نام و نام خانوادگی:　　　　　　　　　　زمان برگزاری: ۱۴۷۶۰ دقیقه

نام آزمون: حسابان یازدهم

تاریخ آزمون: ۱۴۰۱/۱۱/۱۰

۱) اگر $f(x)=\sqrt{x-۲}$ و $g=\{(۰,۴),(۳,۲),(۵,-۹)\}$ مفروض باشند، توابع $fog$ و $gof$ را بیابید.

۲) اگر $f(x)=\begin{cases} ۲x \ , & x>۱ \\ x^۲-۱ \ , & x\leq ۱\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases} x-۳ \ , & x\geq ۳ \\ ۱+x \ , & x<۳\end{cases}$، آنگاه تابع $f-g$ را بیابید.

۳) آیا توابع $f(x)=\frac{۷}{x}+۳$ و $g(x)=\frac{۷}{x-۳}$ وارون یکدیگرند؟

۴) در تابع $f(x)=\frac{mx}{x+۲}$، اگر $f(-۱)=۴$ باشد، مقدار $a$ را چنان بیابید که $f(a)=۴f(۲)$ باشد.

۵) درستی اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$\sin ۲x=\frac{۲\tan x}{۱+\tan^۲ x}$$

۶) درستی اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$۱+\sin ۲x=(\sin x+\cos x)^۲$$

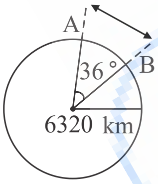
۷) اگر $f(x)=۴-\sqrt{x-۱}$، مجموعه جواب‌های معادلهٔ $(fof^{-۱})(x)=(f^{-۱}of)(x)$ را بیابید.

۸) معادلهٔ $\sqrt{۶x^۲-۲۴x+۷}=۴x-x^۲$ را حل کنید:

۹) در معادلهٔ درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$ اگر $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های معادله بوده و $x_۲=kx_۱$ آن‌گاه ثابت کنید.

$$\frac{(k+۱)^۲}{k}=\frac{b^۲}{a\cdot c}$$

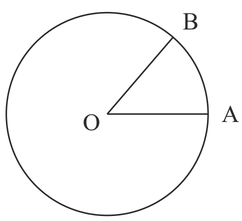
۱۰) فاصلهٔ دو نقطهٔ $A$ و $B$ از کرهٔ زمین که بر روی یک نصف‌النهار قرار دارند، مطابق شکل روبرو، برابر طول کمانی از دایرهٔ گذرنده از آن دو نقطه است. با داشتن اندازه شعاع کرهٔ زمین فاصلهٔ بین دو نقطهٔ داده شده را بیابید.




۱۱) اگر $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{ax-۲a}{\sqrt{۳x-۵}-۱}=۳$ آن‌گاه $a$ را بیابید.

۱۲) دوچرخه سواری در یک پیست دایره‌ای به شعاع ۱۰ متر، مسافت $\frac{۱۰\pi}{۹}$ متر را می‌پیماید. اندازهٔ زاویهٔ طی شده را بر حسب رادیان به‌دست آورید.

۱۳) شعاع دایره مقابل برابر $۱۰cm$ می‌باشد:




الف) اگر زاویهٔ مرکزی $A\hat{O}B$ برابر $۴۰^\circ$ باشد، طول کمان $\overset{\frown}{AB}$ برابر چند سانتی‌متر است؟

ب) اگر طول کمان $\overset{\frown}{AB}$ برابر $\frac{۵\pi}{۳}cm$ باشد، زاویهٔ مرکزی $A\hat{O}B$ چند درجه است؟

۱۴) در یک دنباله‌ی حسابی اگر $S_m=S_n$ با شرط $m\neq n$ ثابت کنید: $S_{m+n}=۰$

۱۵) حد زیر را در صورت وجود تعیین کنید.

$$\lim\limits_{x\to ۰^-}\frac{\sin ۲x}{\sqrt{۱-۲\cos ۲x}}$$

**۱۶** تابع $f$ در همه شرایط زیر صدق می‌کند. $f$ را رسم کنید و ضابطه آن را بنویسید.

الف) دامنه $f$ مجموعه اعداد حقیقی است و $f(۲) = ۳$ و $f(-۵) = -۲$

ب) $f$ در بازه $[۰, ۲]$ ثابت است.

پ) تابع $f$ به هر عدد بزرگ‌تر از ۲ مربع آن را نسبت می‌دهد.

ت) تابع $f$ برای اعداد منفی، خطی است و نمودار آن محور $x$ها را در نقطه‌ای به طول ۳− قطع می‌کند.

**۱۷** تابع $f(x) = |x+۱| + |x-۱|$ را به صورت یک تابع چند ضابطه ای بنویسید و نمودار آن را رسم کنید. به کمک نمودار برد تابع را معلوم کنید.

**۱۸** اگر $|x-۱| + |x+۱| > ۲|x|$ برقرار باشد حدود $x$ را به دست آورید.

**۱۹** برد تابع $f(x) = \dfrac{۳}{۵ + ۲^x}$ را بیابید.

**۲۰** توابع $f = \{(-۲, ۲), (-۱, ۱), (۰, ۴), (۵, ۰)(, ۱-۱)\}$ و $g(x) = \sqrt{۱ - x^۲}$ مفروضند، مطلوب است:

الف) تابع $f - g + ۲$ ‌ ‌ ‌ ‌ ب) تابع $gof$

**۲۱** خط $y = ۱$ و نمودار $y = |x^۲ - ۲|x||$ در چند نقطه تلاقی دارند؟

**۲۲** اگر $\alpha$ و $\beta$ ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $x^۲ - ۵x - ۳ = ۰$ باشند، حاصل $\dfrac{\alpha}{\beta - ۵}$ را بیابید.

**۲۳** توابع زیر را در نظر بگیرید.

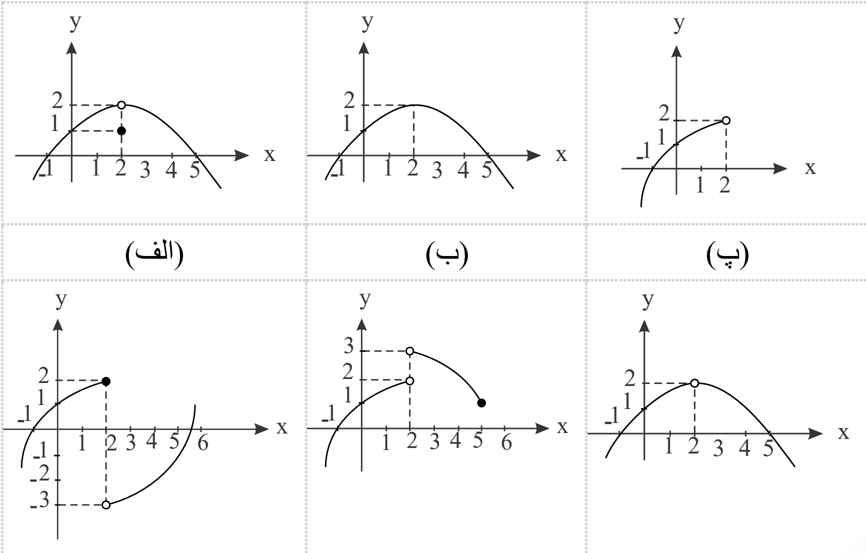
$$y = ۳x + ۲ \quad , \quad y = x^۲ - ۱ \quad , \quad y = [x] - ۱ \quad , \quad y = \begin{cases} -۲ & x < ۱ \\ ۲ & x > ۱ \end{cases}$$

الف) مقدار حد هریک از توابع فوق در $x = ۱$ را (در صورت وجود) بیابید.

ب) با انتخاب توابع $f$ و $g$ از بین چهار تابع فوق، جدول زیر را کامل کنید.

| | | | |
|---|---|---|---|
| هر سه تابع $f$ و $g$ و $f+g$ در ۱ حد دارند. | $f(x) = \dots$ | $g(x) = \dots$ | $f(x) + g(x) = \dots$ |
| تابع $f \cdot g$ در ۱ حد دارد، اما تابع $f$ در ۱ حد ندارد. | $f(x) = \dots$ | $g(x) = \dots$ | $f(x) \cdot g(x) = \dots$ |
| توابع $f$ و $g$ در ۱ حد راست دارند اما تابع $\dfrac{f}{g}$ در ۱ حد راست ندارد. | $f(x) = \dots$ | $g(x) = \dots$ | $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dots$ |
| تابع $f^۲$ در ۱ حد دارد اما تابع $f$ در ۱ حد ندارد. | $f(x) = \dots$ | | $f^۲(x) = \dots$ |
| تابع $f$ در ۱ حد دارد اما تابع $\sqrt{f}$ در ۱ حد ندارد. | $f(x) = \dots$ | | $\sqrt{f(x)} = \dots$ |

**۲۴** با توجه به نمودارهای توابع داده شده در زیر، هر کدام از گزاره‌های پایین صفحه در مورد چند تا از این توابع برقرار است؟ در هر مورد توابع را مشخص کنید.



(الف) (ب) (پ)

(ت) (ث) (ج)

تابع در همسایگی محذوف ۲ تعریف شده و در این نقطه حد دارد.

تابع در همسایگی ۲ تعریف شده و در این نقطه حد دارد ولی مقدار حد با مقدار تابع در این نقطه برابر نیست.

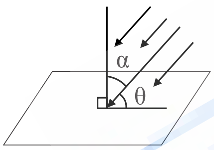
تابع در همسایگی چپ ۲ تعریف شده و در این نقطه حد ندارد.

تابع در همسایگی ۲ تعریف شده و در این نقطه حد دارد و حد آن برابر مقدار تابع در این نقطه است.

تابع در نقطه ۲ تعریف نشده ولی در این نقطه حد دارد.

تابع در همسایگی راست ۲ تعریف شده ولی در این نقطه حد ندارد.

**۲۵** شدت نور وارد بر یک سلول خورشیدی، با زاویهٔ تابش $\alpha$ در ارتباط است (شکل زیر) اگر شدت نور را با $I$ نشان دهیم، رابطهٔ $I = k\sin(\frac{\pi}{۲} - \alpha)$ که در آن $k$ یک عدد ثابت مثبت است، شدت نور را نشان می‌دهد.




الف) با توجه به شکل و با استفاده از روابط مثلثاتی، رابطهٔ شدت نور را بر حسب زاویه $\theta$ در شکل بازنویسی کنید.

ب) شدت نور را برای زاویه‌های $\theta = ۰, \theta = \frac{\pi}{۶}$ و $\theta = \frac{\pi}{۳}$ بر حسب $k$ به دست آورید.

پ) زاویهٔ $\theta$ چقدر باشد تا بیشترین شدت نور به دست آید؟ چرا؟ (راهنمایی: از دایرهٔ مثلثاتی کمک بگیرید).

(با کمی تغییر)

**۲۶** نمودار دو تابع $f(x) = x^{۲}$ و $g(x) = ۲^{x}$ را رسم کنید و سپس آن‌ها را با هم مقایسه کنید.

**۲۷** وارون تابع $f(x) = -\frac{۱}{۲}x + ۳$ را بیابید و نمودار $f$ و وارون آن را رسم کنید.

**۲۸** نمودار تابع $y = -\sqrt{x}$ را با استفاده از نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ رسم کنید.

**۲۹** تابع $f(x) = [x]$ مفروض است.

الف) نقاط ناپیوستگی تابع را در بازهٔ $(-۲, ۳)$ تعیین کنید.

ب) نقاط ناپیوستگی تابع را در بازهٔ $[-۳, ۲)$ تعیین کنید.

**۳۰** حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim\limits_{x\to -۱} \frac{x^{۳} - ۲x - ۱}{x^{۲} - ۱}$

ب) $\lim\limits_{x\to ۱} \frac{x^{۳} + ۲x - ۳}{x^{۲} + x - ۲}$

**۳۱** حاصل حد زیر را بیابید.

$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}} [\sin x + \cos x]$

۳۲) یک همسایگی، یک همسایگی محذوف، یک همسایگی راست و یک همسایگی چپ برای $x = ۳$ مثال بزنید.

۳۳) نمودار تابع مقابل را رسم کرده و حد آن را در $x = ۲$ بررسی کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x^۲ + ۱ & x < ۲ \\ ۶ & x = ۲ \\ -x^۲ + ۹ & x > ۲ \end{cases}$$

۳۴) مقدار عددی عبارت زیر را بیابید.

$$A = \sin^۶ \frac{\pi}{۱۲} + \cos^۶ \frac{\pi}{۱۲}$$

۳۵) برد تابع زیر را بیابید. ([ ] نماد جزء صحیح است)

$$y = \left[ \frac{-\sin x}{۲ + \sin x} \right]$$

۳۶) برد تابع زیر را بیابید.

$$f(x) = \frac{\cos x - ۱}{۲\cos x + ۱}$$

۳۷) مقدار عددی عبارت زیر را حساب کنید.

$$\frac{۲\sin(\frac{۴۹\pi}{۱۰}) - \sin(\frac{۷\pi}{۵}) + \sin(\frac{۱۸\pi}{۵}) - ۲\cos(\frac{۳\pi}{۵})}{\cos(-\frac{۳\pi}{۵}) + ۲\cos(\frac{۱۳\pi}{۵}) - \sin(\frac{۱۹\pi}{۱۰})}$$

۳۸) درستی تساوی زیر را بررسی کنید.

$$\frac{\tan(x + \frac{۷\pi}{۲}) + \sin(۷\pi - x) + ۳\cos(x - \frac{۱۱\pi}{۲}) + \cot(x - ۸\pi)}{\cot(x - \frac{۵\pi}{۲}) + \sin(\frac{۷\pi}{۲} + x) + ۳\cos(x - ۱۲\pi) + \tan(x - ۷\pi)} = -\tan x$$

۳۹) در هر مورد تساوی دو تابع $f$ و $g$ را بررسی کنید.

