



زمان برگزاری: ۱۴۰۴۰ دقیقه

نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: ریاضی و آمار (انسانی) یازدهم

تاریخ آزمون: ۱۴۰۱/۱۱/۱۰

۱ مجموعه داده‌هایی که در طی زمان با فواصل منظم گردآوری می‌شوند، نام دارد.

۲ نمودار مختصاتی تابع $f(x) = -3$ را رسم کنید و مجموعه برد آن را مشخص کنید.

۳ نمودار مختصاتی تابع $f(x) = |x + 2| - 1$ را رسم کنید.

۴ اگر p درست، q نادرست و r دلخواه باشد، ارزش گزاره‌های مرکب زیر را تعیین کنید.

الف) $(p \vee \sim r) \Rightarrow q \wedge r$ ب) $(r \Rightarrow p) \Leftrightarrow (p \wedge q)$

پ) $(\sim p \vee \sim q) \Leftrightarrow \sim (p \vee q)$ ت) $(\sim p \Rightarrow \sim q) \wedge r$

۵ اگر $T \equiv p \wedge q \sim$ باشد، ارزش گزاره‌های ترکیبی زیر را بدست آورید. (r گزاره‌ای با ارزش دلخواه است). درست $T \equiv$ ، نادرست $F \equiv$

الف) $(p \vee q) \vee r$ ب) $\sim (p \wedge q) \vee \sim r$

۶ نقیض هر یک از گزاره‌های زیر را بنویسید و سپس ارزش آنها را تعیین کنید.

الف) $2 \times 3 = 6$ ب) $2 \in \{3, 4, 5\}$ q

پ) $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$ ت) نیوتن فیزیک‌دان است: S

۷ تعداد سفارشات یک شرکت خدماتی در جدول زیر آمده است:

ساعت	۸	۱۰	۱۲	۱۴	۱۶
تعداد سفارش	۵۰	۹۰	۶۰	۳۰	۲۰

نمودار سری زمانی تعداد سفارشات این شرکت را رسم کنید.

الف

۸ تعداد سفارشات این شرکت خدماتی را در ساعت ۹ به روش درون‌یابی خطی تخمین بزنید.

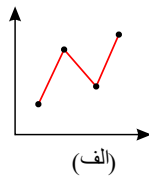
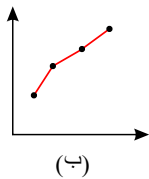
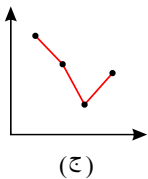
۹ شاخص پایه آموزش بر اساس و تعریف می‌شود.

۱۰ تغییر متوسط قیمت کالاها و خدمات در طول زمان را می‌نامند.

۱۱ تخمین داده‌های بعد یا قبل از داده‌های ثبت شده را می‌نامند.

۱۲ در نمودار سری زمانی محور طول‌ها نشان‌دهنده است.

۱۳ در کدام یک از نمودارهای سری زمانی زیر، درون‌یابی و برون‌یابی خطی بهتری انجام می‌شود؟ دلیل خود را توضیح دهید.



۱۳ تعداد گل‌های زده شده در لیگ برتر فوتبال جام خلیج فارس در هفته‌های زوج و پایانی در جدول زیر آمده است.

هفته	۲۸	۲۶	۲۴	۲۲	۲۰
تعداد گل‌ها	۳۵	۳۵	۳۲	۲۷	۳۰

سری زمانی مربوط به آن را رسم کنید. تعداد گل‌های هفته ۳۰ام را برون‌یابی خطی کنید.

۱۴) با توجه به جدول زیر، خط فقر را به روش نصف میانه محاسبه کنید.

متوسط درآمد هر عضو	تعداد اعضای خانواده	درآمد ماهیانه برحسب هزار تومان
	۳	۱۵۰۰
	۱	۸۰۰
	۲	۹۰۰
	۳	۱۲۰۰
	۴	۱۰۰۰

۱۵) در شهری با جمعیت فعال ۳۰۰۰۰۰۰ نفر و جمعیت بیکار ۲۴۰۰۰۰ نفر، نرخ بیکاری در این شهر چند درصد است؟

۱۶) شاخص پوسیدگی دندان در سال ۱۳۹۵ برابر ۶ بوده است. این شاخص را تفسیر کنید.

۱۷) اهمیت شاخص بهای کالاها و خدمات چیست؟

۱۸) شاخص بهای کالاها و خدمات به واحد اندازه‌گیری بستگی؟

۱۹) خط فقر بین‌المللی را تعریف کنید.

۲۰) در هر قسمت با توجه به تابع f و g توابع خواسته شده را مشخص کنید.

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = |x|$$

الف) $f - g$ ب) $\frac{f}{g}$

۲۱) در هر قسمت با توجه به توابع f و g توابع خواسته شده را مشخص کنید.

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = |x|$$

الف) $f + g$ ب) $f \times g$

۲۲) با توجه به دو تابع f و g ضابطه تابع $(f - g)(x)$ را مشخص کنید.

$$f(x) = \text{sign}(x)$$

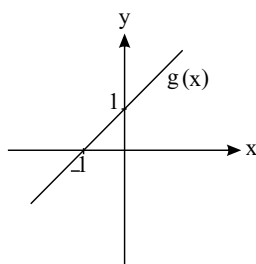
$$g(x) = x^2 + 1$$

۲۳) با توجه به دو تابع f و g ضابطه تابع $f + g$ را به ازای $0 \leq x \leq 2$ مشخص کنید.

$$f(x) = x + 1$$

$$g(x) = [x]$$

۲۴) اگر $f(x) = x^2 - 1$ باشد و نمودار تابع $g(x)$ به صورت زیر باشد، با توجه به دو تابع f و g ضابطه تابع $(f \times g)(x)$ را مشخص کنید.



