهٔ $(۳,-۹)$ مینیمم نسبی است.

۴۰

$$f(x)=\frac{۱}{x^۲-۲x} \quad , \quad x^۲-۲x=۰ \Rightarrow x=۰,۲ \quad \text{مجانب قائم}$$

$$f'(x)=\frac{۰-(۲x-۲)\times ۱}{(x^۲-۲x)^۲}=\frac{-۲x+۲}{(x^۲-۲x)^۲}=۰ \Rightarrow -۲x+۲=۰ \Rightarrow x=۱$$

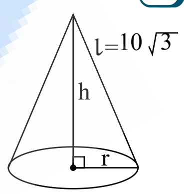
$$x=۱ \Rightarrow y=f(۱)=\frac{۱}{۱-۲}=-۱$$

علامت مشتق به صورت بستگی دارد.

x	$-\infty$		۰		۱		۲		$+\infty$
$f'(x)=\frac{-۲x+۲}{(x^۲-۲x)^۲}$		$+$	ت‌ن	$+$	۰	$-$	ت‌ن	$-$	
		$\nearrow$		$\nearrow$	-۱	$\searrow$		$\searrow$	

نقطهٔ $(۱,-۱)$ ماکزیمم نسبی تابع است. تابع در بازه‌های $(-\infty,۰)$ و $(۰,۱]$ اکیداً صعودی و در بازه‌های $[۱,۲)$ و $(۲,+\infty)$ اکیداً نزولی است.

۴۱



$$h^۲+r^۲=\ell^۲=۳۰۰ \Rightarrow r^۲=۳۰۰-h^۲$$

$$r^۲\geq ۰ \Rightarrow ۳۰۰-h^۲\geq ۰ \Rightarrow h^۲\leq ۳۰۰ \Rightarrow -۱۰\sqrt{۳}\leq h\leq ۱۰\sqrt{۳}$$

$$h\geq ۰ \Rightarrow ۰\leq h\leq ۱۰\sqrt{۳}$$

$$V=\frac{۱}{۳}\pi r^۲ h=\frac{\pi}{۳}h(۳۰۰-h^۲)=\frac{\pi}{۳}(۳۰۰h-h^۳)$$

$$V'(h)=\frac{\pi}{۳}(۳۰۰-۳h^۲)=۰ \Rightarrow ۳۰۰=۳h^۲ \Rightarrow h^۲=۱۰۰ \Rightarrow h=۱۰$$

$$h=۰ \Rightarrow V(۰)=۰ \quad , \quad h=۱۰\sqrt{۳} \Rightarrow V(۱۰\sqrt{۳})=۰$$

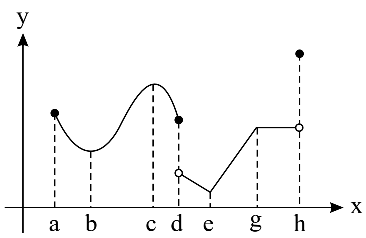
$$h=۱۰ \Rightarrow V(۱۰)=\frac{\pi}{۳}(۳۰۰۰-۱۰۰۰)=\frac{۲۰۰۰\pi}{۳}$$

۴۲ تابع f در کل $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است.

$$f(x)=x^۳+۲x^۲-۱$$

$$f'(x)=۳x^۲+۴x=۰ \Rightarrow x(۳x+۴)=۰ \Rightarrow x=۰ \ , \ x=-\frac{۴}{۳} \quad \text{نقاط بحرانی}$$

۴۳



$x=a$ نقطهٔ بحرانی(ابتدای بازه) است.

$x=b$ نقطهٔ بحرانی، مینیمم نسبی $(f'(b)=۰)$

$x=c$ نقطهٔ بحرانی، ماکزیمم نسبی $(f'(c)=۰)$

$x=d$ نقطهٔ بحرانی ولی اکسترمم نسبی نیست.

$x=e$ نقطهٔ بحرانی، مینیمم نسبی و مطلق است.

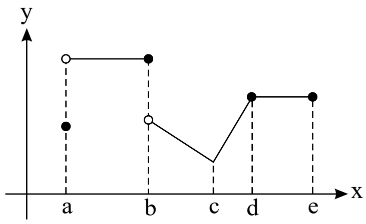
$x=g$ نقطهٔ بحرانی و ماکزیمم نسبی است.

کل بازهٔ (g,h) بحرانی، هم ماکزیمم نسبی و هم مینیمم نسبی است.

$x=h$ نقطهٔ بحرانی (انتهای بازه) و ماکزیمم مطلق است.

۴۴

کل بازهٔ (a,b) ماکزیمم مطلق، ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی است.



$x=b$ نقطهٔ ماکزیمم نسبی است.

$x=c$ نقطهٔ مینیمم نسبی و مطلق است.

$x=d$ نقطهٔ ماکزیمم نسبی است.

کل بازهٔ (d,e) هم ماکزیمم نسبی و هم مینیمم نسبی است.

۴۵

$$f(x)=\frac{\tan x}{۲\sin x-۱}=\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{۲\sin x-۱}=\frac{\sin x}{\cos x(۲\sin x-۱)}$$

$$\cos x(۲\sin x-۱)=۰\Rightarrow \cos x=۰\ ,\ \sin x=\frac{۱}{۲}$$

$$\cos x=۰\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۲}\xrightarrow{[۰,۲\pi]}x=\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲}$$

$$\sin x=\frac{۱}{۲}=\sin\frac{\pi}{۶}\Rightarrow\begin{cases}x=۲k\pi+\frac{\pi}{۶}\xrightarrow{۰\le x\le ۲\pi}x=\frac{\pi}{۶}\\ x=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۶}=۲k\pi+\frac{۵\pi}{۶}\xrightarrow{۰\le x\le ۲\pi}x=\frac{۵\pi}{۶}\end{cases}$$

با توجه به این که هیچ‌کدام از مقادیر $x=\frac{\pi}{۲}$ و $x=\frac{۳\pi}{۲}$ و $x=\frac{\pi}{۶}$ و $x=\frac{۵\pi}{۶}$ صورت کسر یعنی $\sin x$ را صفر نمی‌کنند، پس همگی مجانب قائم هستند.