الف) $f(x) = \frac{۲x - ۱۸}{x - ۹}$ , $g(x) = ۲$

ب) $f(x) = \frac{۳x^۲ + ۶}{x^۲ + ۲}$ , $g(x) = ۳$

ج) $f(x) = \sqrt{(x + ۶)^۲}$ , $g(x) = |x + ۶|$

۴۰) ثابت کنید:

$$\frac{۲\sin(\frac{۴۱\pi}{۱۰}) + \sin(-\frac{\pi}{۱۰}) + \sin(\frac{۲۹\pi}{۱۰}) - ۲\sin(\frac{۱۱\pi}{۱۰})}{\cos(-\frac{\pi}{۱۰})\tan(\frac{۱۱\pi}{۱۰}) + ۲\cos\frac{۲\pi}{۵} + \sin(\frac{۱۹\pi}{۱۰})} = ۲$$

۴۱) در هر مورد تساوی دو تابع $f$ و $g$ را بررسی کنید.

الف) $f = \{(۲,۵),(۴,-۶),(۰,۹)\}$ , $g = \{(۴,-۶),(۰,۹),(۲,-۵)\}$

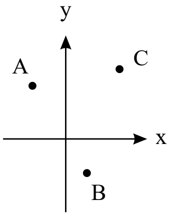
ب) $f = \{(۴,۷),(-۹,۲),(۵,۱۰)\}$ , $g = \{(-۹,۲),(۵,۱۰),(۴,۷)\}$

۴۲) اگر $۳a + ۲b = ۳\pi$ ثابت کنید

$$\tan(a + b)\tan(a - b) = -\cot\frac{a}{۲}\tan\frac{۵b}{۳}$$

۴۳) اگر $\tan\alpha = \frac{۳}{۲}$، مقدار عبارت $\frac{\sin(\alpha - \frac{\pi}{۲}) - \sin(۳\pi + \alpha)}{\cos(\frac{۹\pi}{۲} + \alpha) + \cos(\alpha - ۷\pi)}$ را بیابید.

۴۴) نمودار سه تابع متفاوت رسم کنید که از سه نقطه $A$ ، $B$ ، $C$ بگذرند.




۴۵) در مثلث $ABC$، $\hat{A} = ۹۰^\circ$ و اندازهٔ $C$ بر حسب درجه $\frac{۴۵}{\pi}$ برابر اندازهٔ $B$ بر حسب رادیان است، اندازهٔ $\hat{B}$ و $\hat{C}$ را بر حسب رادیان بیابید.

۴۶) تابع معکوس تابع زیر را در صورت وجود بیابید.

$$f(x) = \frac{۳^x - ۱}{۳^x + ۲}$$

۴۷) توابع $f(x) = \begin{cases} ۵x - ۷ & x \geq ۱ \\ -x - ۱ & x < ۱ \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} -\frac{۱}{۲}x - ۲ & x \geq -۲ \\ -۱ & x < -۲ \end{cases}$ مفروضند. حاصل عبارات زیر را بیابید.

الف) $(f+g)(-۴)$ ب) $(f-۲g)(۳)$ ج) $(\frac{f+۳}{g})(۰)$ د) $(f \times g - ۵)(\frac{۱}{۳})$

۴۸) نقطه‌ای روی نیمساز ربع اول و سوم بیابید که فاصله‌اش تا خط $۳x + ۴y - ۱ = ۰$ برابر با ۴ باشد.

۴۹) اگر $A(۲,۲)$، $B(۴,۴)$، $C(-۲,۶)$ سه رأس یک مثلث باشند:

الف) نشان دهید مثلث $ABC$ قائم‌الزاویه است.

ب) مساحت مثلث را بیابید.

ج) معادلهٔ میانهٔ $BM$ را بیابید.

۵۰) نامعادلهٔ مقابل را حل کنید.

$$|x^۲ - ۹| + ۹ > x^۲$$

۵۱) معادله مقابل را حل کنید.

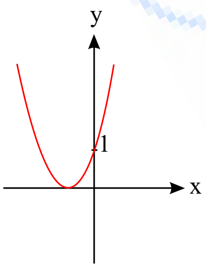
$$x^۲ - ۴x + \frac{۱۰}{x^۲ - ۴x + ۵} = ۲$$

۵۲) پدربزرگ برای اهدا به مهدکودک چند اسباب‌بازی یکسان، مجموعاً به قیمت ۱۲۰ هزار تومان خرید. اگر فروشنده برای هر اسباب‌بازی هزار تومان به پدربزرگ تخفیف می‌داد او می‌توانست با همان پول چهار اسباب‌بازی دیگر هم بخرد، قیمت هر اسباب‌بازی قبل از تخفیف چقدر بوده است؟

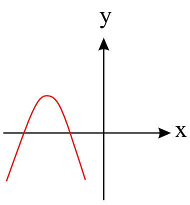
۵۳) معادلهٔ مقابل را به روش هندسی حل کنید.

$$۱ - x^۲ = |x|$$

۵۴) اگر نمودار مقابل مربوط به تابع $f(x) = x^۲ + mx + c$ باشد، $m$ را بیابید.




۵۵) در شکل زیر سهمی به معادلهٔ $p(x) = ax^۲ + bx + c$ داده شده است. علامت ضرایب $a$ و $b$ و $c$ و تعداد جواب‌های معادلهٔ $ax^۲ + bx + c = ۰$ را تعیین کنید.

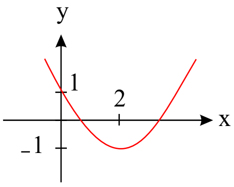



۵۶) $\alpha$ زاویه‌ای حاده و $\beta$ زاویه‌ای منفرجه است و $\sin\alpha = \frac{۳}{۵}$ و $\cos\beta = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ مقدار $\cos(\alpha - \beta)$ را محاسبه کنید.

۵۷) نمودار تابع زیر را رسم کنید و به کمک آن برد تابع را مشخص کنید.

$$f(x)=\begin{cases} x^۲+۱ & x<۰ \\ ۲ & ۰\le x\le ۲ \\ x-۱ & ۲<x \end{cases}$$

۵۸) در شکل زیر نمودار سهمی به معادله $p(x)=ax^۲+bx+c$ داده شده است، ضرایب $a, b, c$ را تعیین کنید.




۵۹) پیوستگی تابع زیر را در $x=۱$ بررسی کنید.

$$f(x)=\begin{cases} ۴-۳x & x\le ۱ \\ ۲x^۲+۱ & x>۱ \end{cases}$$

۶۰) پیوستگی تابع زیر را در نقطه‌ی $a=۱$ بررسی کنید.

$$f(x)=\begin{cases} \frac{x^۲-۱}{x-۱} & x\neq ۱ \\ ۱ & x=۱ \end{cases}$$

۶۱) ضابطه‌ی وارون تابع $f(x)=\sqrt{۲x+۳}$ را به دست آورید.

۶۲) معکوس پذیری $f(x)=\sqrt{۱-\sqrt{x^۳-۱}}$ را تحقیق کنید و در صورت معکوس پذیری ضابطه‌ی تابع معکوس را بیابید.

۶۳) در مورد وارون پذیری تابع $f(x)=\begin{cases} x^۲+۲ & x\le -۱ \\ x^۲ & -۱<x<۱ \\ x+۱ & ۱\le x \end{cases}$ تحقیق کنید.

۶۴) دو تابع حقیقی $g, f$ با ضابطه های $f(x)=\dfrac{۱}{\sqrt{x-۲}}$ و $g(x)=\dfrac{۱}{x-۱}$ تعریف شده اند، دامنه $fog$ و ضابطه $gof$ را در صورت وجود بنویسید.

۶۵) در معادله‌ی $۲x^۲-۸x+m=۰$ اگر یکی از جواب‌ها دو واحد بیشتر از جواب دیگر باشد، $m$ و هر دو جواب را پیدا کنید.

۶۶) اگر $\alpha$ و $\beta$ ریشه‌های معادله‌ی $x^۲-۳mx+۴=۰$ باشند، $m$ را چنان تعیین کنید که داشته باشیم:

$$\alpha\beta^۲+۴=۰$$

۶۷) معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$\left|۲x^۲-۱\right|+۲x^۲=۱$$

۶۸) اگر $\alpha$ و $\beta$ ریشه‌های معادله درجه‌ی دوم $x^۲+x-۱=۰$ باشند، حاصل عبارت $\dfrac{\alpha^۳}{(\beta+۱)^۳}+\dfrac{\beta^۵}{(\alpha+۱)^۵}$ را به دست آورید.

۶۹) منحنی تابع $f(x)=ax^۳+b$ منحنی معکوس‌اش را در نقطه‌ی $A\begin{vmatrix} ۱ \\ ۰ \end{vmatrix}$ قطع کرده است $۲a+b$ را به دست آورید.

۷۰) اگر $f(x)=\begin{cases} x^۲+۴ & x>۰ \\ ۵ & x\le ۰ \end{cases}$ آن‌گاه حاصل $f\left(-f(x)\right)$ را به دست آورید.

۷۱) اگر $f(x)=۲x+۳$ و $g(x)=x-۴$ باشد آن‌گاه مقدار $\dfrac{fog(۲)}{gof(-۱)}$ را به دست آورید.

۷۲) تابع $f(x)=x^۲-۲x$ را روی دامنه $[۱\ ,\ +\infty)$ در نظر بگیرید:

الف) با رسم نمودار این تابع نشان دهید این تابع وارون‌پذیر است و برد آن را بدست آورید.

ب) با رسم نمودار تابع وارون، دامنه و برد تابع وارون را بدست آورید.

ج) ضابطه‌ی وارون را بنویسید.

۷۳) آیا عدد صحیحی وجود دارد که جمع آن با جذرش برابر ۶ باشد؟

۷۴) درستی تساوی زیر را اثبات کنید.

$$\cos ۳\alpha=۴\cos^۳\alpha-۳\cos\alpha$$

۷۵ ابتدا یک به یک بودن تابع $f$ با ضابطه‌ی زیر را بررسی کنید. سپس در صورت وجود تابع معکوس $f$ را بنویسید.

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & x<0 \\ x^2+1 & x\geq 0 \end{cases}$$

۷۶ اگر $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2-|x-1|}}$ , $g(x)=|x-1|$ مطلوب است دامنه‌ی توابع $f+g$ و $fog$ و ضابطه‌ی $gof$.

۷۷ ثابت کنید تابع $f(x)=\dfrac{x-1}{x}$ یک به یک است.

۷۸ مقدار عددی عبارات زیر را بیابید.

الف

$\tan 23^\circ+\tan 22^\circ+\tan 23^\circ \tan 22^\circ$

ب

$\tan 39^\circ+\tan 21^\circ+\sqrt{3}\tan 39^\circ \tan 21^\circ$

۷۹ نمودار تابع‌های زیر را در بازه $[0, 2\pi]$ رسم کنید.

الف

$y=\sin x-\dfrac{|\sin x|}{\sin x}$

ب

$y=\dfrac{2\,|\cos x|}{\cos x}+\cos x$

۸۰ نمودار توابع زیر را در یک دوره تناوب رسم کنید.

الف

$y=\sin(x-\dfrac{\pi}{3})+1$

ب

$y=2\cos(x-1)$

۸۱ برد توابع زیر را بیابید.

الف

$y=2\sin x+3$

ب

$y=-4\cos x+\dfrac{1}{2}$

۸۲ حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}-1}$

ب

$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{x+5}}-\sqrt{5}}{x^2-16}$

۸۳ حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$

**ب**

$$\lim_{x\to ۴} \frac{\sqrt{x}-۲}{x^۲-۱۶}$$

**۸۴** در توابع زیر مقدار $a$ را طوری تعیین کنید که هر تابع در نقطهٔ $x=۱$ پیوسته باشد

**الف**

$$f(x)=\begin{cases} ۲x-۱ & x<۱ \\ a & x=۱ \\ -x+۲ & x>۱ \end{cases}$$

**ب**

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{x^۲+x-۲}{x-۱} & x\neq ۱ \\ a & x=۱ \end{cases}$$

**پ**

$$h(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-۱}{x-۱} & ۰<x<۱ \\ [x]+a & x\geq ۱ \end{cases}$$

**ت**

$$k(x)=([x]-a)[x]$$

**۸۵** حاصل عبارات زیر را بیابید.

**الف**

$$\log_{\frac{۱}{۲}} ۱۶ - \log_{۱۶} ۳۲ + ۲\log_{\frac{۱}{۱۶}} \sqrt[۳]{۸}$$

**ب**

$$۲\log_{۲۷} \frac{۱}{۹} - \log_{۳} ۹\sqrt{۳} + \log_{\frac{۱}{۳}} \frac{۱}{۹\sqrt[۴]{۳}}$$

**۸۶** معادلات زیر را حل کنید.

**الف**

$$\log_{۲}^{x} \times \log_{۴}^{x} \times \log_{۸}^{x} \times \log_{۱۶}^{x} = \frac{۲}{۳}$$

**ب**

$$\frac{۱}{۱-۴\log x} + \frac{۴}{۲+\log x} = ۳$$

**۸۷** کدام‌یک از گزاره‌های زیر درست و کدام یک نادرست است؟

**الف** اگر $g(۴)=۷$ و $f(۷)=۵$ آنگاه $(fog)(۴)=۳۵$.

**ب** اگر $f(x)=x+۴$ و $g(x)=۳x$ آن‌گاه $(\dfrac{f}{g})(۲)=۱$

**پ** اگر $g(x)=۲x-۱$ و $f(x)=\sqrt{x}$ آنگاه $(fog)(۵)=g(۲)$

**ت** برای هر دو تابع $f$ و $g$ داریم: $fog=gof$

**ث** اگر $f(x)=x^۲-۴$ و $g(x)=\sqrt{x^۲-۴}$ آنگاه $(fog)(۵)=-۲۵$ و $(fog)(x)=-x^۲$

**ج** برای هر دو تابع $f$ و $g$ داریم: $fg=gf$

**۸۸** معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

الف

$$\log(\frac{۸x^۲+۵}{۲}) = ۲\log(۲x-۱)$$

ب

$$x^{\log_۳^۷} + ۷^{\log_۳^x} = ۹۸$$

۸۹ $a$ را طوری بیابید که $f(x) = \begin{cases} ax[\frac{۱}{x}] & x \geq \frac{۱}{۲} \\ \cos\frac{\pi x}{۲} & x < \frac{۱}{۲} \end{cases}$ در $x = \frac{۱}{۲}$ حد داشته باشد.