۲۵) با توجه به دو تابع f و g توابع خواسته شده را به دست آورید.

$$f = \{(0, 1), (2, 0), (3, 1)\}$$

$$g = \{(0, 0), (2, 3), (3, -1)\}$$

الف) $\frac{f}{g}$ (ب) $\frac{g}{f}$

۲۶) در هر قسمت با توجه به دو تابع f و g توابع خواسته شده را مشخص کنید.

$$f(x) = x - 2$$

$$g(x) = 6 - 2x$$

الف) $f \times g$ (ب) $\frac{f}{g}$ (پ) $\frac{g}{f}$

۲۷) در هر قسمت با توجه به دو تابع f و g دامنه و ضابطه توابع خواسته شده را مشخص کنید.

$$f(x) = 2x - 1$$

$$g(x) = 5 - 3x$$

الف) $f + g$ (ب) $g - f$ (پ) $f - g$

۲۸) اگر $f = \{(1, a+1), (-1, a-b), (3, 2)\}$ و $g = \{(1, 4), (2, 3), (-1, 5)\}$ و $(f+g)(1) = 7$ و $(f-g)(-1) = -4$ باشد، در این صورت مقادیر a و b را به دست آورید.

۲۹) یک شرکت هولدینگ دارای دو کارخانه A, B است. اگر توابع درآمد و هزینه برای تولید x تن کاشی در کارخانه A به ترتیب

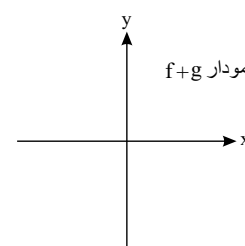
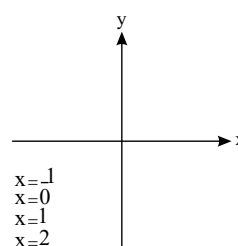
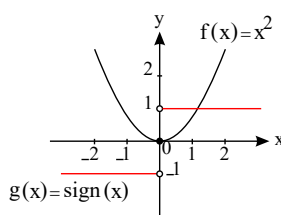
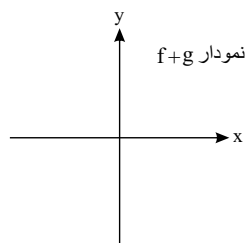
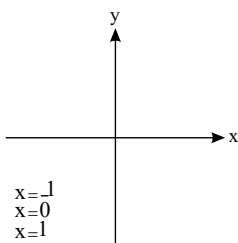
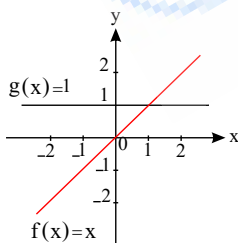
$$-2x^2 + 16x, 8x + 6 \text{ و در کارخانه } B \text{ به ترتیب } -x^2 + 12x, 2x + 9 \text{ (هر واحد معادل یک میلیون تومان):}$$

الف) تابع سود شرکت هولدینگ را به دست آورید.

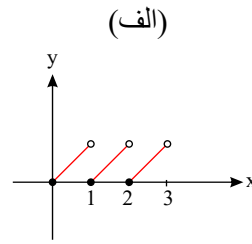
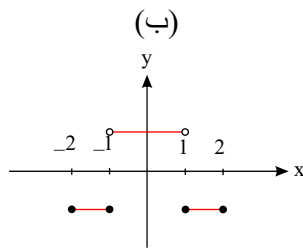
ب) این هولدینگ با چه میزان تولید کاشی به سود ماکزیمم خود می‌رسد؟ سود ماکزیمم چه قدر است؟

۳۰) به کمک نمودارهای رسم شده توابع f و g ، نمودار تابع $f+g$ را ابتدا فقط در نقاط داده شده مشخص کنید. سپس نمودار کلی تابع $f+g$ را به

کمک ضابطه توابع آن و نیز نقاط مشخص شده از تابع، رسم کنید.



۳۱ کدام یک از نمودارهای زیر مربوط به یک تابع پلکانی است؟



۳۲ نمودار مختصاتی تابع پلکانی زیر را رسم کنید.

$$f(x) = \begin{cases} -3 & , x < 0 \\ 2 & , 0 \leq x < 4 \\ 0 & , x \geq 4 \end{cases}$$

۳۳ یک پارکینگ در ساعت ۱ تا ۳ صبح به ازای هر ساعت ۵۰۰ تومان و در ساعت ۳ تا ۶ صبح به ازای هر ساعت ۸۰۰ تومان و از ساعت ۶ صبح تا

۱۲ ظهر به ازای هر یک ساعت ۶۰۰ تومان دریافت می‌کند.

(الف) ضابطه هزینه توقف در این پارکینگ را به صورت یک تابع پلکانی نمایش دهید.

(ب) نمودار مختصاتی این تابع را رسم کنید.

(پ) مساحت زیر این نمودار نشان‌دهنده چیست؟

۳۴ حاصل مقادیر زیر را به دست آورید.

(الف) $[-5]$

(ب) $[8, 3]$

(پ) $2 - \sqrt{5}$

(ت) $\left(\frac{4}{5}\right)^2$

۳۵ با توجه به مقادیر جزء صحیح‌ها، مقادیر x را تعیین کنید.

(الف) $[x] = 1$

(ب) $[x + 2] = 5$

(پ) $[x + 2] = -4$

۳۶ با توجه به مقدارهای جزء صحیح، محدوده مقادیر x را مشخص کنید.