۴۶

ابتدا ریشه‌های مخرج را پیدا می‌کنیم.

$$f(x)=\frac{x}{x^۲+۲x}\ ,\ x^۲+۲x=۰\Rightarrow x(x+۲)=۰\Rightarrow x=۰\ ,\ x=-۲$$

$\lim\limits_{x\to ۰}\frac{x}{x(x+۲)}=\lim\limits_{x\to ۰}\frac{۱}{x+۲}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow$ خط $x=۰$ مجانب قائم نمی‌باشد.

$$\lim_{x\to -۲}\frac{x}{x(x+۲)}=\lim_{x\to -۲}\frac{۱}{x+۲}\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to(-۲)^-}\frac{۱}{x+۲}=\frac{۱}{-۲-\varepsilon+۲}=\frac{۱}{۰^-}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to(-۲)^+}\frac{۱}{x+۲}=\frac{۱}{-۲+\varepsilon+۲}=\frac{۱}{۰^+}=+\infty\end{cases}$$

خط $x=-۲$ تنها مجانب قائم تابع است.

۴۷ با استفاده از تغییر متغیر داریم:

$$x\to\pi$$

$$x-\pi=t\Rightarrow\begin{cases}x=\pi+t\\ t\to ۰\end{cases}$$

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{۱+\cos x}=\lim_{t\to ۰}\frac{\sin(\pi+t)}{۱+\cos(\pi+t)}=\lim_{t\to ۰}\frac{-\sin t}{۱-\cos t}\times\frac{۱+\cos t}{۱+\cos t}$$

* با توجه به این نکته که وقتی $t\to ۰$ میل کند، $sint\sim t$ داریم:

$$=\lim_{t\to ۰}\frac{-\sin t(۱+\cos t)}{۱-\cos^۲ t}=\lim_{t\to ۰}\frac{-\sin t(۱+\cos t)}{\sin^۲ t}=\lim_{t\to ۰}\frac{-(۱+\cos t)}{\sin t}$$

$=\lim\limits_{t\to ۰}\frac{-۱-\cos t}{\frac{\sin t}{t}\times t}=\lim\limits_{t\to ۰}\frac{-۱-\cos t}{t}=\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to ۰^-}\frac{-۱-\cos t}{t}=\frac{-۲}{۰^-}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to ۰^+}\frac{-۱-\cos t}{t}=\frac{-۲}{۰^+}=-\infty\end{array}\right\}\Rightarrow$ پس تابع در این نقطه حد ندارد

۴۸

الف) $\lim\limits_{x\to ۳}\frac{x}{x-۳}$

ابتدا حد راست و چپ تابع در نقطه ۳ را به‌دست می‌آوریم:

$\left.\begin{array}{l}\text{حد چپ}=\lim_{x\to ۳^-}\frac{x}{x-۳}=\frac{۳}{۳-\varepsilon-۳}=\frac{۳}{۰^-}=-\infty\\ \text{حد راست}=\lim_{x\to ۳^+}\frac{x}{x-۳}=\frac{۳}{۳+\varepsilon-۳}=\frac{۳}{۰^+}=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow$ پس تابع در این نقطه حد ندارد

ابتدا حد راست و چپ تابع در نقطهٔ ۵ را به‌دست می‌آوریم:

ب) $\lim_{x\to ۵}\dfrac{۱-x}{x-۵}$

$$\left.\begin{array}{l}\text{حدچپ}=\lim_{x\to ۵^-}\frac{۱-x}{x-۵}=\frac{۱-۵}{۵-\varepsilon-۵}=\frac{-۴}{-\varepsilon}=\frac{-۴}{۰^-}=+\infty\\ \text{حد راست}=\lim_{x\to ۵^+}\frac{۱-x}{x-۵}=\frac{۱-۵}{۵+\varepsilon-۵}=\frac{-۴}{+\varepsilon}=\frac{-۴}{۰^+}=-\infty\end{array}\right\}\Rightarrow$$ پس تابع در این نقطه حد ندارد

۴۹

$$f(x)=\sin x\,|\cos x|\ ,\ f(\frac{\pi}{۲})=۰$$

$$f'(\frac{\pi}{۲})=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{f(x)-f(\frac{\pi}{۲})}{x-\frac{\pi}{۲}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{\sin x\,|\cos x|-۰}{x-\frac{\pi}{۲}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{\sin x\,|\cos x|}{x-\frac{\pi}{۲}}$$

$$x-\frac{\pi}{۲}=t\Rightarrow x=\frac{\pi}{۲}+t\ ,\ t\to ۰$$

$$f'(\frac{\pi}{۲})=\lim_{t\to ۰}\frac{\sin(\frac{\pi}{۲}+t)\left|\cos(\frac{\pi}{۲}+t)\right|}{t}=\lim_{t\to ۰}\frac{\cos t\,|\sin t|}{t}$$

$$f'_-(\frac{\pi}{۲})=\lim_{t\to ۰^-}\frac{\cos t|\sin t|}{t}=\lim_{t\to ۰^-}\frac{\cos t(-\sin t)}{t}=\lim_{t\to ۰^-}-\cos t\times\frac{\sin t}{t}$$

$$=\lim_{t\to ۰^-}-\cos t\times ۱=-۱$$

$$f'_+(\frac{\pi}{۲})=\lim_{t\to ۰^+}\frac{\cos t|\sin t|}{t}=\lim_{t\to ۰^+}\cos t\times\frac{\sin t}{t}=\lim_{t\to ۰^+}\cos t\times ۱=۱$$

تابع در $x=\frac{\pi}{۲}$ مشتق‌ناپذیر است.