۹۰ دو تابع $f(x) = \begin{cases} x & x > ۱ \\ -x & x < ۱ \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} -x & x > ۱ \\ x & x < ۱ \end{cases}$ را در نظر بگیرید.

الف ضابطهٔ تابع $f+g$، $f \cdot g$ و $\frac{f}{g}$ را بیابید.

ب نمودار تابع $f$، $g$، $f+g$، $f \cdot g$ و $\frac{f}{g}$ را رسم کنید.

پ آیا حد توابع $f$ و $g$ در ۱ وجود دارند؟

ت آیا حد توابع $f+g$، $f \cdot g$، $\frac{f}{g}$ در ۱ وجود دارند؟

ث آیا می‌توان از قضیهٔ حد مجموع، حد ضرب و حد تقسیم در $x = ۱$ استفاده کرد؟ چرا؟

# پاسخنامه تشریحی

(۱)

$D_f : x \geq ۲ \quad , \quad D_g = \{۰, ۳, ۵\}$

$D_{fog} = \{x \in D_g | g(x) \in D_f\} = \{x = ۰, ۳, ۵ \mid g(x) \geq ۲\} = \{۰, ۳\}$

$fog(۰) = f(g(۰)) = f(۴) = \sqrt{۴ - ۲} = \sqrt{۲} \ , \ fog(۳) = f(g(۳)) = f(۲) = ۰$

$fog = \left\{(۰, \sqrt{۲}), (۳, ۰)\right\}$

$D_{gof} = \{x \in D_f | f(x) \in D_g\} = \{x \geq ۳ | f(x) = ۰, ۳, ۵\}$

$f(x) = ۰ \rightarrow \sqrt{x - ۲} = ۰ \rightarrow x = ۲ \rightarrow f(x) = ۳ \rightarrow \sqrt{x - ۲} = ۳ \rightarrow x = ۱۱$

$f(x) = ۵ \rightarrow \sqrt{x - ۲} = ۵ \rightarrow x = ۲۷ \rightarrow D_{gof} = \{۲, ۱۱, ۲۷\}$

$gof(۲) = g(f(۲)) = g(۰) = ۴ \ , \ gof(۱۱) = g(f(۱۱)) = g(۳) = ۲$

$gof(۲۷) = g(f(۲۷)) = g(۵) = -۹ \rightarrow gof = \{(۲, ۴), (۱۱, ۲), (۲۷, -۹)\}$

(۲) محدوده‌های دو تابع $f$ و $g$ را به صوت زیر یکسان می‌کنیم.

$$f(x) = \begin{cases} ۲x & x \geq ۳ \\ ۲x & ۱ < x < ۳ \\ x^۲ - ۱ & x \leq ۱ \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x - ۳ & x \geq ۳ \\ ۱ + x & ۱ < x < ۳ \\ ۱ + x & x \leq ۱ \end{cases}$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = \begin{cases} ۲x - (x - ۳) & x \geq ۳ \\ ۲x - (۱ + x) & ۱ < x < ۳ \\ x^۲ - ۱ - (۱ + x) & x \leq ۱ \end{cases}$$

$$(f - g)(x) = \begin{cases} x + ۳ & , \ x \geq ۳ \\ x - ۱ & , \ ۱ < x < ۳ \\ x^۲ - x - ۲ & , \ x \leq ۱ \end{cases}$$

(۳)

$$f(x) = \frac{۷}{x} + ۳ = y \rightarrow \frac{۷}{x} = y - ۳ \rightarrow x = \frac{۷}{y - ۳} \rightarrow f^{-۱}(x) = \frac{۷}{x - ۳} = g(x)$$

$$g(x) = \frac{۷}{x - ۳} = y \rightarrow x - ۳ = \frac{۷}{y} \rightarrow x = \frac{۷}{y} + ۳ \rightarrow g^{-۱}(x) = \frac{۷}{x} + ۳ = f(x)$$

بله توابع $g$ و $f$ وارون یکدیگر هستند.

(۴)

$$f(-۱) = ۴ \rightarrow \frac{-m}{-۱ + ۲} = ۴ \rightarrow -m = ۴ \rightarrow m = -۴$$

$$f(x) = \frac{-۴x}{x + ۲} \rightarrow f(۲) = \frac{-۸}{۴} = -۲ \rightarrow f(a) = ۴f(۲)$$

$$\rightarrow \frac{-۴a}{a + ۲} = ۴ \times (-۲) \rightarrow \frac{-۴a}{a + ۲} = -۸ \rightarrow \frac{a}{a + ۲} = ۲ \rightarrow ۲a + ۴ = a \rightarrow \boxed{a = -۴}$$

(۵)

$$\frac{۲ \tan x}{۱ + \tan^۲ x} = \frac{۲\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)}{۱ + \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^۲} = \frac{\frac{۲ \sin x}{\cos x}}{\frac{\cos^۲ x + \sin^۲ x}{\cos^۲ x}} = \frac{۲ \sin x \cos^۲ x}{\cos x} = ۲ \sin x \cos x = \sin ۲x$$

(۶)

$$(\sin x + \cos x)^۲ = \sin^۲ x + \cos^۲ x + ۲ \sin x \cos x = ۱ + \sin ۲x$$

(۷)

$$f(x)=۴-\sqrt{x-۱}\ ,\ x-۱\geq ۰\Rightarrow x\geq ۱\Rightarrow D_f=[۱,+\infty)$$

$$\sqrt{x-۱}\geq ۰\Rightarrow -\sqrt{x-۱}\leq ۰\Rightarrow ۴-\sqrt{x-۱}\leq ۴\Rightarrow f(x)\leq ۴\Rightarrow R_f=(-\infty,۴]$$

$$(f^{-۱}of)(x)=x\ ,\ x\in D_f$$

$$(fof^{-۱})(x)=x\ ,\ x\in R_f$$

**با توجه به روابط بالا، تساوی $(f^{-۱}of)(x)=(fof^{-۱})(x)$ زمانی برقرار است که $x\in D_f\cap R_f$ باشد، پس داریم:**

$$D_f\cap R_f=[۱,+\infty)\cap(-\infty,۴]=[۱,۴]\Rightarrow \text{جواب}=[۱,۴]$$

(۸)

$$۴x-x^۲=\sqrt{۶x^۲-۲۴x+۷}\Rightarrow ۴x-x^۲=\sqrt{۶(x^۲-۴x)+۷}$$

با فرض $x^۲-۴x=t$ داریم:

$$\sqrt{۶t+۷}=-t\xrightarrow{\text{توان ۲}}۶t+۷=t^۲\Rightarrow t^۲-۶t-۷=۰$$

$$\Rightarrow(t-۷)(t+۱)=۰\Rightarrow\begin{cases}t=-۱\Rightarrow\sqrt{-۶+۷}=-(-۱)\Rightarrow ۱=۱\ \text{درست}\Rightarrow t=-۱\ \text{جواب}\\ t=۷\Rightarrow\sqrt{۴۲+۷}=-۷\Rightarrow ۷=-۷\ \text{غلط}\Rightarrow t=۷\ \text{غ ق ق}\end{cases}$$

در نتیجه:

$$x^۲-۴x=-۱\Rightarrow x^۲-۴x+۱=۰\Rightarrow\Delta=۱۶-۴=۱۲$$

$$x_{۱,۲}=\frac{۴\pm\sqrt{۱۲}}{۲}=\frac{۴\pm ۲\sqrt{۳}}{۲}=۲\pm\sqrt{۳}$$

(۹)

$$x_۱+x_۲=-\frac{b}{a}\ ,\ x_۲=kx_۱\Rightarrow x_۱+kx_۱=-\frac{b}{a}\Rightarrow(۱+k)x_۱=-\frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow x_۱=-\frac{b}{a(k+۱)}\Rightarrow x_۲=\frac{-kb}{a(k+۱)}\Rightarrow x_۱x_۲=\frac{c}{a}$$

$$\Rightarrow\frac{kb^۲}{a^۲(k+۱)^۲}=\frac{c}{a}\Rightarrow akb^۲=a^۲c(k+۱)^۲\Rightarrow kb^۲=a\cdot c(k+۱)^۲\Rightarrow\frac{(k+۱)^۲}{k}=\frac{b^۲}{a\cdot c}$$

(۱۰)

در این سوال باید طول کمان مقابل به زاویهٔ $۳۶^\circ$ را در دایره‌ای به شعاع $۶۳۲۰km$ بیابیم.

$$\frac{۳۶}{۱۸۰}=\frac{R}{\pi}\Rightarrow R=\frac{۳۶\pi}{۱۸۰}=\frac{\pi}{۵}\ \text{رادیان}\ \Rightarrow\alpha=\frac{\pi}{۵}\ \text{رادیان}\ ,r=۶۳۲۰km$$

$$\ell=r\cdot\alpha=۶۳۲۰\times\frac{\pi}{۵}=۱۲۶۴\pi=۱۲۶۴\times ۳{,}۱۴=۳۹۶۸{,}۹۶km$$

(۱۱)

$$\lim_{x\to ۲}\frac{ax-۲a}{\sqrt{۳x-۵}-۱}\times\frac{\sqrt{۳x-۵}+۱}{\sqrt{۳x-۵}+۱}=\lim_{x\to ۲}\frac{a(x-۲)(\sqrt{۳x-۵}+۱)}{۳x-۵-۱}$$

$$=\lim_{x\to ۲}\frac{a(x-۲)(\sqrt{۳x-۵}+۱)}{۳(x-۲)}=\lim_{x\to ۲}\frac{a}{۳}(\sqrt{۳x-۵}+۱)=\frac{۲a}{۳}=۳\Rightarrow a=\frac{۹}{۲}$$

(۱۲)

$$\ell=\frac{۱۰\pi}{۹}\quad r=۱۰\to\theta=\frac{\ell}{r}=\frac{\frac{۱۰\pi}{۹}}{۱۰}=\frac{\pi}{۹}\ \text{رادیان}$$

(۱۳)

الف) $\widehat{AB}$ طول کمان $=\frac{۴۰}{۳۶۰}(\text{محیط دایره})=\frac{۱}{۹}\times ۲\pi r=\frac{۲\pi\times ۱۰}{۹}=\frac{۲۰\pi}{۹}cm$

ب) $\frac{۵\pi}{۳}=\frac{\alpha}{۳۶۰}(\text{محیط دایره})\Rightarrow\frac{۵\pi}{۳}=\frac{\alpha}{۳۶۰}\times ۲\pi\times ۱۰\Rightarrow\frac{۵\pi}{۳}=\frac{۲۰\pi\alpha}{۳۶۰}$

$$\Rightarrow \frac{5\pi}{3} = \frac{\pi\alpha}{18} \Rightarrow \frac{5}{3} = \frac{\alpha}{18} \Rightarrow \alpha = 30^\circ$$

۱۴

$$S_m = S_n \to \frac{m}{2}(2a_1 + (m-1)d) = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

$$\xrightarrow{\times 2} 2ma_1 + (m^2 - m)d = 2na_1 + (n^2 - n)d \Rightarrow 2ma_1 + (m^2 - m)d - 2na_1 - (n^2 - n)d = 0$$

$$\Rightarrow (m-n)2a_1 + d\left[m^2 - m - n^2 + n\right] = 0 \Rightarrow (m-n)2a_1 + d\left[m^2 - n^2 - m + n\right] = 0$$

$$\Rightarrow (m-n)2a_1 + d\left[(m-n)(m+n) - (m-n)\right] = 0$$

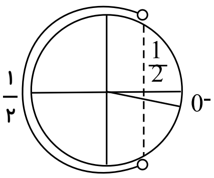
$$\Rightarrow (m-n)2a_1 + d(m-n)(m+n-1) = 0 \Rightarrow (m-n)\left[2a_1 + (m+n-1)d\right] = 0$$

$$m \neq n \to 2a_1 + (m+n-1)\,d = 0 \qquad (1)$$

$$S_{m+n} = \left(\frac{m+n}{2}\right)\left[2a_1 + (m+n-1)d\right] \overset{(1)}{=\!=} \left(\frac{m+n}{2}\right) \times 0 = 0$$

۱۵

$$1 - 2\cos 2x > 0 \Rightarrow \cos 2x < \frac{1}{2}$$

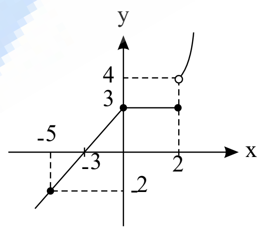



با توجه به دایره مثلثاتی تابع در همسایگی صفر تعریف نشده است یعنی زمانی که $x \to 0^-$ داخل رادیکال منفی می‌شود و حد موجود نیست.