(الف) $[3x] = 2$

(ب) $[2x - 1] = -3$

۳۷ نمودار مختصاتی تابع $[x]$ را به ازای $1 \leq x \leq 2$ رسم کنید.

۳۸ نمودار مختصاتی تابع $f(x) = [x + 1]$ را به ازای $1 \leq x \leq 2$ رسم کنید.

۳۹ حاصل عبارت $[\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + [\sqrt{3}] + [\sqrt{4}] + [\sqrt{5}] + [\sqrt{6}] + [\sqrt{7}]$ را به دست آورید.

۴۰ حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$[\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + [\sqrt{3}] + \dots + [\sqrt{20}] =$$

۴۱) حاصل عبارت‌های زیر را بدون نماد قدرمطلق بنویسید.

الف) $|۳|$

ب) $|-۵|$

پ) $|۴ - ۵|$

ت) $|۸ - ۳|$

ث) $|\sqrt{۵}|$

۴۲) اگر $f(x) = |x|$ در این صورت حاصل مقادیر زیر را به دست آورید.

الف) $f(۳ - \pi)$

ب) $f(\pi - ۲)$

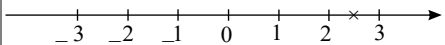
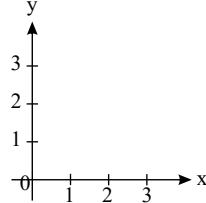
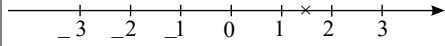
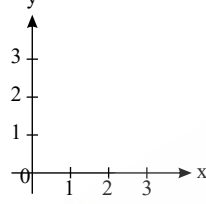
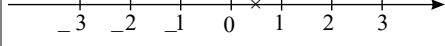
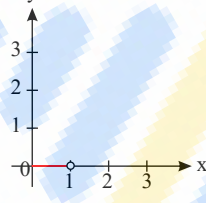
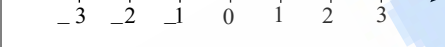
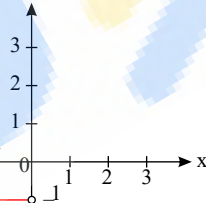

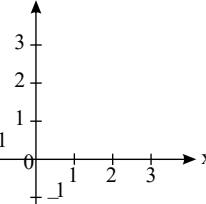
۴۳) اگر $f(x) = |۲ - x| - |۲ + x|$ باشد، در این صورت حاصل $f(\sqrt{۳})$ را به دست آورید.

۴۴) تابع $f(x) = |x - ۲|$ را به صورت یک تابع دو ضابطه‌ای بنویسید، سپس نمودار مختصاتی آن را رسم کنید.

۴۵) نمودار مختصاتی تابع $f(x) = |x - ۱| - ۲$ را رسم کنید.

۴۶) نمودار مختصاتی تابع $f(x) = -|x - ۱| + ۲$ را رسم کنید.

۴۷) با توجه به تابع $g(x) = [x]$ ، جدول زیر را کامل کنید.

حدود x	جواب تابع g	نمودار تابع
 $2 \leq x < 3$	$g(x) =$	
 $1 \leq x < 2$	$g(x) = 1$	
 $0 \leq x < 1$	$g(x) =$	
 $\leq x <$	$g(x) = -1$	
 $\leq x <$	$g(x) = 2$	

۴۸) اگر f یک تابع همانی باشد، جاهای خالی را کامل کنید.

$$f = \{(3, \dots), (\dots, 5, 5), (3, 25, \dots), (6, 6)\}$$

۴۹) جاهای خالی را کامل کنید.

الف) هر عضو از دامنهٔ تابع همانی به در برد تابع نظیر می‌شود.

ب) ضابطهٔ تابع همانی به صورت است.

پ) نمودار مختصاتی تابع همانی به صورت در صفحهٔ مختصات است.

ت) در نمایش زوج مرتبی تابع مؤلفهٔ اول و دوم هر زوج مرتب با هم برابرند.

۵۰) نمودار مختصاتی تابع دو ضابطه‌ای زیر را رسم کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ 3 & , x < 0 \end{cases}$$

۵۱) اگر زوج مرتب $(-۳, ۱ - ۴x + x^2)$ روی نیمساز ناحیه اول و سوم قرار داشته باشد، مقدار x را مشخص کنید.

۵۲) اگر f تابعی ثابت باشد، جاهای خالی را کامل کنید.

$$f = \{(1, \dots), (2, \dots), (3, 4)\}$$

۵۳) اگر رابطه $f = \{(a, 3), (6, a - 1), (a - 1, b + 4), (6, 3), (3, 6)\}$ یک تابع باشد حاصل $a + b$ را به دست آورید.