۵۰

$$f(x)=\frac{۱}{۲}x^۲$$

$$\frac{f(۴)-f(۲)}{۴-۲}=\frac{\frac{۱}{۲}\times ۱۶-\frac{۱}{۲}\times ۴}{۲}=\frac{۸-۲}{۲}=۳$$

۵۱ تابع مساحت دایره برحسب شعاع آن به‌صورت مقابل است:

$$S(r)=\pi r^۲$$

$$\frac{S(۴)-S(۲)}{۴-۲}=\frac{۱۶\pi-۴\pi}{۲}=\frac{۱۲\pi}{۲}=۶\pi$$

۵۲

$$f(x)=\begin{cases}[x]\sin|x| & x<۰\\ x^۲(|x|+[x]) & x\geq ۰\end{cases}\quad f(۰)=۰$$

$$f'_-(۰)=\lim_{x\to ۰^-}\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{[x]\sin|x|-۰}{x}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{[x]\sin(-x)}{x}$$

$$=\lim_{x\to ۰^-}\frac{-[x]\sin x}{x}=\lim_{x\to ۰^-}-[x]\times ۱=-\left[۰^-\right]=-(-۱)=۱$$

$$f'_+(۰)=\lim_{x\to ۰^+}\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{x^۲(|x|+[x])-۰}{x}$$

$$=\lim_{x\to ۰^+}x(|x|+[x])=۰$$

تابع در $x=۰$ مشتق‌ناپذیر است.

۵۳

$$f(x)=\sqrt{|x+۲|},\ f(-۲)=۰$$

$$f'(-۲)=\lim_{x\to -۲}\frac{f(x)-f(-۲)}{x-(-۲)}=\lim_{x\to -۲}\frac{\sqrt{|x+۲|}-۰}{x+۲}\times\frac{\sqrt{|x+۲|}}{\sqrt{|x+۲|}}$$

$$=\lim_{x\to -۲}\frac{|x+۲|}{(x+۲)\sqrt{|x+۲|}}$$

$$f'_-(-۲)=\lim_{x\to(-۲)^-}\frac{-(x+۲)}{(x+۲)\sqrt{|x+۲|}}=\lim_{x\to(-۲)^-}\frac{-۱}{\sqrt{|x+۲|}}=\frac{-۱}{۰^+}=-\infty$$

$$f'_+(-۲)=\lim_{x\to(-۲)^+}\frac{x+۲}{(x+۲)\sqrt{|x+۲|}}=\lim_{x\to(-۲)^+}\frac{۱}{\sqrt{|x+۲|}}=\frac{۱}{۰^+}=+\infty$$

تابع در $x=-۲$ مشتق‌ناپذیر است.

۵۴

$$y + ۵x = ۸ \Rightarrow y = -۵x + ۸ \Rightarrow \text{شیب} = -۵$$

$$\Rightarrow \text{شیب خط عمود} = \frac{۱}{۵} \Rightarrow \text{شیب خط مماس بر منحنی دادهشده} = \frac{۱}{۵}$$

$$y = \frac{۲x + ۳}{۱ - x} \Rightarrow y' = \frac{۲(۱ - x) - (-۱)(۲x + ۳)}{(۱ - x)^۲} = \frac{۲ - ۲x + ۲x + ۳}{(۱ - x)^۲}$$

$$y' = \frac{۵}{(۱ - x)^۲} = \frac{۱}{۵} \Rightarrow (۱ - x)^۲ = ۲۵ \Rightarrow ۱ - x = \pm ۵ \Rightarrow \begin{cases} x = -۴ \\ x = ۶ \end{cases}$$

$$x = -۴ \Rightarrow y = \frac{۲(-۴) + ۳}{۱ - (-۴)} = \frac{-۵}{۵} = -۱ \Rightarrow A(-۴, -۱)$$

$$x = ۶ \Rightarrow y = \frac{۲ \times ۶ + ۳}{۱ - ۶} = \frac{۱۵}{-۵} = -۳ \Rightarrow B(۶, -۳)$$

۵۵

$$f(x) = \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}$$

$$f'(x) = \frac{\cos x(\sin x + \cos x) - (\cos x - \sin x)\sin x}{(\sin x + \cos x)^۲} = \frac{\cos x \sin x + \cos^۲ x - \cos x \sin x + \sin^۲ x}{(\sin x + \cos x)^۲}$$

$$f'(x) = \frac{۱}{(\sin x + \cos x)^۲} \Rightarrow f'(۰) = \frac{۱}{(۰ + ۱)^۲} = ۱$$

۵۶

$$f(x) = \cos x$$

$$f'(\frac{\pi}{۶}) = \lim_{x \to \frac{\pi}{۶}} \frac{f(x) - f(\frac{\pi}{۶})}{x - \frac{\pi}{۶}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{۶}} \frac{\cos x - \cos\frac{\pi}{۶}}{x - \frac{\pi}{۶}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{۶}} \frac{\cos x - \frac{\sqrt{۳}}{۲}}{x - \frac{\pi}{۶}}$$