۱۶

$$f(-5) = -2 \quad D_f = R \qquad f(2) = 3 \qquad \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x+3 & x<0 \\ 3 & 0 \le x \le 2 \\ x^2 & x > 2 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} -3 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} -5 \\ -2 \end{vmatrix} \Rightarrow m = \frac{-2-0}{-5+3} = 1 \Rightarrow \begin{matrix} y - 0 = 1(x+3) \\ y = x+3 \end{matrix}$$




۱۷

$$f(x) = |x+1| + |x-1| \qquad \begin{matrix} x+1 = 0 & \Rightarrow & x = -1 \\ x-1 = 0 & \Rightarrow & x = +1 \end{matrix}$$

| $x$ | | $-1$ | | $+1$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x+1$ | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ |
| $x-1$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ |

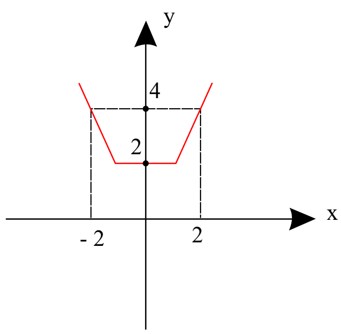
$$f(x) = \begin{cases} -x-1-x+1 & x<-1 \\ x+1-x+1 & -1 \le x \le 1 \\ x+1+x-1 & x>1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} -2x & x<-1 \\ 2 & -1 \le x \le 1 \\ 2x & x>1 \end{cases}$$

| $x$ | $-1$ | $-2$ |
|---|---|---|
| $y$ | $2$ | $4$ |

| $x$ | $-1$ | $1$ |
|---|---|---|
| $y$ | $2$ | $2$ |

| $x$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|
| $y$ | $2$ | $4$ |

$$R_f = [2, +\infty)$$




۱۸

$$|2x| < |x-1| + |x+1| \Rightarrow a = x-1, b = x+1 \Rightarrow a+b = 2x$$

$$\Rightarrow |a+b| < |a| + |b| \Rightarrow a \cdot b < 0 \Rightarrow (x-1)(x+1) < 0 \Rightarrow x^2 - 1 < 0$$

$$x^2 < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$$

**نکته:** نامساوی $|a+b| < |a| + |b|$ زمانی برقرار است که $ab < 0$ باشد.

۱۹

$$y=\frac{۳}{۵+۲^x}\Rightarrow ۵+۲^x=\frac{۳}{y}\Rightarrow ۲^x=\frac{۳}{y}-۵\Rightarrow ۲^x=\frac{۳-۵y}{y}$$

می‌دانیم $۲^x>۰$، پس داریم:

$$\frac{۳-۵y}{y}>۰\Rightarrow \begin{array}{c|ccccccc} y & -\infty & & ۰ & & \frac{۳}{۵} & & +\infty \\ \hline \frac{۳-۵y}{y} & & - & \text{ت.ن} & + & ۰ & - & \end{array}\Rightarrow ۰<y<\frac{۳}{۵}$$

پس برد تابع بازهٔ $R_f=(۰,\frac{۳}{۵})$ است.

۲۰

$$f=\{(-۲,۲),(-۱,۱),(۰,۴),(۵,۰),(۱,-۱)\}$$

$$D_f=\{-۲,-۱,۰,۵,۱\}$$

$$g(x)=\sqrt{۱-x^۲}\Rightarrow ۱-x^۲\geq ۰\Rightarrow x^۲\leq ۱\Rightarrow -۱\leq x\leq ۱\Rightarrow D_g=[-۱,۱]$$

الف)

$$D_f\cap D_g=\{-۱,۰,۱\}\ ,\ g(-۱)=۰\ ,\ g(۰)=۱\ ,\ g(۱)=۰$$

$$f-g+۲=\{(-۱,۱-۰+۲),(۰,۴-۱+۲),(۱,-۱-۰+۲)\}=\{(-۱,۳),(۰,۵),(۱,۱)\}$$

ب)

$$D_{gof}=\{x\in D_f|f(x)\in D_g\}=\{x\in\{-۲,-۱,۰,۵,۱\}|f(x)\in[-۱,۱]\}$$

$$D_{gof}=\{-۱,۵,۱\}$$

$$(gof)(-۱)=g(f(-۱))=g(۱)=۰\ ,\ (gof)(۵)=g(f(۵))=g(۰)=۱$$

$$(gof)(۱)=g(f(۱))=g(-۱)=۰$$

در نتیجه:

$$gof=\{(-۱,۰),(۵,۱),(۱,۰)\}$$

۲۱ می‌دانیم $x^۲=|x|^۲$، پس داریم:

$$y=|x^۲-۲|x||=||x|^۲-۲|x||$$

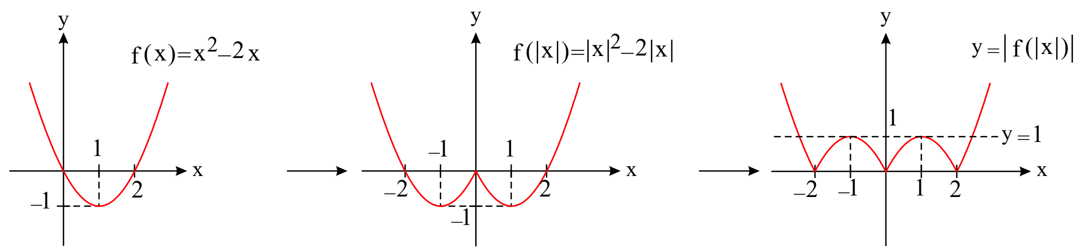
با فرض $f(x)=x^۲-۲x$ داریم، $f(|x|)=|x|^۲-۲|x|$، پس:

$$y=||x|^۲-۲|x||=|f(|x|)|$$

بنابراین ابتدا $f(x)=x^۲-۲x$ را رسم می‌کنیم.

$$\text{رأس}\ x=-\frac{b}{۲a}=-\frac{-۲}{۲}=۱\Rightarrow \text{رأس}\ y=f(۱)=۱-۲=-۱$$

$$f(x)=۰\Rightarrow x^۲-۲x=۰\Rightarrow x=۰\ \ ,\ \ x=۲$$




خط $y=۱$ در ۴ نقطه با تابع $y=|x^۲-۲|x||$ تلاقی دارد. در نقاط $x=\pm ۱$ بر این تابع مماس است.

۲۲

$$x^۲-۵x-۳=۰\xrightarrow{x=\beta}\beta^۲-۵\beta-۳=۰\Rightarrow \beta(\beta-۵)=۳$$

$\alpha \cdot \beta = \frac{c}{a} = -۳$ : ضرب ریشه‌ها

در نتیجه:

$$\frac{\alpha}{\beta - ۵} = \frac{\alpha\beta}{\beta(\beta-۵)} = \frac{-۳}{۳} = -۱$$

۲۳ الف)

$$y = ۳x + ۲ \Rightarrow \lim_{x\to ۱}(۳x+۲) = ۳ + ۲ = ۵$$

$$y = x^۲ - ۱ \Rightarrow \lim_{x\to ۱}(x^۲ - ۱) = ۱ - ۱ = ۰$$

$$y = [x] - ۱ \Rightarrow \begin{cases} L^+ = \lim_{x\to ۱^+}\ [x] - ۱ = ۱ - ۱ = ۰ \\ L^- = \lim_{x \to ۱^-}\ [x] - ۱ = ۰ - ۱ = -۱ \end{cases} \Rightarrow \text{حد ندارد}$$

$$y = \begin{cases} -۲ & x < ۱ \\ ۲ & x > ۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L^+ = \lim_{x\to ۱^+}\ y = ۲ \\ L^- = \lim_{x\to ۱^-}\ y = -۲ \end{cases} \Rightarrow \text{حد ندارد}$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| هر سه تابع $f$ و $g$ و $f+g$ در ۱ حد دارند. | $f(x) = ۳x + ۲$ | $g(x) = x^۲ - ۱$ | $f(x) + g(x) = x^۲ + ۳x + ۱$ |
| تابع $f \cdot g$ در ۱ حد دارد، اما تابع $f$ در ۱ حد ندارد. | $f(x) = [x] - ۱$ | $g(x) = x^۲ - ۱$ | $f(x)\cdot g(x) = (x^۲ - ۱)([x] - ۱)$ |
| توابع $f$ و $g$ در ۱حد راست دارند اما تابع $\frac{f}{g}$ در ۱ حد راست ندارد. | $f(x) = ۳x + ۲$ | $g(x) = [x] - ۱$ | $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{۳x+۲}{[x]-۱}$ |
| تابع $f^۲$ در ۱ حد دارد اما تابع $f$ در ۱ حد ندارد. | $f(x) = \begin{cases} -۲ & x < ۱ \\ ۲ & x > ۱ \end{cases}$ | | $f^۲(x) = ۴, x \neq ۱$ |
| تابع $f$ در ۱ حد دارد اما تابع $\sqrt{f}$ در ۱ حد ندارد. | $f(x) = x^۲ - ۱$ | | $\sqrt{f(x)} = \sqrt{x^۲ - ۱}$ |

۲۴ پاسخ: مورد اول ← تابع (ج)

مورد دوم ← تابع (الف)

مورد سوم ← توابع (پ)، (ت) و (ث)

مورد چهارم ← تابع (ب)

مورد پنجم ← تابع (ج)

مورد ششم ← توابع (ت)، (ث)

۲۵ الف) با توجه به شکل $\alpha$ و $\theta$ متمم هستند یعنی:

$$\alpha + \theta = \frac{\pi}{۲} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{۲} - \alpha$$

$$I = k\sin(\frac{\pi}{۲} - \alpha) = k \sin\theta$$

ب)

$$\theta = ۰ \to I = k\sin ۰ = k \times ۰ = ۰ \quad , \quad \theta = \frac{\pi}{۶} \to I = k \sin\frac{\pi}{۶} = \frac{k}{۲}$$

$$\theta = \frac{\pi}{۳} \to I = k\sin\frac{\pi}{۳} = \frac{k\sqrt{۳}}{۲}$$

پ) بیشترین مقدار $I$ زمانی است که $\sin\theta$ برابر یک باشد یعنی:

$$\sin\theta = ۱ \Rightarrow I_{man} = k \quad , \quad \sin\theta = ۱ \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{۲}$$

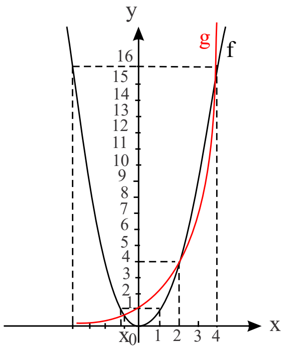
۲۶

نمودار $f$ بالاتر از $g$ قرار دارد. $x < x_۰ \Rightarrow$

نمودار $g$ بالاتر از $f$ قرار دارد. $x_۰ < x < ۲ \Rightarrow$

نمودار $f$ بالاتر از $g$ قرار دارد. $۲ < x < ۴ \Rightarrow$

نمودار $g$ بالاتر از $f$ قرار دارد. $x > ۴ \Rightarrow$

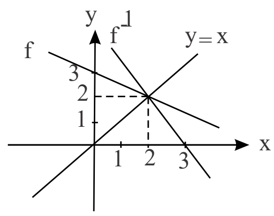



۲۷

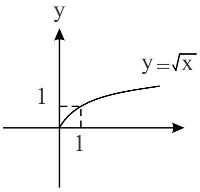
$$f(x)=-\frac{۱}{۲}x+۳\Rightarrow\left|\begin{array}{l}x=۰\\ y=۳\end{array}\right.\quad\left|\begin{array}{l}x=۲\\ y=۲\end{array}\right.$$

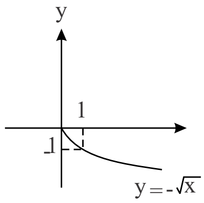
$$f(x)=-\frac{۱}{۲}x+۳\Rightarrow-\frac{۱}{۲}x=۳-y$$

$$x=۲y-۶\Rightarrow y=f^{-۱}(x)=۲x-۶$$




**۲۸** برای رسم $y=-\sqrt{x}$ باید نمودار $y=\sqrt{x}$ را نسبت به محور $x$ها قرینه کنیم.




**۲۹** تابع $f(x)=[x]$ در نقاط به طول صحیح ناپیوسته است.

الف) $f(x)=[x]\quad(-۲,۳)\Rightarrow$ عدد صحیح : $-۱,۰,۱,۲$

تابع در نقاط $x=-۱,۰,۱,۲$ ناپیوسته است.

ب) $f(x)=[x]\quad[-۳,۲)\Rightarrow$ عدد صحیح : $-۳,-۲,-۱,۰,۱$

پیوستگی راست تابع را در $x=-۳$ باید بررسی کنیم.

$$f(-۳)=-۳\ ,\ L^{+}=\lim_{x\to(-۳)^{+}}[x]=[-۳+\varepsilon]=-۳$$

تابع در $x=-۳$ پیوستگی راست دارد.

نقاط ناپیوستگی : $x=-۲,-۱,۰,۱$

**۳۰**

الف) $$\lim_{x\to-۱}\frac{x^{۳}+۱-۲x-۲}{x^{۲}-۱}=\lim_{x\to-۱}\frac{(x+۱)(x^{۲}-x+۱)-۲(x+۱)}{x^{۲}-۱}$$

$$=\lim_{x\to-۱}\frac{(x+۱)(x^{۲}-x+۱-۲)}{(x+۱)(x-۱)}=\lim_{x\to-۱}\frac{x^{۲}-x-۱}{x-۱}=\frac{۱+۱-۱}{-۱-۱}=\frac{-۱}{۲}$$

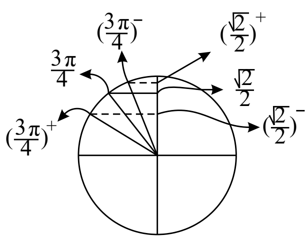
ب) $$\lim_{x\to۱}\frac{x^{۳}-۱+۲x-۲}{x^{۲}+x-۲}=\lim_{x\to۱}\frac{(x-۱)(x^{۲}+x+۱)+۲(x-۱)}{x^{۲}+x-۲}$$

$$=\lim_{x\to۱}\frac{(x-۱)(x^{۲}+x+۱+۲)}{(x-۱)(x+۲)}=\lim_{x\to۱}\frac{x^{۲}+x+۳}{x+۲}=\frac{۵}{۳}$$

**۳۱** با استفاده از فرمول $\sin x+\cos x=\sqrt{۲}\sin(x+\frac{\pi}{۴})$ داریم:

$$L^{-}=\lim_{x\to(\frac{\pi}{۲})^{-}}[\sqrt{۲}\sin(x+\frac{\pi}{۴})]=[\sqrt{۲}\sin(\frac{\pi}{۲}-\varepsilon+\frac{\pi}{۴})]=[\sqrt{۲}\sin(\frac{۳\pi}{۴}-\varepsilon)]$$

$$=[\sqrt{۲}\sin(\frac{۳\pi}{۴})^{-}]=[\sqrt{۲}(\frac{\sqrt{۲}}{۲}+\varepsilon)]=[۱+\sqrt{۲}\varepsilon]=۱$$




$$L^{+}=\lim_{x\to(\frac{\pi}{۲})^{+}}[\sqrt{۲}\sin(x+\frac{\pi}{۴})]=[\sqrt{۲}\sin(\frac{\pi}{۲}+\varepsilon+\frac{\pi}{۴})]=[\sqrt{۲}\sin(\frac{۳\pi}{۴}+\varepsilon)]$$

$=[\sqrt{۲}\sin(\frac{۳\pi}{۴})^{+}]=[\sqrt{۲}(\frac{\sqrt{۲}}{۲}-\varepsilon)]=[۱-\sqrt{۲}\varepsilon]=۰$ حد ندارد.