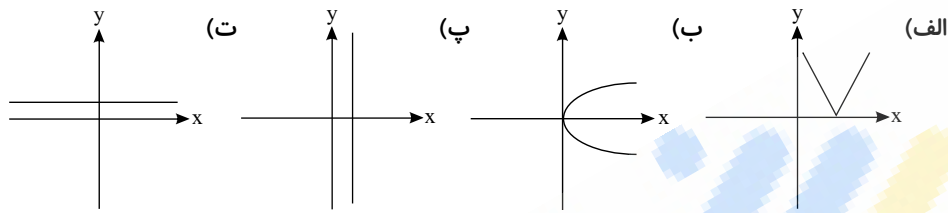
۵۴) با توجه به تابع زیر جاهای خالی را کامل کنید.

$$f = \{(3, \sqrt{5}), (7, 5, 2), (8, 3), (2, 3, 75)\}$$

$$f(3) = \dots$$

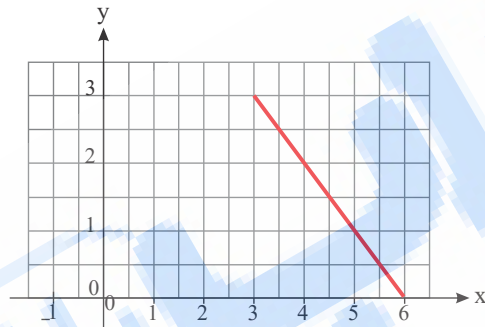
$$f(\dots) = 3, 75$$

۵۵) نمودار مختصاتی مربوط به کدام یک از روابط زیر یک تابع است.

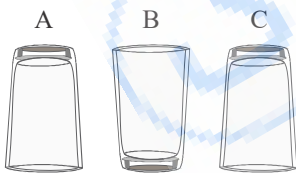


۵۶) ضابطه تابع و نمودار آن را کامل کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & , -1 \leq x < 3 \\ \dots & , 3 \leq x \leq 6 \end{cases}$$



۵۷) سه لیوان یکسان داریم که مطابق شکل قرار گرفته‌اند. اگر در هر مرحله مجاز باشیم تا ۲ لیوان را تغییر وضعیت بدهیم در چند حالت می‌توان همه لیوان‌ها را در وضعیت رو به پایین قرار داد.



۵۸) با استفاده از جدول ارزشی، درستی قاعده قیاس استثنایی $(p \Rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$ را نشان دهید.

۵۹) عبارات زیر را به صورت نماد ریاضی بازنویسی کنید.

الف) عددی به علاوه پنج، مساوی دو برابر آن عدد است.

ب) حاصل ضرب دو عدد حقیقی برابر مجموعشان است.

ج) حاصل ضرب عددی در خودش، به علاوه ۳، بزرگ‌تر از خودش است.

۶۰) با استفاده از جدول ارزش درستی نشان دهید استدلال به روش مغالطه معتبر نیست.

$$((p \Rightarrow q) \wedge q) \Rightarrow p$$

۶۱) با توجه به گزاره‌های p, q, r گزاره‌های مرکب زیر را با عبارت کلامی بنویسید.

$\sqrt{8}$ عددی گنگ است: p , ۱۴ عددی فرد است: q , ۲۴ مضرب ۳ است: r

الف) $(p \wedge q) \Rightarrow r$

ب) $(p \wedge q) \vee (\sim r)$

۶۲ ترکیب فصلی دو گزاره زمانی درست است که و زمانی نادرست است که

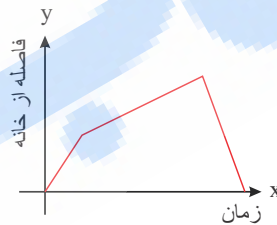
۶۳ اگر $f(x) = [x]$ با دامنه $0 \leq x \leq 1$ و $g(x) = |x|$ با دامنه $1 \leq x \leq 2$ و $h(x) = x^2 - 4$ با دامنه $-1 \leq x \leq 1$ در نظر گرفته شود، جدول زیر را کامل کنید.

نمودار	ضابطه	تابع
.....	$s(x) = \dots$	$s(x) = f(x) + g(x)$
.....	$q(x) = \dots$	$q(x) = \frac{h(x)}{f(x)}$
.....	$p(x) = \dots$	$p(x) = h(x) \times g(x)$

۶۴ با توجه به تعریف تابع صحیح، جدول زیر را کامل کنید.

مقدار $f(x)$	مقدار x	ضابطه تابع
	$x = -2, 3$ $x = 5$	$f(x) = [x]$
	$x = 1, 7$ $x = 2, 3$	$f(x) = [-x]$
	$x = 1$ $x = 1, 3$ $x = 1, 7$ $x = 2$	$f(x) = [x] + [-x]$
	$x = 1$ $x = 0, 2$ $x = 1, 3$	$f(x) = [3x]$

۶۵ نمودار زیر به کدام داستان مربوط است؟



الف) آوا و مادر بزرگش برای قدم زدن در بوستان، از خانه خارج شدند. آن‌ها در ابتدا آهسته قدم می‌زدند و سپس سرعتشان را بیشتر کردند تا به بوستان رسیدند. سپس، از مسیری که آمده بودند، برگشتند و به خانه رسیدند.
 ب) علی با دوچرخه‌اش از خانه به سمت بالای تپه روبه‌روی خانه‌شان حرکت کرد. پس از مدتی شیب تپه کمتر شد تا به بالای تپه رسید. سپس از آنجا از سمت دیگر به پایین تپه سرازیر شد.
 ج) محمدرضا برای دیدن روزانه‌اش از خانه خارج شد. هنگام دیدن با دوست خود که در حال دویدن بود، برخورد کرد که باعث شد از سرعت دویدنش کم شود؛ اما بعد از آن با سرعت بیشتری به سمت خانه حرکت کرد و به خانه رسید.

۶۶ در هریک از زوج مرتب‌های زیر $n \in \mathbb{N}$ را به گونه‌ای تعیین کنید که زوج مرتب داده شده روی نیمساز ناحیه اول و سوم باشد.

$(2, n^2 - 3n + 4)$
 $(-1, n^2 - 4n + 2)$

۶۷ اگر $A = \{(a, 1), (b, 2), (c, 5)\}$ یک تابع همانی باشد، میانگین a و b و c را به دست آورید.