با استفاده از تغییر متغیر مقابل داریم:

$$x - \frac{\pi}{۶} = t \Rightarrow x = \frac{\pi}{۶} + t, t \to ۰$$

$$f'(\frac{\pi}{۶}) = \lim_{t \to ۰} \frac{\cos(\frac{\pi}{۶} + t) - \frac{\sqrt{۳}}{۲}}{t} = \lim_{t \to ۰} \frac{\cos\frac{\pi}{۶}\cos t - \sin\frac{\pi}{۶}\sin t - \frac{\sqrt{۳}}{۲}}{t}$$

$$= \lim_{t \to ۰} \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}\text{cost} - \frac{۱}{۲}\sin t - \frac{\sqrt{۳}}{۲}}{t} = \lim_{t \to ۰} \frac{-\frac{\sqrt{۳}}{۲}(۱ - \cos t) - \frac{۱}{۲}\sin t}{t}$$

$$= \lim_{t \to ۰} \frac{-\frac{\sqrt{۳}}{۲} \times ۲\sin^۲(\frac{t}{۲})}{t} + \lim_{t \to ۰} \frac{-\frac{۱}{۲}\sin t}{t} = \lim_{t \to ۰} \frac{-\sqrt{۳}(\frac{sin\frac{t}{۲}}{\frac{t}{۲}} \times \frac{t}{۲})^{۲}}{t} - \frac{۱}{۲}\lim_{t \to ۰} \frac{\sin t}{t}$$

$$= \lim_{t \to ۰} \frac{-\sqrt{۳} \times \frac{۱}{۴}t^۲}{t} - \frac{۱}{۲} \times ۱ = \lim_{t \to ۰} (-\frac{\sqrt{۳}}{۴}t) - \frac{۱}{۲} = ۰ - \frac{۱}{۲} = -\frac{۱}{۲}$$

۵۷

$$f(x) = \sin x,\ f(\frac{\pi}{۶}) = \frac{۱}{۲}$$

$$f'(\frac{\pi}{۶}) = \lim_{x \to \frac{\pi}{۶}} \frac{f(x) - f(\frac{\pi}{۶})}{x - \frac{\pi}{۶}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{۶}} \frac{\sin x - \sin\frac{\pi}{۶}}{x - \frac{\pi}{۶}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{۶}} \frac{\sin x - \frac{۱}{۲}}{x - \frac{\pi}{۶}}$$

با استفاده از تغییر متغیر مقابل داریم:

$$x - \frac{\pi}{۶} = t \Rightarrow x = \frac{\pi}{۶} + t, t \to ۰$$

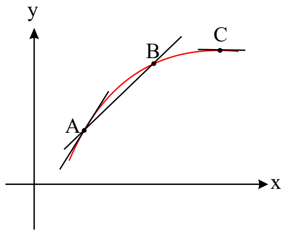
$$f'(\frac{\pi}{۶}) = \lim_{t \to ۰} \frac{\sin(\frac{\pi}{۶} + t) - \frac{۱}{۲}}{t} = \lim_{t \to ۰} \frac{\sin\frac{\pi}{۶}\cos t + \cos\frac{\pi}{۶}\sin t - \frac{۱}{۲}}{t}$$

$$= \lim_{t \to ۰} \frac{\frac{۱}{۲}\cos t - \frac{۱}{۲} + \frac{\sqrt{۳}}{۲}\sin t}{t} = \lim_{t \to ۰} \frac{-\frac{۱}{۲}(۱ - cost) + \frac{\sqrt{۳}}{۲}\sin t}{t}$$

$$= \lim_{t \to ۰} \frac{-\frac{۱}{۲} \times ۲\sin^۲(\frac{t}{۲}) + \frac{\sqrt{۳}}{۲}\sin t}{t} = \lim_{t \to ۰} \frac{-\left(\frac{\sin \frac{t}{۲}}{\frac{t}{۲}} \times \frac{t}{۲}\right)^۲}{t} + \frac{\sqrt{۳}}{۲} \lim_{t \to ۰} \frac{\sin t}{t}$$

$$= \lim_{t \to ۰} \frac{-\frac{۱}{۴}t^۲}{t} + \frac{\sqrt{۳}}{۲} \times ۱ = \lim_{t \to ۰} (-\frac{۱}{۴}t) + \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۰ + \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

۵۸ وتر AB و خطوط مماس بر منحنی f در نقاط A و C را رسم می‌کنیم.



$\rightarrow$ شیب خط مماس در A $<$ شیب وتر AB $<$ شیب خط مماس در C

$m_۳ < m_۲ < m_۱$

۵۹

برای بررسی داشتن مجانب قائم، ریشه‌های مخرج را پیدا می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{۳x + ۲}{x - ۴} \ , \ x - ۴ = ۰ \Rightarrow x = ۴$$

$$\lim_{x \to ۴} \frac{۳x + ۲}{x - ۴} = \begin{cases} \lim\limits_{x \to ۴^-} \frac{۳x + ۲}{x - ۴} = \frac{۱۴}{۰^-} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to ۴^+} \frac{۳x + ۲}{x - ۴} = \frac{۱۴}{۰^+} = +\infty \end{cases}$$

خط $x = ۴$ مجانب قائم تابع است.

برای داشتن مجانب افقی، حدتابع وقتی x به بی‌نهایت میل می‌کند را پیدا می‌کنیم:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{۳x + ۲}{x - ۴} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{۳x}{x} = ۳$$

خط $y = ۳$ مجانب افقی تابع است.

۶۰ با توجه به قاعدهٔ پرتوان: $ax^n + bx^{n-۱} + \cdots \underset{x \to \pm\infty}{\sim} ax^n$ داریم:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{۲x^n + mx^۳ + x^۲ - ۱}{۴x^۳ + x^۲ - ۳} = -۲$$

حالت ۱) $n < ۳ \Rightarrow \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{mx^۳}{۴x^۳} = \frac{m}{۴} = -۲ \Rightarrow m = -۸ \Rightarrow n < ۳ \ , \ m = -۸$ جواب

حالت ۲) $n = ۳ \Rightarrow \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{۲x^۳ + mx^۳}{۴x^۳} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{(۲ + m)x^۳}{۴x^۳} = \frac{۲ + m}{۴} = -۲$

$\Rightarrow ۲ + m = -۸ \Rightarrow m = -۱۰ \Rightarrow n = ۳ \ , \ m = -۱۰$ جواب