**۳۲**

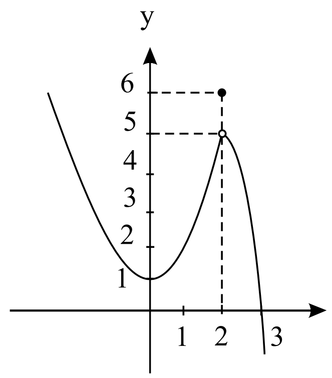
$x=۳$ یک همسایگی $\rightarrow(۲,۴)$

$x=۳$ یک همسایگی محذوف $\rightarrow(۱,۵)-\{۳\}=(۱,۳)\cup(۳,۵)$

$x=۳$ یک همسایگی راست $\rightarrow(۳,۴)$ $\qquad$ $x=۳$ یک همسایگی چپ $\rightarrow(۲,۳)$

**۳۳**

$$f(x)\begin{cases} x^{۲}+۱ & x<۲ \quad \begin{array}{|c} ۲\\ ۵\end{array} \\ ۶ & x=۲ \\ -x^{۲}+۹ & x>۲ \quad \begin{array}{|c} ۲\\ ۵\end{array} \quad \begin{array}{|c} ۳\\ ۰\end{array} \end{cases}$$




با نزدیک شدن $x$ به ۲ مقادیر تابع به ۵ نزدیک می‌شوند و داریم: $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)=۵$.

**۳۴** میدانیم: $\sin^{۶}x+\cos^{۶}x=۱-۳\sin^{۲}x\cos^{۲}x$ و $\sin x\cos x=\frac{۱}{۲}\sin ۲x$

$$A=\sin^{۶}\frac{\pi}{۱۲}+\cos^{۶}\frac{\pi}{۱۲}=۱-۳(\sin\frac{\pi}{۱۲}\cos\frac{\pi}{۱۲})^{۲}=۱-۳(\frac{۱}{۲}\sin ۲(\frac{\pi}{۱۲}))^{۲}$$

$$=۱-\frac{۳}{۴}\sin^{۲}\frac{\pi}{۶}=۱-\frac{۳}{۴}\times\frac{۱}{۴}=۱-\frac{۳}{۱۶}=\frac{۱۳}{۱۶}$$

**۳۵**

$$\frac{-\sin x}{۲+\sin x}=t\Rightarrow ۲t+t\sin x=-\sin x\Rightarrow(۱+t)\sin x=-۲t$$

$$\sin x=\frac{-۲t}{۱+t}\quad -۱\le\sin x\le ۱\Rightarrow|\sin x|\le ۱\Rightarrow\left|\frac{-۲t}{۱+t}\right|\le ۱$$

$$\xrightarrow{t\neq -۱}|۲t|\le|۱+t|\Rightarrow(۲t)^{۲}\le(t+۱)^{۲}\Rightarrow(۲t)^{۲}-(t+۱)^{۲}\le ۰$$

$$\Rightarrow(۲t+t+۱)(۲t-t-۱)\le ۰\Rightarrow(۳t+۱)(t-۱)\le ۰$$

$$-\frac{۱}{۳}\le t\le ۱\Rightarrow t=[t]=-۱,۰,۱$$

برد تابع $R=\{-۱,۰,۱\}$

**۳۶**

$$y=\frac{\cos x-۱}{۲\cos x+۱}\Rightarrow\cos x-۱=۲y\cos x+y$$

$$\Rightarrow(۱-۲y)\cos x=y+۱\Rightarrow\cos x=\frac{y+۱}{۱-۲y}\quad,\quad -۱\le\cos x\le ۱$$

$$\Rightarrow|\cos x|\le ۱\Rightarrow\left|\frac{y+۱}{۱-۲y}\right|\le ۱\xrightarrow{y\neq\frac{۱}{۲}}|y+۱|\le|۱-۲y|$$

$$\Rightarrow y^{۲}+۲y+۱\le ۱-۴y+۴y^{۲}\Rightarrow ۳y^{۲}-۶y\ge ۰\Rightarrow ۳y(y-۲)\ge ۰$$

| 0 | | 2 | |
|---|---|---|---|
| + | - | | + |

$\Rightarrow y\le ۰$ یا $y\ge ۲\Rightarrow R_f=(-\infty,۰]\cup[۲,+\infty)$

**۳۷**

$$\frac{۲\sin(۵\pi-\frac{\pi}{۱۰})-\sin(\pi+\frac{۲\pi}{۵})+\sin(۴\pi-\frac{۲\pi}{۵})-۲\cos(\pi-\frac{۲\pi}{۵})}{\cos(\pi-\frac{۲\pi}{۵})+۲\cos(۳\pi-\frac{۲\pi}{۵})-\sin(۲\pi-\frac{\pi}{۱۰})}$$

$$=\frac{۲\sin\frac{\pi}{۱۰}+\sin\frac{۲\pi}{۵}-\sin\frac{۲\pi}{۵}+۲\cos\frac{۲\pi}{۵}}{-\cos\frac{۲\pi}{۵}-۲\cos\frac{۲\pi}{۵}+\sin\frac{\pi}{۱۰}}=\frac{۲\sin(\frac{\pi}{۱۰})+۲\cos(\frac{۴\pi}{۱۰})}{-۳\cos(\frac{۴\pi}{۱۰})+\sin(\frac{\pi}{۱۰})}$$

$$=\frac{۲\sin\frac{\pi}{۱۰}+۲\cos(\frac{\pi}{۲}-\frac{\pi}{۱۰})}{-۳\cos(\frac{\pi}{۲}-\frac{\pi}{۱۰})+\sin\frac{\pi}{۱۰}}=\frac{۲\sin\frac{\pi}{۱۰}+۲\sin\frac{\pi}{۱۰}}{-۳\sin\frac{\pi}{۱۰}+\sin\frac{\pi}{۱۰}}=\frac{۴\sin\frac{\pi}{۱۰}}{-۲\sin\frac{\pi}{۱۰}}=-۲$$

**۳۸**

$$\frac{\tan(۳\pi+\frac{\pi}{۲}+x)+\sin(\pi-x)+۳\cos(۵\pi+\frac{\pi}{۲}-x)-\cot(۸\pi-x)}{-\cot(۲\pi+\frac{\pi}{۲}-x)+\sin(۳\pi+\frac{\pi}{۲}+x)+۳\cos(۱۲\pi-x)-\tan(۷\pi-x)}$$

$$= \frac{\tan(\frac{\pi}{۲}+x)+\sin x-۳\cos(\frac{\pi}{۲}-x)-\cot(-x)}{-\cot(\frac{\pi}{۲}-x)-\sin(\frac{\pi}{۲}+x)+۳\cos(-x)-\tan(-x)}$$

$$= \frac{-\cot x+\sin x-۳\sin x+\cot x}{-\tan x-\cos x+۳\cos x+\tan x}=\frac{-۲\sin x}{۲\cos x}=-\tan x$$

۳۹

الف) $f(x)=\dfrac{۲x-۱۸}{x-۹}\ ,\ D_f=R-\{۹\}$

$g(x)=۲\ ,\ D_g=R \to D_f\neq D_g \to$ برابر نیستند $f\ ,g$

ب) $f(x)=\dfrac{۳x^۲+۶}{x^۲+۲}\ ,\ x^۲+۲=۰ \to$ ریشه ندارد $\to D_f=R$

$g(x)=۳ \to D_g=R \to D_f=D_g=R$

$f(x)=\dfrac{۳x^۲+۶}{x^۲+۲}=\dfrac{۳(x^۲+۲)}{x^۲+۲}=۳=g(x) \to$ برابرند. $g\ ,f$

ج) $f(x)=\sqrt{(x+۶)^۲} \to (x+۶)^۲\geq ۰ \to x\in R \to D_f=R$

$g(x)=|x+۶| \to D_g=R \to D_f=D_g=R$

$f(x)=\sqrt{(x+۶)^۲}=|x+۶|=g(x) \to$ برابرند. $g\ ,f$

۴۰

$$\frac{۲\sin(۴\pi+\frac{\pi}{۱۰})-\sin\frac{\pi}{۱۰}+\sin(۳\pi-\frac{\pi}{۱۰})-۲\sin(\pi+\frac{\pi}{۱۰})}{\cos\frac{\pi}{۱۰}\tan(\pi+\frac{\pi}{۱۰})+۲\cos(\frac{۴\pi}{۱۰})+\sin(۲\pi-\frac{\pi}{۱۰})}$$

$$=\frac{۲\sin(\frac{\pi}{۱۰})-\sin(\frac{\pi}{۱۰})+\sin(\frac{\pi}{۱۰})+۲\sin\frac{\pi}{۱۰}}{\cos\frac{\pi}{۱۰}\tan\frac{\pi}{۱۰}+۲\cos(\frac{\pi}{۲}-\frac{\pi}{۱۰})-\sin\frac{\pi}{۱۰}}=\frac{۴\sin\frac{\pi}{۱۰}}{\cos\frac{\pi}{۱۰}\times\frac{\sin\frac{\pi}{۱۰}}{\cos\frac{\pi}{۱۰}}+۲\sin\frac{\pi}{۱۰}-\sin\frac{\pi}{۱۰}}$$

$$=\frac{۴\sin\frac{\pi}{۱۰}}{\sin\frac{\pi}{۱۰}+\sin\frac{\pi}{۱۰}}=\frac{۴\sin\frac{\pi}{۱۰}}{۲\sin\frac{\pi}{۱۰}}=۲$$

۴۱

الف) $D_f=D_g=\{۲,۴,۰\}\ ,\ f(۲)=۵\ ,\ g(۲)=-۵ \to f(۲)\neq g(۲)$

$f$ و $g$ برابر نیستند.

ب) $D_f=D_g=\{۴,-۹,۵\}\ ,\ f(۴)=g(۴)=۷\ ,\ f(-۹)=g(-۹)=۲\ ,\ f(۵)=g(۵)=۱۰$

$g$ و $f$ برابر هستند.

۴۲

$۳a+۲b=۳\pi \Rightarrow ۳a-۳b+۵b=۳\pi \Rightarrow ۳(a-b)=۳\pi-۵b$

$\Rightarrow a-b=\pi-\dfrac{۵b}{۳} \Rightarrow \tan(a-b)=\tan(\pi-\dfrac{۵b}{۳})=-\tan\dfrac{۵b}{۳}$

$۳a+۲b=۳\pi \Rightarrow ۲a+۲b+a=۳\pi \Rightarrow ۲a+۲b=۳\pi-a$

$a+b=\dfrac{۳\pi}{۲}-\dfrac{a}{۲} \Rightarrow \tan(a+b)=\tan(\dfrac{۳\pi}{۲}-\dfrac{a}{۲})=\tan(\pi+\dfrac{\pi}{۲}-\dfrac{a}{۲})$

$\Rightarrow \tan(a+b)=\tan(\dfrac{\pi}{۲}-\dfrac{a}{۲})=\cot\dfrac{a}{۲}$

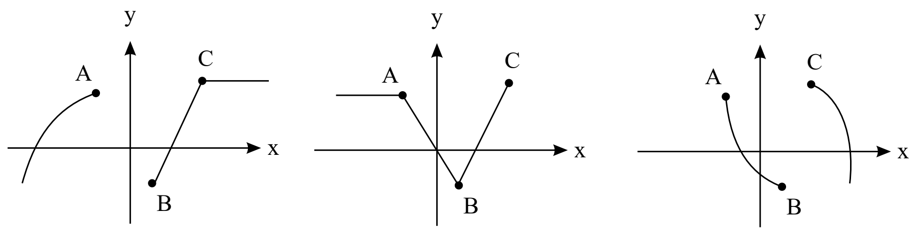
$\tan(a+b)\cdot\tan(a-b)=\cot\dfrac{a}{۲}\times(-\tan\dfrac{۵b}{۳})=-\cot\dfrac{a}{۲}\tan\dfrac{۵b}{۳}$

۴۳

$$\frac{-\sin(\frac{\pi}{۲}-\alpha)-\sin(۲\pi+\pi+\alpha)}{\cos(۴\pi+\frac{\pi}{۲}+\alpha)+\cos(۶\pi+\pi-\alpha)}=\frac{-\cos\alpha-\sin(\pi+\alpha)}{\cos(\frac{\pi}{۲}+\alpha)+\cos(\pi-\alpha)}$$

$$=\frac{-\cos\alpha+\sin\alpha}{-\sin\alpha-\cos\alpha}=\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha}-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{۱-\tan\alpha}{۱+\tan\alpha}=\frac{۱-\frac{۳}{۲}}{۱+\frac{۳}{۲}}=\frac{۲-۳}{۲+۳}=-\frac{۱}{۵}$$

۴۴




۴۵

$$C^\circ=\frac{۴۵}{\pi}\times B_{rad}\qquad \frac{C^\circ}{۱۸۰}=\frac{C_{rad}}{\pi}\Rightarrow C^\circ=\frac{۱۸۰C_{rad}}{\pi}$$

$$\Rightarrow\frac{۱۸۰C}{\pi}=\frac{۴۵B}{\pi}\Rightarrow ۱۸۰C=۴۵B\Rightarrow ۴C=B\,,\ B+C=\frac{\pi}{۲}$$

$$\Rightarrow ۴C+C=\frac{\pi}{۲}\Rightarrow C=\frac{\pi}{۱۰}\to B=۴C=۴\times\frac{\pi}{۱۰}=\frac{۲\pi}{۵}$$