۶۸ با استفاده از جدول ارزش‌ها درستی هر یک از هم‌ارزی‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim p \vee q)$ (تبدیل ترکیب شرطی به ترکیب فصلی)
 ب) $p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$ (گزاره عکس نقیض گزاره شرطی)

۶۹) در گزاره‌های مرکب زیر در صورت امکان به جای p گزاره‌ای بنویسید، تا ارزش ترکیب گزاره‌ها درست باشد.

الف) عدد ۲ زوج است و p (ب) p یا ۲ \neq ۱
 پ) $2 \notin \mathbb{W}$ و p (ت) عدد ۷ اول است یا p

۷۰) خطای استدلال زیر را مشخص کنید.

۱) $9 = 9$

۲) $25 + 4 - 20 = 16 + 49 - 56$

۳) $5^2 + 2^2 - 2(5)(2) = 4^2 + 7^2 - 2(4)(7)$

۴) $(5 - 2)^2 = (4 - 7)^2$

۵) $5 - 2 = 4 - 7$

۶) $3 = -3$

۷۱) عبارتهای زیر را با عبارتهای توصیفی (به زبان فارسی) بیان کنید.

الف) $(a > 1), \sqrt{a} > \sqrt[3]{a}$

ب) $a > 0 \Rightarrow a^2 > 0$

پ) $(x > 0), \sqrt{x} + x^2 = \frac{x}{2} + 1$

ت) $(0 < x < 1), x^2 > x^3$

۷۲) در هر یک از استدلال‌های زیر، جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید تا استدلال قیاس استثنایی کامل شود.

الف) $p: x > 0 \Rightarrow q: x^2 > 0$ هیچ‌گاه یکدیگر را قطع نمی‌کنند: $q \Rightarrow$ دو خط موازی باشند. p : (ب)

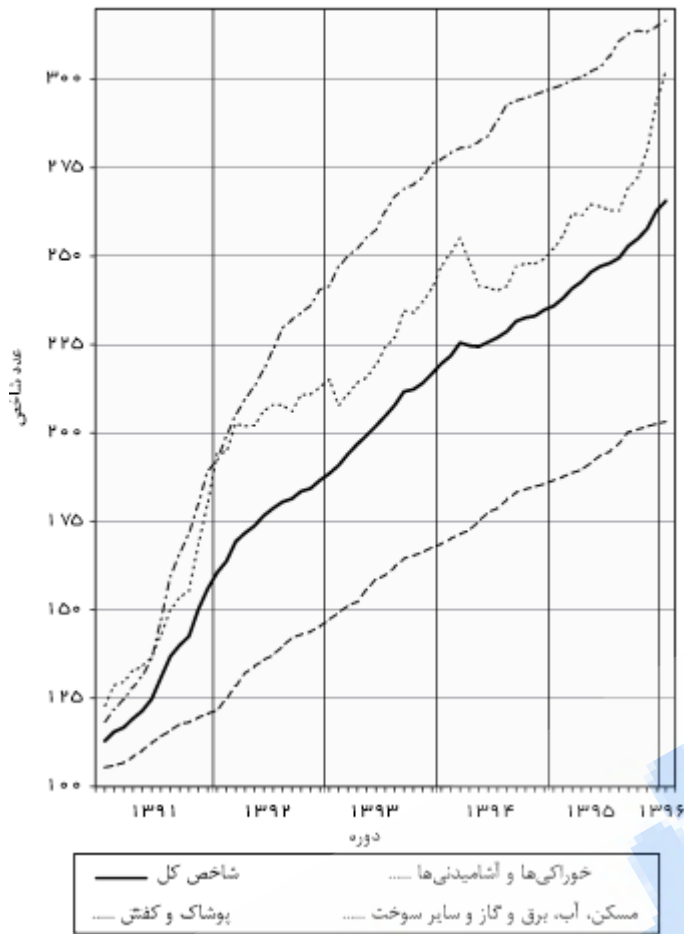
$p: 3 > 0$
 خطوط L_1, L_2 هیچ‌گاه همدیگر را قطع نمی‌کنند. \therefore

۷۳) عبارت «۱۵ درصد قیمت فروش کالایی مساوی ۲ برابر سود آن است» را به صورت نماد ریاضی بیان کنید.

۷۴) خانواده آقای صالحی در فروردین‌ماه سال ۱۳۹۰، پانصد هزار تومان هزینه ماهیانه مسکن، آب، برق، گاز و سایر سوخت‌ها داشته است. در همان

تاریخ، هزینه ماهیانه خوراکی‌ها و آشامیدنی‌های این خانواده دویست و پنجاه هزار تومان بوده است. اگر تعداد افراد این خانواده تغییری نکرده باشد، بر مبنای نمودار شاخص بهای کالا و خدمات مصرفی موارد زیر را به‌طور تقریبی محاسبه کنید.

شاخص کل بهای کالاها و خدمات مصرفی و برخی گروه‌های اصلی در مناطق شهری ایران
(۱۳۹۰=۱۰۰)



الف هزینه ماهیانه مسکن، آب، برق، گاز و سایر سوخت‌های این خانواده در خردادماه ۱۳۹۳:

ب هزینه ماهیانه خوراکی‌ها و آشامیدنی‌های این خانواده در مهرماه ۱۳۹۵:

۷۵ در موقع خرید کتاب‌های داستان معمولاً به سطح کتاب برای رده سنی مشخص شده، توجه می‌کنیم. به نظر شما چگونه این کار را انجام می‌دهند؟

آیا نظر افراد با تجربه برای تعیین سطح یک متن به خصوص همیشه یکسان است؟ ارزیابی آنها کیفی است یا کمی؟

یکی از شاخص‌های خوانایی که سال‌های تحصیل خواننده متون انگلیسی را تخمین می‌زند، به صورت زیر تعریف شده است:

$$\text{شاخص پایه آموزش} = [۰.۴ \times (\text{میانگین تعداد کلمات در هر جمله} + \text{درصد کلمات «دشوار»})]$$

که منظور از کلمات «دشوار»، کلمات دوهجا بدون در نظر گرفتن اسامی و کلمات ترکیبی آسان است. این شاخص، عددی بین ۱ تا ۱۲ است که نشان‌دهنده پایه تحصیلی است.