حالت ۳) $n > ۳ \Rightarrow \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{۲x^n}{۴x^۳} = \pm\infty \rightarrow$ غیرقابل‌قبول

۶۱ با توجه به قاعدهٔ پرتوان: $ax^n + bx^{n-۱} + \cdots \underset{x \to \pm\infty}{\sim} ax^n$ داریم:

$$\lim_{x \to -\infty} (x^۳ + ۳x^۲ + ۳x + ۱ + mx^۳ - ۴x^۲ + ۲) = \lim_{x \to -\infty} ((m + ۱)x^۳ - x^۲ + ۳x + ۳) = +\infty$$

حالت ۱) $m = -۱ \Rightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} (-x^۲ + ۳x + ۳) = \lim\limits_{x \to -\infty} (-x^۲)$

$= -(-\infty)^۲ = -(+\infty) = -\infty$ غیر قابل قبول

حالت ۲) $m \neq -۱ \Rightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} ((m + ۱)x^۳ - x^۲ + ۳x + ۳) = \lim\limits_{x \to -\infty} (m + ۱)x^۳$

$\Rightarrow (m + ۱)(-\infty)^۳ = (m + ۱)(-\infty) = +\infty \Rightarrow m + ۱ < ۰ \Rightarrow m < -۱$

۶۲ با توجه به قاعدهٔ پرتوان: $ax^n + bx^{n-۱} + \cdots \underset{x \to \pm\infty}{\sim} ax^n$ داریم:

$$\lim_{x\to-\infty}(mx^۳-(x-۱)^۳+x^۲+۲)=\lim_{x\to-\infty}(mx^۳-x^۳+۳x^۲-۳x+۱+x^۲+۲)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}((m-۱)x^۳+۴x^۲-۳x+۳)=+\infty$$

حالت ۱) $m=۱\Rightarrow \lim_{x\to-\infty}(۴x^۲-۳x+۳)=\lim_{x\to-\infty}۴x^۲=۴(-\infty)^۲=۴(+\infty)=+\infty$ قابل قبول

حالت ۲) $m\neq ۱\Rightarrow \lim_{x\to-\infty}((m-۱)x^۳+۴x^۲-۳x+۳)=\lim_{x\to-\infty}(m-۱)x^۳=(m-۱)(-\infty)^۳$

$$\Rightarrow (m-۱)(-\infty)=+\infty\Rightarrow m-۱<۰\Rightarrow m<۱$$

در کل باید $m\leq ۱$ باشد.

۶۳

الف) $\lim_{x\to+\infty}f(x)=۲$

هر چه x به $+\infty$ میل می‌کند، مقادیر $f(x)$ به ۲ نزدیک‌تر می‌شوند.

ب) $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-۱$

هر چه x به $-\infty$ میل می‌کند، مقادیر $f(x)$ به ۱− نزدیک‌تر می‌شوند.

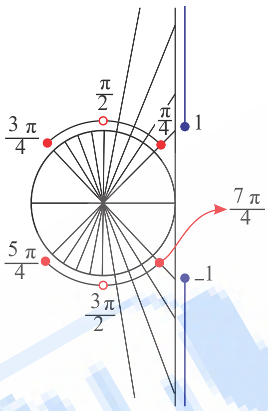
۶۴

$$f(x)=\sqrt{\tan^۲x-۱}\Rightarrow \tan^۲x-۱\geq ۰\Rightarrow \tan^۲x\geq ۱\Rightarrow |\tan x|\geq ۱$$

$$\Rightarrow \tan x\leq -۱\quad \text{یا}\quad \tan x\geq ۱$$

با توجه به دایرهٔ مثلثاتی مقابل حدود x بصورت زیر است.

$$\frac{\pi}{۴}\leq x\leq \frac{۳\pi}{۴}\ \text{یا}\ \frac{۵\pi}{۴}\leq x\leq \frac{۷\pi}{۴}\ \text{و}\ x\neq\frac{\pi}{۲}\ \text{و}\ \frac{۳\pi}{۲}$$



در حالت کلی داریم:

$$۲k\pi+\frac{\pi}{۴}\leq x\leq ۲k\pi+\frac{۳\pi}{۴}\ \text{یا}\ ۲k\pi+\frac{۵\pi}{۴}\leq x\leq ۲k\pi+\frac{۷\pi}{۴}\quad \text{و}\quad x\neq k\pi+\frac{\pi}{۲}$$

۶۵

$$-۱\leq \cos ۲x\leq ۱\Rightarrow -\pi\leq \pi\cos ۲x\leq \pi\Rightarrow -\pi-\frac{\pi}{۲}\leq \pi\cos ۲x-\frac{\pi}{۲}\leq \pi-\frac{\pi}{۲}$$

$$\Rightarrow -\frac{۳\pi}{۲}\leq \pi\cos ۲x-\frac{\pi}{۲}\leq\frac{\pi}{۲}\Rightarrow f(x)=[\pi\cos ۲x-\frac{\pi}{۲}]=-۵,-۴,\cdots,۰,۱$$

$$R_f=\{-۵,-۴,\cdots,۰,۱\}$$

۶۶

الف) $\dfrac{(x^۵+۱)(x-۱)}{x^۲-۱}=\dfrac{(x+۱)(x^۴-x^۳+x^۲-x+۱)(x-۱)}{(x-۱)(x+۱)}=x^۴-x^۳+x^۲-x+۱$

ب) $\dfrac{(x^۸+x^۷+\cdots+۱)(x^۸-x^۷+\cdots-x+۱)}{x^{۱۸}-۱}=\dfrac{(x^۸+x^۷+\cdots+۱)(x^۸-x^۷+\cdots-x+۱)}{(x^۹-۱)(x^۹+۱)}$

$$=\frac{(x^۸+x^۷+\cdots+x+۱)(x^۸-x^۷+\cdots-x+۱)}{(x-۱)(x^۸+x^۷+\cdots+x+۱)(x+۱)(x^۸-x^۷+\cdots-x+۱)}=\frac{۱}{(x-۱)(x+۱)}=\frac{۱}{x^۲-۱}$$