۴۶

الف) $f(x_۱)=f(x_۲)\Rightarrow\frac{۳^{x_۱}-۱}{۳^{x_۱}+۲}=\frac{۳^{x_۲}-۱}{۳^{x_۲}+۲}$

$$\Rightarrow ۳^{x_۱+x_۲}+۲\times ۳^{x_۱}-۳^{x_۲}-۲=۳^{x_۱+x_۲}+۲\times ۳^{x_۲}-۳^{x_۱}-۲$$

$\Rightarrow ۳\times ۳^{x_۱}=۳\times ۳^{x_۲}\Rightarrow x_۱=x_۲\Rightarrow$ تابع یک به یک است.

$$y=\frac{۳^x-۱}{۳^x+۲}\Rightarrow ۳^x-۱=y\times ۳^x+۲y\Rightarrow ۳^x-y\times ۳^x=۲y+۱$$

$$(۱-y)\times ۳^x=۲y+۱\Rightarrow ۳^x=\frac{۲y+۱}{۱-y}\Rightarrow x=\log_۳\left(\frac{۲y+۱}{۱-y}\right)$$

$$y=f^{-۱}(x)=\log_۳\left(\frac{۲x+۱}{۱-x}\right)$$

۴۷

الف) $(f+g)(-۴)=f(-۴)+g(-۴)=۴-۱+(-۱)=۲$

ب) $(f-۲g)(۳)=f(۳)-۲g(۳)=۱۵-۷-۲(-\frac{۳}{۲}-۲)=۸+۳+۴=۱۵$

ج) $(\frac{f+۳}{g})(۰)=\frac{f(۰)+۳}{g(۰)}=\frac{-۱+۳}{-۲}=\frac{۲}{-۲}=-۱$

د) $(f\times g-۵)(\frac{۱}{۳})=f(\frac{۱}{۳})\cdot g(\frac{۱}{۳})-۵=(-\frac{۱}{۳}-۱)(-\frac{۱}{۶}-۲)-۵$

$$=(-\frac{۴}{۳})(-\frac{۱۳}{۶})-۵=\frac{۲۶}{۹}-۵=\frac{-۱۹}{۹}$$

۴۸

یادآوری: فاصله نقطه $A(x_\circ,y_\circ)$ از خط $ax+by+c=۰$ برابر است با:

$$d=\frac{|ax_\circ+by_\circ+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

$$y=x\to A(m,m)\Rightarrow\frac{|۳m+۴m-۱|}{\sqrt{۹+۱۶}}=۴$$

$$\Rightarrow |۷m-۱|=۲۰\to ۷m-۱=\pm ۲۰\to m=۳\ ,\ \ m=-\frac{۱۹}{۷}$$

$A(۳,۳)$ یا $A(-\frac{۱۹}{۷},-\frac{۱۹}{۷})$

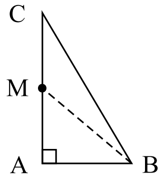
۴۹

الف)

$$AB=\sqrt{۴+۴}=۲\sqrt{۲}\ ,\ \ AC=\sqrt{۱۶+۱۶}=۴\sqrt{۲}$$

$$BC=\sqrt{۳۶+۴}=\sqrt{۴۰}\ ,\quad BC^۲=AB^۲+AC^۲\Rightarrow ۴۰=۸+۳۲$$

مثلث در رأس $A$ قائمه است.




ب)

$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲}AC \cdot AB = \frac{۱}{۲} \times ۴\sqrt{۲} \times ۲\sqrt{۲} = ۸$$

ج)

$$M = \frac{A+C}{۲} \Rightarrow M = (۰,۴)\ ,\ \ B(۴,۴) \to m_{BM} = \frac{۴-۴}{۴-۰} = ۰$$

خط $BM$ یک خط افقی با معادله‌ی $y=۴$ است.

(۵۰)

$$\left|x^{۲}-۹\right| + ۹ > x^{۲} \Rightarrow \left|x^{۲}-۹\right| > x^{۲}-۹$$

نکته: نامساوی $|A| > A$ فقط زمانی صحیح است که $A < ۰$ باشد.

$$\Rightarrow x^{۲} - ۹ < ۰ \Rightarrow x^{۲} < ۹ \Rightarrow |x| < ۳ \Rightarrow -۳ < x < ۳$$

(۵۱)

$$x^{۲} - ۴x = t \to t + \frac{۱۰}{t+۵} = ۲ \xrightarrow{\times(t+۵)}$$

$$t(t+۵) + ۱۰ = ۲(t+۵) \to t^{۲} + ۵t + ۱۰ - ۲t - ۱۰ = ۰$$

$t^{۲} + ۳t = ۰ \to t(t+۳) = ۰ \to t = ۰\ ,\ t = -۳$ هر ۲ قابل قبول

$$t = ۰ \to x^{۲} - ۴x = ۰ \to x = ۰\ , x = ۴$$

$$t = -۳ \to x^{۲} - ۴x = -۳ \to x^{۲} - ۴x + ۳ = ۰ \to x = ۱\ \ , x = ۳$$

(۵۲)

قیمت اسباب‌بازی قبل از تخفیف $= x \to$ تعداد اسباب‌بازی $= \frac{۱۲۰}{x}$

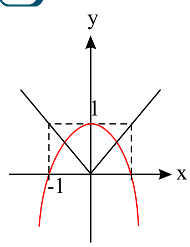
قیمت اسباب‌بازی بعد از تخفیف $= x - ۱ \to$ تعداد اسباب‌بازی $= \frac{۱۲۰}{x-۱}$

$$\frac{۱۲۰}{x-۱} - \frac{۱۲۰}{x} = ۴ \Rightarrow ۱۲۰\left(\frac{۱}{x-۱} - \frac{۱}{x}\right) = ۴ \Rightarrow \frac{x-x+۱}{x(x-۱)} = \frac{۴}{۱۲۰}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{x^{۲}-x} = \frac{۱}{۳۰} \to x^{۲} - x - ۳۰ = ۰ \to (x-۶)(x+۵) = ۰ \to x = ۶$$

قیمت هر اسباب‌بازی قبل از تخفیف ۶ هزار تومان بوده است.

(۵۳) $f(x) = ۱ - x^{۲}\quad ,\quad g(x) = |x|$




$\to$ معادله ۲ ریشه‌ی قرینه‌ی هم دارد

(۵۴)

$$x = ۰ \to f(۰) = c = ۱ \to \boxed{c = ۱} \to f(x) = x^{۲} + mx + ۱$$

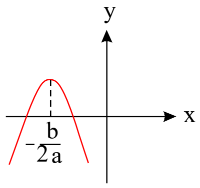
سهمی بر محور $x$ها مماس $\to \Delta = ۰ \to m^{۲} - ۴ = ۰ \to m = \pm ۲\ (۱)$

طول نقطه‌ی تماس $= x = -\frac{b}{۲a} = -\frac{m}{۲} < ۰ \Rightarrow m > ۰ \xrightarrow{(۱)} \boxed{m = ۲}, m = -۲$ غ ق ق

(۵۵) دهانه‌ی سهمی رو به پایین است بنابراین $a < ۰$ است. محل تلاقی نمودار تابع با محور $y$ها، $c$ است پس $c < ۰$ است.

طول رأس سهمی $x=-\frac{b}{2a}$، مقداری منفی است پس:

$$-\frac{b}{2a}<0 \xrightarrow{a<0} b<0$$




محل تلاقی نمودار تابع با محور $x$ها ریشه‌های معادله $ax^2+bx+c=0$ است. بنابراین معادله دو ریشه دارد.

۵۶

$$\sin\alpha=\frac{3}{5}\to\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=1-\frac{9}{25}=\frac{16}{25}\xrightarrow{\text{ربع اول}}\cos\alpha=\frac{4}{5}$$

$$\cos\beta=-\frac{\sqrt{2}}{2}\to\sin\beta=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

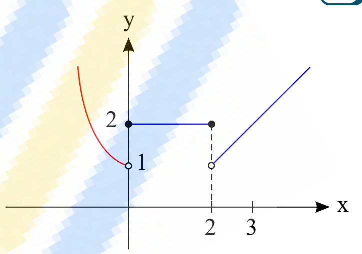
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=(\frac{4}{5})(-\frac{\sqrt{2}}{2})+(\frac{3}{5})(\frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}(-\frac{4}{5}+\frac{3}{5})=\frac{\sqrt{2}}{2}(-\frac{1}{5})=-\frac{\sqrt{2}}{10}$$

۵۷

$$f(x)=\begin{cases}x^2+1 & x<0\\ 2 & 0\le x\le 2\\ x-1 & 2<x\end{cases}$$

$$\text{برد}=(1,+\infty)$$



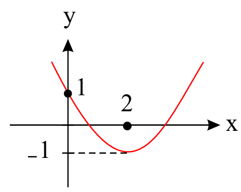

۵۸ در هر تابع درجه ۲، محل تلاقی نمودار با محور $y$ها $c$ است. بنابراین $c=1$ است.طول رأس سهمی $x=-\frac{b}{2a}$ می‌باشد.

$$-\frac{b}{2a}=2\to b=-4a$$

$$P(2)=-1\to 4a+2b+c=-1\xrightarrow[c=1]{b=-4a}4a-8a=-2$$

$$\to -4a=-2\to a=\frac{1}{2}$$

$$b=-4a\to b=-2$$




۵۹ تابع $f(x)$ را در نقطه $x=a$ پیوسته گوییم هرگاه $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=f(a)=\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$

$$f(x)=\begin{cases}4-3x & x\le 1\\ 2x^2+1 & x>1\end{cases}$$

$$f(1)=\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}4-3x=4-3=1$$

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}2x^2+1=3$$

تابع در $x=1$ فقط پیوستگی چپ دارد و در کل ناپیوسته است.

۶۰ تابع $f(x)$ را در نقطه‌ی $x=a$ پیوسته گوییم هرگاه $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=f(a)=\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-1}{x-1} & x\ne 1\\ 1 & x=1\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)}=2$$

$$f(1)=1$$

بنابراین تابع $f(x)$ در نقطه‌ی $x=1$ پیوسته نیست.

۶۱

$$y=\sqrt{2x+3}\xrightarrow{\text{توان دو}}y^2=2x+3\to y^2-3=2x\to x=\frac{y^2-3}{2}\to f^{-1}(x)=\frac{x^2-3}{2}$$

۶۲ تابعی معکوس پذیر است که یک به یک باشد.

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow\sqrt{1-\sqrt{x_1^3-1}}=\sqrt{1-\sqrt{x_2^3-1}}$$
$$\Rightarrow 1-\sqrt{x_1^3-1}=1-\sqrt{x_2^3-1}\rightarrow x_1^3-1=x_2^3-1\rightarrow x_1=x_2$$

تابع یک به یک است پس وارون پذیر است.

$$f(x)=\sqrt{1-\sqrt{x^3-1}}=y\Rightarrow 1-\sqrt{x^3-1}=y^2$$
$$\Rightarrow 1-y^2=\sqrt{x^3-1}\Rightarrow x^3-1=(1-y^2)^2\Rightarrow x=\sqrt[3]{(1-y^2)^2+1}\Rightarrow f^{-1}(x)=\sqrt[3]{(1-x^2)^2+1}$$

۶۳ یک به یک بودن را در تک‌تک بازه‌هایی که تابع در آن تعریف شده است، بررسی می‌کنیم.

یک به یک است $\quad x\le -1:\quad x_1^2+2=x_2^2+2\ \Rightarrow\ x_1^2=x_2^2\xrightarrow{x\le -1}x_1=x_2$

یک به یک نیست $\quad -1<x<1:\quad x_1^2=x_2^2\ \Rightarrow\ x_1=\pm x_2$

یک به یک است. $\quad 1\le x:\quad 1+x_1=1+x_2\ \Rightarrow\ x_1=x_2$

تابع در بازه‌ی دوم یک به یک نمی‌باشد پس در کل وارون‌پذیر نخواهد بود.