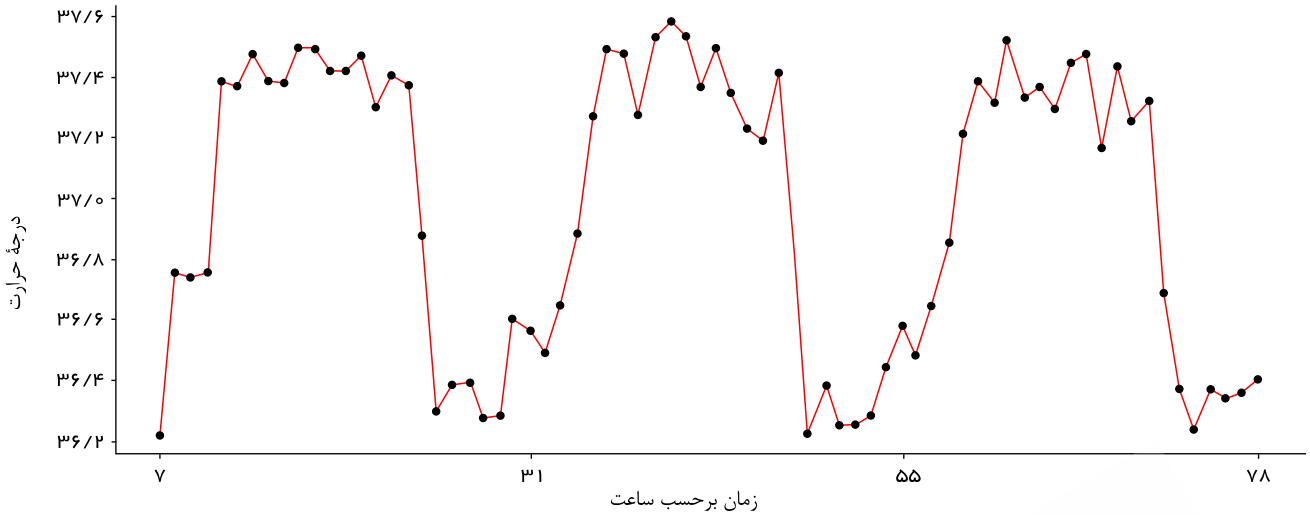
الف برای کتابی با متوسط طول جملات ۸ کلمه‌ای و ۲۰ درصد کلمه سخت، شاخص پایه آموزش را محاسبه کنید. این کتاب، مناسب دانش‌آموزان چه پایه‌ای است؟

پاسخ: این کتاب مناسب دانش‌آموزانی است که پایه را به پایان رسانده‌اند.

ب مزایا و محدودیت‌های این شاخص چیست؟

پ همان‌گونه که متوجه شده‌اید، این شاخص بر اساس دو آمار از دو متغیر تعریف شده است. آنها را نام ببرید.

۷۶ درجه حرارت بدن یک انسان سالم هر ساعت طی ۳ روز از ۷ صبح اندازه‌گیری شده است.



- الف) بیشترین دمای بدن چقدر است؟
 ب) دمای بدن در طول روز اول چه تغییری کرده است؟ تغییرات دمای بدن در روز اول را توصیف کنید.
 پ) آیا این تغییرات در روزهای بعد نیز تکرار شده است؟
 ت) این منحنی چه ویژگی دارد؟ (خطی، صعودی یا تناوبی)
 ۷۷) میانگین افزایش خدمات یک تعمیرگاه نسبت به سال اول (سال پایه) برحسب درصد در جدول زیر آمده است.

سال	۱	۲	۳	۴	۵	۶
درآمد	۱۹,۵	۲۹,۵	۳۸,۵	۴۸	۵۸	۶۷

- الف) سری زمانی داده‌ها را رسم کنید.
 ب) درصد افزایش خدمات سال هفتم این تعمیرگاه را نسبت به سال پایه برون‌یابی کنید.
 ۷۸) اگر $f(x) = \begin{cases} x + 2, & x > 0 \\ x - 1, & x \leq 0 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} x + 3, & (x \geq -2) \\ x - 1, & (x < -2) \end{cases}$ باشد، مقدار $(f + 3g)(x)$ را به ازای $x = f(0)$ حساب کنید.
 ۷۹) اگر $f = \{(1, 1), (-2, 2), (3, 4), (5, 0)\}$ و $g = \{(3, 3), (-2, -2), (5, -5)\}$ باشند، تابع‌های زیر را به صورت نمودار پیکانی نمایش دهید.
 الف) $2f - 3g$