۶۷ **نکته:** اگر تابع f اکیداً نزولی باشد و $f(a)\leq f(b)$ آنگاه $a\geq b$.

$$g(x)=\sqrt{f(|x-۳|)-f(|x+۲|)}\Rightarrow f(|x-۳|)-f(|x+۲|)\geq ۰$$

$$\Rightarrow f(|x-۳|)\geq f(|x+۲|)\xrightarrow{f\ \text{اکیداً نزولی}}|x-۳|\leq |x+۲|$$

$$(x-۳)^۲\leq (x+۲)^۲\Rightarrow x^۲-۶x+۹\leq x^۲+۴x+۴\Rightarrow ۹-۴\leq ۴x+۶x$$

$$\Rightarrow ۱۰x \geq ۵ \Rightarrow x \geq \frac{۱}{۲} \Rightarrow D_g = [\frac{۱}{۲}, +\infty)$$

۶۸

اکیداً صعودی $\leftarrow [۱, +\infty)$ اکیداً نزولی $\leftarrow (-\infty, -۲]$

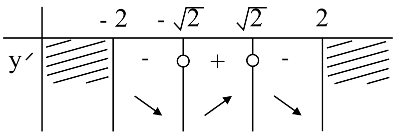
۶۹ برای تعیین صعودی یا نزولی بودن تابع $f(x)$، مشتق اول آن را تعیین علامت می‌کنیم.

$$y = x\sqrt{۴ - x^۲}$$

$$۴ - x^۲ \geq ۰ \rightarrow x^۲ \leq ۴ \rightarrow |x| \leq ۲ \rightarrow -۲ \leq x \leq ۲ \rightarrow \quad D = [-۲, ۲]$$

$$y' = \sqrt{۴ - x^۲} + \frac{-۲x}{۲\sqrt{۴ - x^۲}} \times x$$

$$\rightarrow y' = \frac{۴ - x^۲ - x^۲}{\sqrt{۴ - x^۲}} = ۰ \rightarrow ۲x^۲ = ۴ \rightarrow x^۲ = ۲ \rightarrow x = \pm\sqrt{۲}$$



تابع در بازهٔ $[-\sqrt{۲}, \sqrt{۲}]$ صعودی است و در بازه‌های $[-۲, -\sqrt{۲}]$ و $[\sqrt{۲}, ۲]$ نزولی است.

۷۰

$$f(x) = [-۲x] + ۱$$

$$x_۱ < x_۲ \Rightarrow -۲x_۱ > -۲x_۲ \Rightarrow [-۲x_۱] \geq [-۲x_۲] \Rightarrow [-۲x_۱] + ۱ \geq [-۲x_۲] + ۱$$

$\Rightarrow f(x_۱) \geq f(x_۲)$ نزولی

۷۱

الف با توجه به قاعدهٔ پرتوان: $ax^n + bx^{n-1} + \cdots \underset{x\to\pm\infty}{\sim} ax^n$ داریم:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{۳x + ۵}{x - ۲} = \lim_{x\to+\infty} \frac{۳x}{x} = ۳$$

ب با توجه به قاعدهٔ پرتوان: $ax^n + bx^{n-1} + \cdots \underset{x\to\pm\infty}{\sim} ax^n$، داریم:

$$\lim_{t\to-\infty} \frac{t^۲ + ۱}{t^۳ - ۲t^۲ + ۱} = \lim_{t\to-\infty} \frac{t^۲}{t^۳} = \lim_{t\to-\infty} \frac{۱}{t} = \frac{۱}{-\infty} = ۰$$

پ با توجه به قاعدهٔ پرتوان: $ax^n + bx^{n-1} + \cdots \underset{x\to\pm\infty}{\sim} ax^n$ داریم:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{-x^۲ + ۲x}{۴x + ۱} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-x^۲}{۴x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-x}{۴} = \lim_{x\to\pm\infty} -\frac{۱}{۴}x = \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{۱}{۴}x = -\frac{۱}{۴}(+\infty) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} -\frac{۱}{۴}x = -\frac{۱}{۴}(-\infty) = +\infty \end{cases}$$

ت با توجه به قاعدهٔ پرتوان: $ax^n + bx^{n-1} + \cdots \underset{x\to\pm\infty}{\sim} ax^n$ داریم:

$$\lim_{x\to-\infty} (x^۳ - ۲x^۲) = \lim_{x\to-\infty} x^۳ = (-\infty)^۳ = -\infty$$

۷۲

الف

$$y' = \frac{(۱ + \tan^۲ x)(۱ - \tan x) + (۱ + \tan^۲ x)(۱ + \tan x)}{(۱ - \tan x)^۲}$$

ب

$$y' = ۳۰\cos(۲x - ۱)\sin^۲(۲x - ۱) + \frac{۱}{۲\sqrt{x}}(۱ + \tan^۲\sqrt{x})$$

پ

$$y' = -۳(۲x + ۱)\sin(x^۲ + x)\cdot\cos^۲(x^۲ + x) + ۴(۱ + \tan^۲ ۴x)$$

ت

$$y' = ۲\cos ۲x \cos ۷x - ۷\sin ۷x \sin ۲x$$

۷۳

الف می‌دانیم $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{۳x + ۱}{x + ۲} = ۳$، حال باید ببینیم کسر $\frac{۳x + ۱}{x + ۲}$ چگونه به ۳ میل می‌کند، برای این کار ۳ برابر مخرج را در صورت ایجاد می‌کنیم.