۶۴

$D_f: x>2 \qquad D_g: R-\{1\}$

$$D_{fog}=\{x\in D_g / g(x)\in D_f\}=\left\{x\neq 1/\frac{1}{x-1}>2\right\}$$
$$\rightarrow\frac{1}{x-1}>2\rightarrow\frac{1}{x-1}-2>0\rightarrow\frac{-2x+3}{x-1}>0\rightarrow x=\frac{3}{2}\ ,\ x=1$$

| | $-\infty$ | $1$ | $\frac{3}{2}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $-2x+3$ | $+$ | | $+\quad 0$ | $-$ |
| $x-1$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ |
| $p(x)$ | $-$ | ت ن | $+\quad 0$ | $-$ |

$$1<x<\frac{3}{2}\rightarrow D_{fog}=(1,\frac{3}{2})$$

$$(gof)(x)=\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{x-2}}-1}$$

۶۵

$$2x^2-8x+m=0\qquad \alpha+\beta=-\frac{b}{a}=4\qquad \alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{m}{2}$$
$$\alpha=\beta+2\Rightarrow\left.\begin{matrix}\alpha-\beta=2\\ \alpha+\beta=4\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{matrix}\alpha=3\\ \beta=1\end{matrix}\right.\Rightarrow\alpha\beta=3=\frac{m}{2}\Rightarrow m=6$$

۶۶

$$\alpha\beta^2+4=(\alpha\beta)\beta+4=4\beta+4=0\Rightarrow\quad\beta=-1$$
$$\alpha\beta=\frac{c}{a}=4$$

ریشه معادله است و در معادله صدق می کند $\beta=-1\quad\Rightarrow\quad 1+3m+4=0\quad\Rightarrow\quad m=\frac{-5}{3}$

۶۷ نکته: $|U|=-U\rightarrow U\le 0$

$|2x^2-1|=-(2x^2-1)\Rightarrow$ باید قدر مطلق منفی بیرون بیاید $\Rightarrow 2x^2-1\le 0$

$$2x^2\le 1$$
$$x^2\le\frac{1}{2}$$
$$\frac{-\sqrt{2}}{2}\le x\le\frac{+\sqrt{2}}{2}$$

۶۸

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-1\quad\Rightarrow\quad\left\{\begin{matrix}\alpha+1=-\beta\\ \beta+1=-\alpha\end{matrix}\right.$$
$$\frac{\beta^5}{(\alpha+1)^5}+\frac{\alpha^3}{(\beta+1)^3}=\frac{\beta^5}{(-\beta)^5}+\frac{\alpha^3}{(-\alpha)^3}=-1-1=-2$$

۶۹

$f(x) = ax^۳ + b$

$A\left|\begin{matrix} ۱ \\ ۰ \end{matrix}\right. \in f \Rightarrow f(۱) = a + b = ۰$

$A\left|\begin{matrix} ۱ \\ ۰ \end{matrix}\right. \in f^{-۱} \Rightarrow A'\left|\begin{matrix} ۰ \\ ۱ \end{matrix}\right. \in f \Rightarrow f(۰) = b = ۱ \Rightarrow a = -۱$

$۲a + b = -۱$

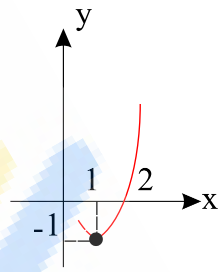
**۷۰** با توجه به ضابطه $f(x)$ :

$\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) > ۰ \Rightarrow -f(x) < ۰ \Rightarrow f(-f(x)) = ۵$

**۷۱**

$$\begin{cases} f\left(g(۲)\right) \xlongequal{g(۲)=-۲} f(-۲) = ۲(-۲) + ۳ = -۱ \\ g\left(f(-۱)\right) \xlongequal{f(-۱)=۱} g(۱) = ۱ - ۴ = -۳ \end{cases} \Rightarrow \frac{fog(۲)}{gof(-۱)} = \frac{-۱}{-۳} = \frac{۱}{۳}$$

**۷۲**



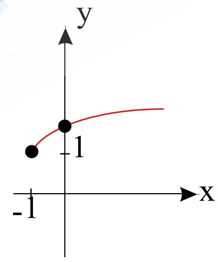
$$f(x) = x^۲ - ۲x \qquad x \geq ۱$$

$$S\left|\begin{matrix} x = \frac{۲}{۲} = ۱ \\ y = ۱ - ۲ = -۱ \end{matrix}\right.$$

وارون پذیر است چون هر خط به موازات محور $x$ ها نمودار را در یک نقطه قطع می کند.

$$D_f = [۱\,,\,+\infty) \qquad R_f = [-۱\,,\,+\infty)$$

ب) $D_{f^{-۱}} = [-۱\,,\,+\infty)$
$R_{f^{-۱}} = [۱\,,\,+\infty)$



$y = x^۲ - ۲x + ۱ - ۱ \Rightarrow y = (x - ۱)^۲ - ۱ \Rightarrow \sqrt{y + ۱} = |x - ۱| \Rightarrow \sqrt{y + ۱} = x - ۱$

$\sqrt{y + ۱} + ۱ = x \Rightarrow f^{-۱}(x) = \sqrt{x + ۱} + ۱$

**۷۳**

توجه کنیم که در تعیین دامنه‌ی معادلات اصم، دو طرف معادله باید مثبت باشد.

$x + \sqrt{x} = ۶ \Rightarrow \sqrt{x} = ۶ - x$

$D : x \geq ۰\,,\, ۶ - x \geq ۰ \Rightarrow x \in [۰\,,\,۶]$

$\xrightarrow{\text{توان ۲}} x = (۶ - x)^۲ \Rightarrow x^۲ - ۱۳x + ۳۶ = ۰ \Rightarrow (x - ۴)(x - ۹) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۴ \text{ ق ق} \\ x = ۹ \text{ غ ق ق} \end{cases}$

**۷۴**

$\cos ۳\alpha = \cos(۲\alpha + \alpha) = \cos ۲\alpha \cos \alpha - \sin ۲\alpha \sin \alpha$

$= (۲\cos^۲ \alpha - ۱) \cos \alpha - (۲ \sin \alpha \cdot \cos \alpha) \cdot \sin \alpha$

$= (۲\cos^۳ \alpha - \cos \alpha - ۲ \sin^۲ \alpha \cdot \cos \alpha$

$= ۲\cos^۳ \alpha - \cos \alpha - ۲(۱ - \cos^۲ \alpha) \cdot \cos \alpha$

$۲\cos^۳ \alpha - \cos \alpha - ۲ \cos \alpha + ۲\cos^۳ \alpha = ۴\cos^۳ \alpha - ۳ \cos \alpha$

**۷۵**

$$f(x) = \begin{cases} x + ۱ \;,\; x < ۰ \rightarrow f(x_۱) = f(x_۲) \Rightarrow x_۱ + ۱ = x_۲ + ۱ \Rightarrow x_۱ = x_۲ \\ x^۲ + ۱ \;,\; x \geq ۰ \rightarrow f(x_۱) = f(x_۲) \Rightarrow x_۱^۲ + ۱ = x_۲^۲ + ۱ \Rightarrow |x_۱| = |x_۲| \xrightarrow{x \geq ۰} x_۱ = x_۲ \end{cases}$$

$x < ۰ \rightarrow x + ۱ < ۱ \rightarrow y < ۱ \rightarrow R_{f_۱} = (-\infty, ۱)$

$x \geq to x^۲ \geq ۰ \rightarrow x^۲ + ۱ \geq ۱ \rightarrow y \geq ۱ \rightarrow R_{f_۲} = [۱, +\infty)$ $\rightarrow R_{f_۱} \cap R_{f_۲} = \varnothing \checkmark \rightarrow$ تابع یک به یک است

$y = x + ۱ \rightarrow x = y - ۱ \Rightarrow y = x - ۱$

$x < ۰ \rightarrow x + ۱ < ۱ \Rightarrow y < ۱ \Rightarrow D_{f_۱^{-۱}} = (-\infty, ۱)$

$$y=x^{۲}+۱ \to x^{۲}=y-۱ \Rightarrow |x|=\sqrt{y-۱} \xrightarrow{x\geq ۰} x=\sqrt{y-۱} \Rightarrow y=\sqrt{x-۱}$$

$$x\geq ۰ \Rightarrow x^{۲}\geq ۰ \Rightarrow x^{۲}+۱\geq ۱ \Rightarrow y\geq ۱ \Rightarrow D_{f_{۲}^{-۱}}=[۱,+\infty)$$

$$f^{-۱}(x)=\begin{cases} x-۱\ , & x<۱ \\ \sqrt{x-۱}\ , & x\geq ۱ \end{cases}$$

تذکر: برای توابع چند ضابطه‌ای تابعی یک به یک است که اولاً هر کدام از ظابطه‌ها به تهایی در محور خود یک به یک باشند ثانیاً اشتراک برد ظابطه‌ها سهمی باشد.

۷۶

$$f(x)=\frac{۱}{\sqrt{۲-|x-۱|}} \qquad g(x)=|x-۱| \qquad D_g=R$$

$$۲-|x-۱|>۰ \Rightarrow ۲>|x-۱| \Rightarrow -۲<x-۱<۲ \Rightarrow -۱<x<۳=D_f$$

$$D_{f+g}=D_f\cap D_g \Rightarrow -۱<x<۳\cap R \Rightarrow (-۱\,,\,۳)$$

$$fog(x)=\{x\,|\,x\in D_g\ ,\ g(x)\in D_f\}$$

$$=\{x|\,x\in R\ ,\ -۱<|x-۱|<۳\} \ \Rightarrow |x-۱|<۳ \Rightarrow -۳<x-۱<۳ \Rightarrow D_{fog}=(-۲,۴)$$

$$gof(x)=g(f(x))=\left|\frac{۱}{\sqrt{۲-|x-۱|}}-۱\right|$$

۷۷

$$f(x)=\frac{x-۱}{x}$$

$y_۱=y_۲ \Rightarrow x_۱=x_۲$ :برای یک به یک بودن باید

$$\frac{x_۱-۱}{x_۱}=\frac{x_۲-۱}{x_۲} \Rightarrow \cancel{x_۱x_۲}-x_۲=\cancel{x_۱x_۲}-x_۱ \Rightarrow -x_۲=-x_۱ \Rightarrow x_۱=x_۲$$

۷۸

**الف**

$$۲۳^\circ+۲۲^\circ=۴۵^\circ \to \tan(۲۳^\circ+۲۲^\circ)=\tan ۴۵^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{\tan ۲۳^\circ+\tan ۲۲^\circ}{۱-\tan ۲۳^\circ\times\tan ۲۲^\circ}=۱ \Rightarrow \tan ۲۳^\circ+\tan ۲۲^\circ=۱-\tan ۲۳^\circ\times\tan ۲۲^\circ$$

$$\Rightarrow \tan ۲۳^\circ+\tan ۲۲^\circ+\tan ۲۳^\circ\tan ۲۲^\circ=۱$$

**ب**

$$۳۹^\circ+۲۱^\circ=۶۰^\circ \Rightarrow \tan(۳۹^\circ+۲۱^\circ)=\tan ۶۰^\circ$$

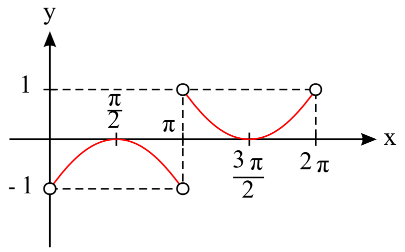
$$\Rightarrow \frac{\tan ۳۹^\circ+\tan ۲۱^\circ}{۱-\tan ۳۹^\circ\times\tan ۲۱^\circ}=\sqrt{۳} \Rightarrow \tan ۳۹^\circ+\tan ۲۱^\circ=\sqrt{۳}-\sqrt{۳}\tan ۳۹^\circ\times\tan ۲۱^\circ$$

$$\Rightarrow \tan ۳۹^\circ+\tan ۲۱^\circ+\sqrt{۳}\tan ۳۹^\circ\tan ۲۱^\circ=\sqrt{۳}$$

۷۹

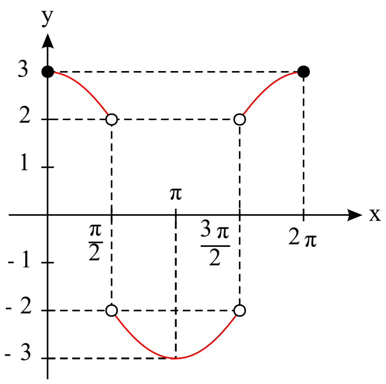
**الف**

$$y=\sin x-\frac{|\sin x|}{\sin x}=\begin{cases} \sin x-\frac{\sin x}{\sin x}=\sin x-۱\ ,\ \sin x>۰ \to ۰<x<\pi \\ \sin x-\frac{-\sin x}{\sin x}=\sin x+۱\ ,\ \sin x<۰ \to \pi<x<۲\pi \end{cases}$$



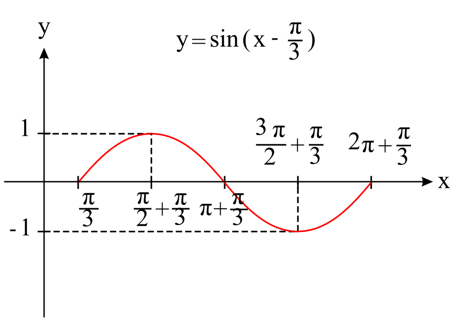

**ب**

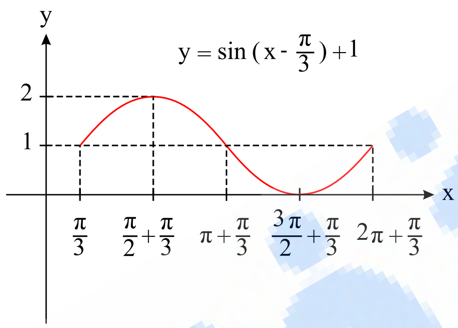
$$y=\frac{۲\,|\cos x|}{\cos x}+\cos x=\begin{cases} \frac{۲\cos x}{\cos x}+\cos x=\cos x+۲\ ,\ \cos x>۰ \Rightarrow ۰\leq x<\frac{\pi}{۲} \text{ یا } \frac{۳\pi}{۲}<x\leq ۲\pi \\ \frac{-۲\cos x}{\cos x}+\cos x=\cos x-۲\ ,\ \cos x<۰ \Rightarrow \frac{\pi}{۲}<x<\frac{۳\pi}{۲} \end{cases}$$



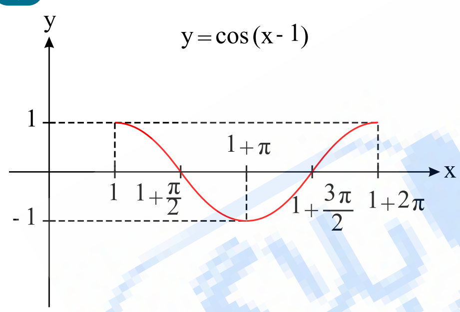

۸۰

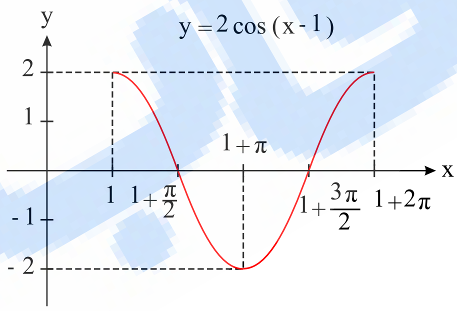
الف




ب




۸۱

الف

$-۱ \leq \sin x \leq ۱ \Rightarrow -۲ \leq ۲\sin x \leq ۲ \Rightarrow -۲+۳ \leq ۲\sin x + ۳ \leq ۲+۳$