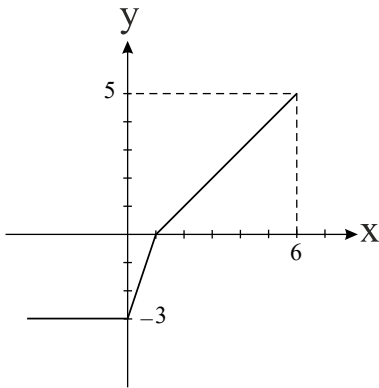
ب) $\frac{f+g}{f}$

- ۸۰) الف) حجم مکعب مستطیل با ابعاد ۱، ۱ و x با افزایش مقدار x چگونه تغییر می‌کند؟
 ب) تابع حجم مکعب مستطیل را یافته و نوع آن را مشخص کنید.
 پ) زمانی که حجم مکعب مستطیل ۸ است، مقدار x چقدر باید باشد؟ چرا؟
 ۸۱) نمودار تابعی را رسم کنید که دامنه آن $D = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < 4\}$ و برد آن شامل دو عضو باشد.
 ۸۲) اگر گزاره‌ای درست و q گزاره‌ای نادرست باشد، جدول ارزش گزاره‌های p, q, r و s چند حالت دارد؟ رسم کنید.
 ۸۳) در کدام مراحل استدلال زیر، اشتباه رخ داده است؟

$x = -2$ (مرحله ۵) $\rightarrow 3x = 6$ (مرحله ۴) $\rightarrow 4 = 6 - 2x - x$ (مرحله ۳) $\rightarrow x = 3$ (مرحله ۲) $\rightarrow 6 - 2x = x$ (مرحله ۱) $\rightarrow \frac{6 - 2x}{x} = 1$

۸۴ ضابطه نمودار تابع f را نوشته، مقادیر زیر را محاسبه کنید.

$$f(0), f(-x^2), f\left(\frac{1}{3}\right)$$



۸۵ میزان باسوادی جمعیت ۶ساله و بیشتر کشور، در سرشماری‌های ۱۳۹۰ - ۱۳۳۵ به تفکیک جنسیت به صورت زیر است:

سال	۱۳۳۵	۱۳۴۵	۱۳۵۵	۱۳۶۵	۱۳۷۵	۱۳۸۵	۱۳۹۰
مرد	۲۲,۴	۴۰,۱	۵۹,۵	۷۱	۸۴,۷	۸۸,۷	۸۸,۴
زن	۸	۱۷,۹	۳۵,۵	۵۲,۱	۷۴,۲	۸۰,۳	۸۱,۱

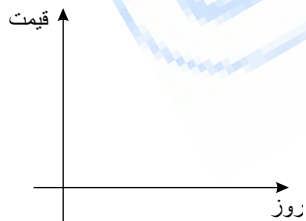
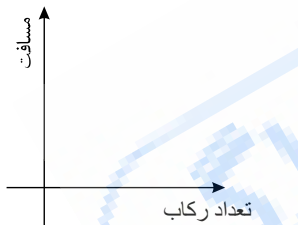
الف) میزان باسوادی جمعیت ۶ساله و بیشتر را محاسبه کنید.

ب) نمودار سری زمانی مربوط به باسوادی جمعیت ۶ساله و بیشتر کشور را رسم کنید.

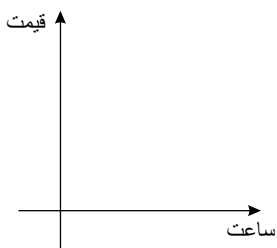
پ) از میانگین درصدها خطی افقی رسم کنید. چه سال‌هایی درصد باسوادی پایین‌تر از میانگین بوده است؟

۸۶ با توجه به معرفی محور x و y در هر دستگاه مختصات و توضیحات داده شده، نمودار هر حالت را رسم کنید.

الف) دوچرخه‌سواری با هر بار رکاب زدن، یک متر را طی می‌کند.



ب) قیمت خرید تضمینی گندم از کشاورزان در سال ۹۴، برابر ۱۲۷۰۵ ریال بود.



پ) قیمت سهام شرکت A، قبل از ظهر ۲۰ هزار تومان و بعد از ظهر ۲۲ هزار تومان شد.

۸۷ در هریک از موارد زیر کلمه مناسب را انتخاب کنید.

الف) اگر در تابعی با متغیر x ، مقادیر تابع تغییر نکند، آن تابع $\frac{\text{همانی}}{\text{ثابت}}$ است.

ب) توابع ثابت و همانی، نمونه‌هایی از توابع خطی چندضابطه‌ای هستند و تابع $sign(x)$ نمونه‌ای از توابع چندضابطه‌ای ثابت است.

۸۸) فروش کل یک فروشگاه برحسب میلیون ریال در سال‌های ۶۰ تا ۶۴ به صورت زیر است:

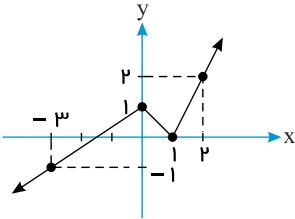
سال	۶۰	۶۱	۶۲	۶۳	۶۴
مبلغ فروش	۳	۵	۴	۷	۶

الف) میزان فروش را در سال ۶۵ به کمک نمودار تخمین بنزید.

ب) میزان فروش را در سال ۶۵ به کمک معادله خط برون‌یابی تخمین بنزید.

پ) اگر مقدار واقعی فروش در سال ۶۵ برابر ۹ میلیون ریال باشد، میزان خطای تخمین را حساب کنید.