$$\lim_{x\to+\infty} [\frac{۳x + ۱}{x + ۲}] = \lim_{x\to+\infty} [\frac{۳x + ۶ - ۵}{x + ۲}] = \lim_{x\to+\infty} [\frac{۳(x + ۲)}{x + ۲} - \frac{۵}{x + ۲}] = \lim_{x\to+\infty} [۳ - \frac{۵}{x + ۲}]$$

$= [\text{۳} - \frac{\text{۵}}{+\infty}] = [\text{۳} - \text{۰}^{+}] = [\text{۳} - \varepsilon] = \text{۲}$

ب می‌دانیم $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x+\text{۲}}{x-\text{۱}} = \text{۱}$، حال باید ببینیم کسر $\frac{x+\text{۲}}{x-\text{۱}}$ چگونه به یک میل می‌کند، برای این کار مخرج را در صورت ایجاد می‌کنیم.

$$\lim_{x\to-\infty}[\frac{x+\text{۲}}{x-\text{۱}}] = \lim_{x\to-\infty}[\frac{x-\text{۱}+\text{۳}}{x-\text{۱}}] = \lim_{x\to-\infty}[\frac{x-\text{۱}}{x-\text{۱}} + \frac{\text{۳}}{x-\text{۱}}] = \lim_{x\to-\infty}[\text{۱} + \frac{\text{۳}}{x-\text{۱}}]$$

$$= [\text{۱} + \frac{\text{۳}}{-\infty}] = [\text{۱} + \text{۰}^{-}] = [\text{۱} - \varepsilon] = \text{۰}$$

۷۴

دورهٔ تناوب : $T = \frac{\text{۲}\pi}{|b|} \Rightarrow \text{۳} = \frac{\text{۲}\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = \frac{\text{۲}\pi}{\text{۳}}$

$|a| = \text{۱}\ ,\ c = \text{۴} \Rightarrow y = \sin\frac{\text{۲}\pi}{\text{۳}}x + \text{۴}$ یا $y = -\sin\frac{\text{۲}\pi}{\text{۳}}x + \text{۴}$

۷۵ یکنوا

۷۶

برای بررسی داشتن مجانب قائم، ریشه‌های مخرج را پیدا می‌کنیم:

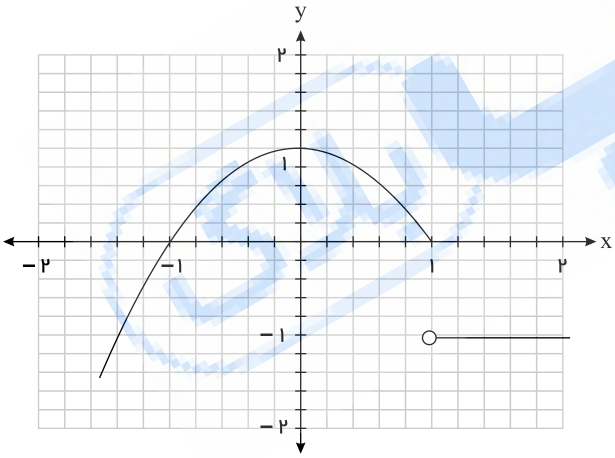
$$\lim_{x\to\text{۰}} f(x) = \infty\ ,\ \lim_{x\to\frac{\text{۱}}{\text{۲}}} f(x) = \infty$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \text{۰} \\ x = -\frac{\text{۱}}{\text{۲}} \end{cases} \text{۲}x^{\text{۲}} + x = \text{۰}$$

برای داشتن مجانب افقی، حد تابع وقتی x به بی‌نهایت میل می‌کند را پیدا می‌کنیم:

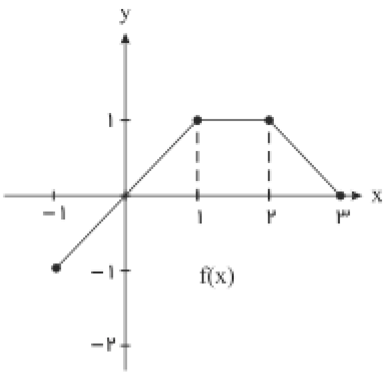
$y = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\text{۴}x^{\text{۲}}+\text{۱}}{\text{۲}x^{\text{۲}}+x} = \text{۲} \Rightarrow y = \text{۲}$ **(مجانب افقی)**

۷۷ با توجه به نمودار در بازهٔ $(-\infty, \text{۰}] \cup (\text{۱}, +\infty)$ صعودی و در بازهٔ $[\text{۰}, +\infty)$ نزولی است.

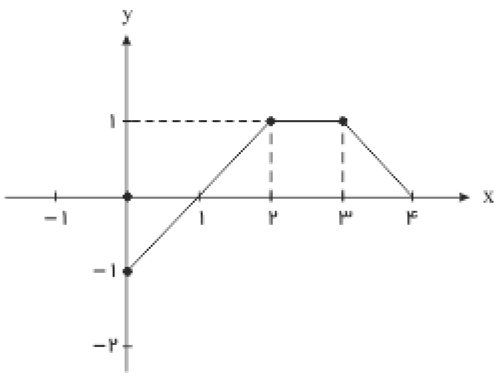


۷۸

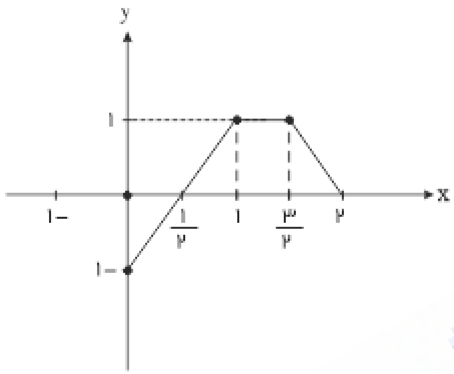
$$y = f(x) \xrightarrow{x\to x-\text{۱}} y = f(x-\text{۱}) \xrightarrow{x\to \text{۲}x} g(x) = f(\text{۲}x-\text{۱})$$



y = f (x - ۱)



g(x) = f (۲x - ۱)