$\Rightarrow ۱ \leq y \leq ۵ \Rightarrow$ برد تابع $= [۱,۵]$

ب

$-۱ \leq \cos x \leq ۱ \Rightarrow +۴ \geq -۴\cos x \geq -۴ \Rightarrow -۴+\frac{۱}{۲} \leq -۴\cos x + \frac{۱}{۲} \leq ۴+\frac{۱}{۲}$

$\Rightarrow -\frac{۷}{۲} \leq y \leq \frac{۹}{۲} \Rightarrow$ برد تابع $= \left[-\frac{۷}{۲}, \frac{۹}{۲}\right]$

۸۲

الف

$$\lim_{x\to ۱} \frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt[۳]{x}-۱} \times \frac{x+\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}} \times \frac{\sqrt[۳]{x^۲}+\sqrt[۳]{x}+۱}{\sqrt[۳]{x^۲}+\sqrt[۳]{x}+۱} = \lim_{x\to ۱} \frac{(x^۲-x)(\sqrt[۳]{x^۲}+\sqrt[۳]{x}+۱)}{(x-۱)(x+\sqrt{x})}$$

$$= \lim_{x\to ۱} \frac{x(x-۱)(\sqrt[۳]{x^۲}+\sqrt[۳]{x}+۱)}{(x-۱)(x+\sqrt{x})} = \lim_{x\to ۱} \frac{x(\sqrt[۳]{x^۲}+\sqrt[۳]{x}+۱)}{x+\sqrt{x}} = \frac{۱\times ۳}{۲} = \frac{۳}{۲}$$

ب

$$\lim_{x\to ۴}\frac{\sqrt{۲+\sqrt{x+۵}}-\sqrt{۵}}{x^۲-۱۶}\times\frac{\sqrt{۲+\sqrt{x+۵}}+\sqrt{۵}}{\sqrt{۲+\sqrt{x+۵}}+\sqrt{۵}}=\lim_{x\to ۴}\frac{۲+\sqrt{x+۵}-۵}{(x^۲-۱۶)(\underbrace{\sqrt{۲\sqrt{x+۵}}+\sqrt{۵}}_{۲\sqrt{۵}})}$$

$$=\lim_{x\to ۴}\frac{\sqrt{x+۵}-۳}{۲\sqrt{۵}(x^۲-۱۶)}\times\frac{\sqrt{x+۵}+۳}{\sqrt{x+۵}+۳}=\lim_{x\to ۴}\frac{x+۵-۹}{۲\sqrt{۵}(x-۴)(x+۴)(\sqrt{x+۵}+۳)}$$

$$=\lim_{x\to ۴}\frac{۱}{۲\sqrt{۵}(x+۴)(\sqrt{x+۵}+۳)}=\frac{۱}{۲\sqrt{۵}\times ۸\times ۶}=\frac{۱}{۹۶\sqrt{۵}}$$

۸۳

**الف**

$$\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt{x}-۱}{x^۲-۱}\times\frac{\sqrt{x}+۱}{\sqrt{x}+۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{x-۱}{(x-۱)(x+۱)(\sqrt{x}+۱)}=\lim_{x\to ۱}\frac{۱}{(x+۱)(\sqrt{x}+۱)}=\frac{۱}{۴}$$

**ب**

$$\lim_{x\to ۴}\frac{\sqrt{x}-۲}{x^۲-۱۶}\times\frac{\sqrt{x}+۲}{\sqrt{x}+۲}=\lim_{x\to ۴}\frac{x-۴}{(x-۴)(x+۴)(\sqrt{x}+۲)}=\lim_{x\to ۴}\frac{۱}{(x+۴)(\sqrt{x}+۲)}=\frac{۱}{۸\times ۴}=\frac{۱}{۳۲}$$

۸۴

**الف**

$$L^-=\lim_{x\to ۱^-}(۲x-۱)=۱\,,\ L^+=\lim_{x\to ۱^+}(-x+۲)=۱,\ f(۱)=a\Rightarrow \boxed{a=۱}$$

**ب**

$$\lim_{x\to ۱}g(x)=\lim_{x\to ۱}\frac{x^۲+x-۲}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{(x-۱)(x+۲)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}(x+۲)=۳,g(۱)=a\Rightarrow \boxed{a=۳}$$

**پ**

$$h(۱)=۱+a\,,\ L^+=\lim_{x\to ۱^+}[x]+a=۱+a$$

$$L^-=\lim_{x\to ۱^-}\frac{\sqrt{x}-۱}{x-۱}\times\frac{\sqrt{x}+۱}{\sqrt{x}+۱}=\lim_{x\to ۱^-}\frac{x-۱}{(x-۱)(\sqrt{x}+۱)}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow ۱+a=\frac{۱}{۲}\to \boxed{a=-\frac{۱}{۲}}$$

**ت**

$$k(۱)=(۱-a)\times ۱=۱-a\,,\ L^+=\lim_{x\to ۱^+}([x]-a)[x]=(۱-a)\times ۱=۱-a$$

$$L^-=\lim_{x\to ۱^-}([x]-a)[x]=(۰-a)\times ۰=۰\Rightarrow ۱-a=۰\Rightarrow \boxed{a=۱}$$

۸۵

**الف**

$$\log_{b^m}^{a^n}=\frac{n}{m}\log_b^a$$

$$\log_{۲^{-۱}}۲^۴-\log_{۲^۴}۲^۵+۲\log_{۲^{-۴}}۲=\frac{۴}{-۱}\log_۲^۲-\frac{۵}{۴}\log_۲^۲+۲\times\left(\frac{۱}{-۴}\right)\log_۲^۲$$

$$=-۴-\frac{۵}{۴}-\frac{۱}{۲}=\frac{-۱۶-۵-۲}{۴}=\frac{-۲۳}{۴}$$

**ب**

$$\log_{b^m}^{a^n}=\frac{n}{m}\log_b^a$$

$$۲\log_{۳^۳}۳^{-۲}-\log_۳(۳^۲\times ۳^{\frac{۱}{۲}})+\log_{۳^{-۱}}(۳^{-۲}\times ۳^{-\frac{۱}{۴}})$$

$$=۲(-۲)\times\frac{۱}{۳}\log_۳^۳-\log_۳ ۳^{\frac{۵}{۲}}+\log_{۳^{-۱}}۳^{-\frac{۹}{۴}}=-\frac{۴}{۳}-\frac{۵}{۲}\log_۳^۳+(-\tfrac{۹}{۴})(\frac{۱}{-۱})\log_۳^۳$$

$$=-\frac{۴}{۳}-\frac{۵}{۲}+\frac{۹}{۴}=\frac{-۱۶-۳۰+۲۷}{۱۲}=\frac{-۱۹}{۱۲}$$

۸۶

**الف**

$\log_{b^m}^{a^n} = \frac{n}{m}\log_b^a$

$\log_۲^x \times \log_{۲^۲}^x \times \log_{۲^۳}^x \times \log_{۲^۴}^x = \frac{۲}{۳} \Rightarrow \log_۲^x \times \frac{۱}{۲}\log_۲^x \times \frac{۱}{۳}\log_۲^x \times \frac{۱}{۴}\log_۲^x = \frac{۲}{۳}$

$\Rightarrow \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۳} \times \frac{۱}{۴}(\log_۲^x)^۴ = \frac{۲}{۳} \Rightarrow (\log_۲^x)^۴ = \frac{۲}{۳} \times ۲۴ = ۱۶ = ۲^۴$

$\log_۲^x = \pm ۲$ ↗ $\log_۲^x = ۲ \to x = ۲^۲ = ۴$ جواب

$\log_۲^x = \pm ۲$ ↘ $\log_۲^x = -۲ \to x = ۲^{-۲} = \frac{۱}{۴}$ جواب

**ب**

$\log_{b^m}^{a^n} = \frac{n}{m}\log_b^a$

$\log x = t \to \frac{۱}{۱-۴t} + \frac{۴}{۲+t} = ۳ \Rightarrow \frac{۲+t+۴-۱۶t}{(۱-۴t)(۲+t)} = ۳$

$۳(۲+t-۸t-۴t^۲) = ۶-۱۵t \Rightarrow ۶+۳t-۲۴t-۱۲t^۲ = ۶-۱۵t$

$۱۲t^۲+۶t = ۰ \Rightarrow t = ۰ \;,\; t = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow \log x = ۰ \to \boxed{x = ۱}$ جواب ، $\log x = -\frac{۱}{۲}$

$\Rightarrow x = ۱۰^{-\frac{۱}{۲}} \to \boxed{x = \frac{۱}{\sqrt{۱۰}}}$ جواب

**۸۷**

**الف** نادرست: $(fog)(۴) = f(g(۴)) = f(۷) = ۵$

**ب** درست $(\frac{f}{g})(۲) = \frac{f(۲)}{g(۲)} = \frac{۲+۴}{۳\times ۲} = \frac{۶}{۶} = ۱$

**پ** درست $(fog)(۵) = f(g(۵)) = f(۱۰-۱) = f(۹) = \sqrt{۹} = ۳ = g(۲)$

**ت** نادرست: ترکیب توابع خاصیت جابجایی ندارد یعنی: $fog \neq gof$

**ث** نادرست $(fog)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x^۲-۴}) = (\sqrt{x^۲-۴})^۲ - ۴ = x^۲ - ۸$

**ج** درست $D_{f\cdot g} = D_{g\cdot f} = D_f \cap D_g, (f\cdot g)(x) = f(x)g(x) = g(x)f(x) = (g\cdot f)(x)$

**۸۸**

**الف**

$\log_{b^m}^{a^n} = \frac{n}{m}\log_b^a \;,\; a^{\log_c^b} = b^{\log_c^a}$

$\log(\frac{۸x^۲+۵}{۲}) = \log(۲x-۱)^۲ \to \frac{۸x^۲+۵}{۲} = ۴x^۲-۴x+۱$

$\Rightarrow ۸x^۲+۵ = ۸x^۲-۸x+۲ \Rightarrow ۸x = -۳ \to x = -\frac{۳}{۸}$ غ ق ق

معادله جواب ندارد.

**ب**

$x^{\log_۳^۷} + ۷^{\log_۳^x} = ۹۸ \Rightarrow ۷^{\log_۳^x} + ۷^{\log_۳^x} = ۹۸$

$۲ \times ۷^{\log_۳^x} = ۹۸ \to ۷^{\log_۳^x} = ۴۹ = ۷^۲ \to \log_۳^x = ۲$

$\Rightarrow x = ۳^۲ \to x = ۹$

**۸۹**

$\lim_{x\to \frac{۱}{۲}^+} ax[\frac{۱}{x}] = \lim_{x\to\frac{۱}{۲}^-} \cos\frac{\pi x}{۲} \xrightarrow{(x>\frac{۱}{۲}\Rightarrow\frac{۱}{x}<۲)} \frac{۱}{۲}a(۱) = \cos\frac{\pi}{۴} \Rightarrow \frac{a}{۲} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow a = \sqrt{۲}$

**۹۰**

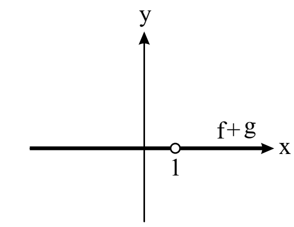
**الف**

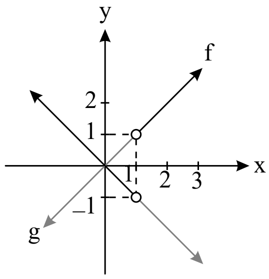
$(f+g)(x) = f(x)+g(x) = \begin{cases} ۰ & x>۱ \\ ۰ & x<۱ \end{cases}$

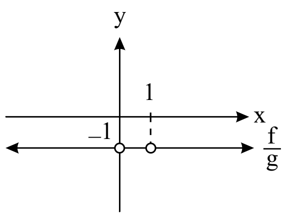
$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \begin{cases} -x^2 & x > 1 \\ -x^2 & x < 1 \end{cases}$$

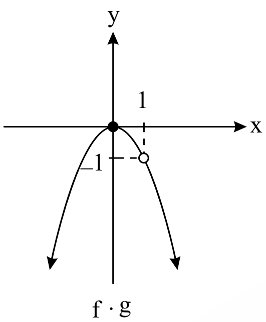
$$(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} -1 & x > 1 \\ -1 & x < 1, x \neq 0 \end{cases}$$

**ب**




**پ** خیر زیرا:

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 1 \neq \lim_{x \to 1^-} f(x) = -1$$

$$\lim_{x \to 1^+} g(x) = -1 \neq \lim_{x \to 1^-} g(x) = 1$$

**ت** بله زیرا:

$$\lim_{x \to 1^+} (f+g)(x) = \lim_{x \to 1^-} (f+g)(x) = 0$$

$$\lim_{x \to 1^+} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \to 1^-} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \to 1} -x^2 = -1$$

$$\lim_{x \to 1^+} (\frac{f}{g})(x) = \lim_{x \to 1^-} (\frac{f}{g})(x) = -1$$

**ث** خیر درصورتی می‌توان از قضیهٔ حد مجموع، ضرب و تقسیم در $x = 1$ استفاده کرد که توابع $f$ و $g$ در $x = 1$ حد داشته باشند و چون در اینجا $f$ و $g$ در $1$ حد ندارند ما مستقیماً توابع $f + g$ و $f \cdot g$ و $\frac{f}{g}$ را به‌دست می‌آوریم و سپس حد آن‌ها را پیدا کریدم.

توجه: درصورتی که دو تابع $f$ و $g$ در $x = a$ حد داشته باشند، می‌توانیم بنویسیم:

$$\lim_{x \to a} (f \underset{\times}{+} g) = \lim_{x \to a} f(x) \underset{\times}{+} \lim_{x \to a} g(x)$$

$$\lim_{x \to a} (\frac{f}{g})(x) = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}, \lim_{x \to a} g(x) \neq 0$$