با توجه به نمودار داریم:

$$D_g = [۰, ۲] \ , \ \ R_g = [-۱, ۱]$$

۷۹ می‌دانیم: در تابع $y = a\cos bx + c$ مقدار ماکزیمم $|a| + c$ و مقدار مینیمم $-|a| + c$ و دورهٔ تناوب $\frac{۲\pi}{|b|}$ است.

$$y = \sqrt{۵} - \pi \cos \frac{۱}{۲}x$$

ماکزیمم: $\max(y) = \pi + \sqrt{۵}$

مینیمم: $\min(y) = -\pi + \sqrt{۵}$

دورهٔ تناوب: $T = \frac{۲\pi}{\frac{۱}{۲}} = ۴\pi$

۸۰ «الف»

$$g(x) = f(۲ - x) = f(-x + ۲)$$

از x، ۲ تا کم و سپس قرینه‌اش می‌کنیم، پس:

$$(۳, ۲) \xrightarrow{x-۲} (+۱, ۲) \Rightarrow (-۱, ۲)$$

«ب»

$$y = -\sqrt{-(x - ۴)} = -\sqrt{-x + ۴}$$

۸۱ گزینهٔ «۲». α، β نقاط اکسترمم تابع مشتق و نقاط عطف تابع اصلی‌اند.

۸۲ تابع f به (ب) تابع g به (الف) تابع h به (پ)

۸۳

با توجه به قاعده پرتوان داریم:

قاعدهٔ پرتوان: $ax^n + bx^{n-۱} + \cdots x \overset{\sim}{\rightarrow} \pm\infty \ ax^n$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n + ۳x^۴ - x^۲ + ۱}{۲x^n - x^۴ + ۵} = \begin{cases} \xrightarrow{n<۴} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{۳x^۴}{-x^۴} = -۳ \\ \xrightarrow{n=۴} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^۴ + ۳x^۴}{۲x^۴ - x^۴} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{۴x^۴}{x^۴} = ۴ \\ \xrightarrow{n>۴} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^n}{۲x^n} = \frac{۱}{۲} \end{cases}$$

۸۴

$$f'(x) = -۲x + ۱۰ \ \ , f'(۲) = ۶ \ \ , \ \ f(۲) = ۱۶$$

در نتیجه $A(۲,۱۶)$ است و شیب برابر ۱۶ است؛ پس معادلهٔ خط برابر است با:

$$y - y_A = f'(۲)(x - x_A) \Rightarrow y - ۱۶ = ۶(x - ۲) \Rightarrow y = ۶x + ۴$$

۸۵

الف) $y' = \dfrac{۲(x^۳ - ۲x^۲) - (۳x^۲ - ۴x)(۲x + ۳)}{(x^۳ - ۲x^۲)^۲}$

ب) $y' = ۳ \times ۲\sin^۲(۲x + ۱)\cos(۲x + ۱)$

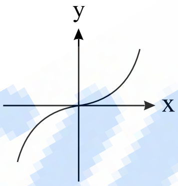
۸۶

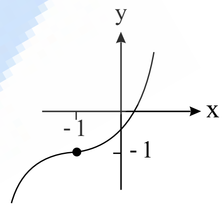
$$\cos ۳x = \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \cos\frac{\pi}{۶} \Rightarrow ۳x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۶} \Rightarrow x = \frac{۲k\pi}{۳} \pm \frac{\pi}{۱۸} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

۸۷

الف درست

ب درست- $y = x^۳ + ۳x^۲ + ۳x + ۱ - ۱ = (x + ۱)^۳ - ۱$

با توجه به شکل تابع $x^۳$ کافی است $x^۳$ یعنی  را یک واحد به چپ و یک واحد به پایین منتقل کنیم.



که با توجه به شکل تابع صعودی اکید و درنتیجه، صعودی است.

پ نادرست - چندجمله‌ای $x^n + a^n$ بر $x + a$ درصورتی بخش‌پذیر است که n فرد باشد.

۸۸

اگر $y = \tan^n u$، آنگاه $y' = nu'(۱ + \tan^۲ u)\tan^{n-۱} u$

الف

$$y = \overbrace{\sqrt[۳]{\sin^۲ ۷x}}^{y_۱} + \overbrace{۴\tan^۳ x}^{y_۲}$$

$$y'_۱ = \frac{۲ \times ۷\sin ۷x \cos ۷x}{۳\sqrt[۳]{\sin^۴ ۷x}} = \frac{۱۴\cos ۷x}{\sqrt[۳]{\sin ۷x}} \;,\; y_۲ = ۴\tan^۳ x \Rightarrow y'_۲ = ۴ \times ۳\tan^۲ x(۱ + \tan^۲ x) \Rightarrow y' = \frac{۱۴\cos ۷x}{\sqrt[۳]{\sin ۷x}} + ۱۲\tan^۲ x(۱ + \tan^۲ x)$$

ب

$$y = ۳x^۲\sin^۲(\cos x) \Rightarrow y' = ۶x\sin^۲(\cos x) - ۲\sin x \sin(\cos x)(۳x^۲)$$

پ

$$y = ۳(۲x - ۵)^۴ + \sqrt[۳]{x} \Rightarrow y' = ۳ \times ۴ \times ۲(۲x - ۵)^۳ + \frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}$$

۸۹

با توجه به نمودار هرچه x از سمت راست به ۲ نزدیک‌تر می‌شود، مقادیر $f(x)$ به‌سمت $+\infty$ می‌روند:

الف

$+\infty$

با توجه به نمودار هرچه x از سمت چپ به ۲ نزدیک‌تر می‌شود، مقادیر $f(x)$ به سمت $-\infty$ می‌روند:

ب

$-\infty$

۹۰

الف ۸

ب -۴

پ ۴

ت ۲