۸۹) با توجه به نمودار f ، مقدرهای زیر را بیابید. الف) $f(-1,5)$ ، ب) $f(0,2)$ ، پ) $f(3)$

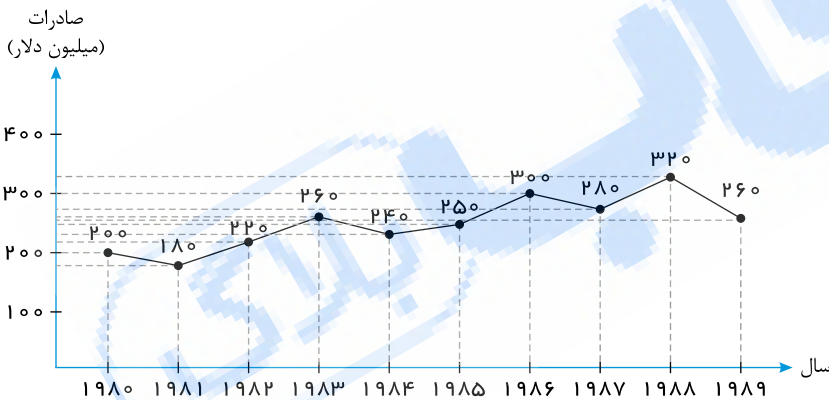


الف) $f(-1,5)$

ب) $f(0,2)$

پ) $f(3)$

۹۰) صادرات یک کشور در ۱۰ سال متوالی به شکل نمودار زیر است:



الف) این کشور به طور میانگین در هر سال چقدر صادرات داشته است؟

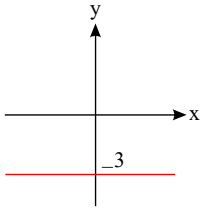
ب) چند درصد صادرات این کشور، در ۳ سال آخر بوده است؟

پ) صادرات این کشور در ۵ سال دوم بیشتر بوده است یا ۵ سال اول؟ چقدر؟

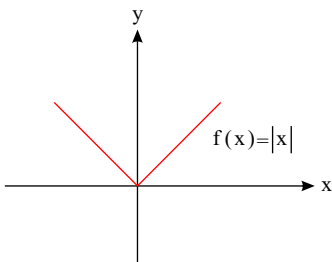
پاسخنامه تشریحی

۱ سری زمانی

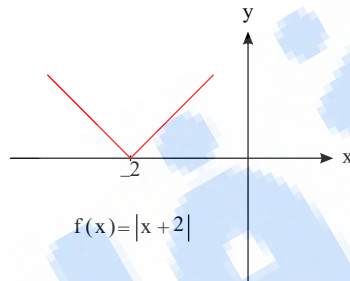
۲ ضابطه $f(x) = -3$ تابع ثابت با مجموعه برد $R_f = \{-3\}$ است.



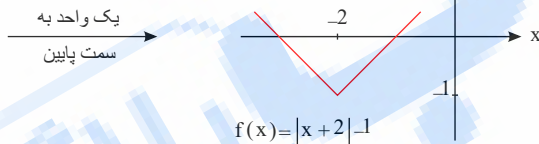
۳ برای رسم نمودار مختصاتی تابع $f(x) = |x + 2| - 1$ ابتدا نمودار مختصاتی $f(x) = |x|$ را دو واحد به سمت چپ و سپس یک واحد به سمت پایین منتقل می‌کنیم.



دو واحد به سمت چپ



یک واحد به سمت پایین



۴

(الف)

$$\begin{aligned} (p \vee \sim r) &\Rightarrow q \wedge r \\ (\sim d \vee \sim r) &\Rightarrow \underbrace{\sim}_{\text{ن}} \wedge r \\ d &\Rightarrow \underbrace{\sim}_{\text{ن}} \equiv \text{نادرست} \end{aligned}$$

$$(r \Rightarrow p) \Leftrightarrow (p \wedge q)$$

$$(r \Rightarrow d) \Leftrightarrow (d \wedge \sim n)$$

$$d \Leftrightarrow \sim n \equiv \text{نادرست}$$

$$(\sim p \vee \sim q) \Leftrightarrow \sim (p \vee q)$$

$$(\sim n \vee d) \Leftrightarrow \sim (d \vee \sim n)$$

$$d \Leftrightarrow \sim (d) \equiv d \Leftrightarrow \sim n \equiv \text{نادرست}$$

$$(\sim p \Rightarrow \sim q) \wedge r$$

$$\underbrace{(\sim d \Rightarrow d)}_d \wedge r \equiv (d \wedge r)$$

$$d \wedge d \equiv d \Rightarrow r \equiv d \text{ اگر}$$

$$d \wedge \sim n \equiv \sim n \Rightarrow r \equiv \sim n \text{ اگر}$$

(ب) در گزاره شرطی اگر تالی درست باشد، مقدم هر چه باشد، ارزش گزاره مرکب درست است.

در گزاره دو شرطی اگر گزاره‌های دو طرف هم‌ارزش باشند، گزاره درست است. در غیر اینصورت نادرست است.

(پ)

در گزاره دو شرطی اگر گزاره‌های دو طرف هم‌ارزش باشند، گزاره درست است.

(ت)

بنابراین ارزش گزاره مرکب به r بستگی دارد.

۵

باتوجه به فرض سوال داریم:

$$\sim p \wedge q \equiv T \Rightarrow \{q \equiv T, \sim p \equiv T\} \Rightarrow p \equiv F$$

(الف) $(p \vee q) \vee r \equiv \underbrace{(F \vee T)}_T \vee r \equiv \underbrace{T \vee r}_{r \text{ هرچه باشد}} \equiv T$

(ب) $\sim(p \wedge q) \equiv \sim \underbrace{(F \wedge T)}_F \equiv F \equiv T$

$\sim(p \wedge q) \vee \sim r \equiv T \vee \sim r \equiv T$

۶ (الف) نادرست است. $\sim p: 2 \times 3 \neq 6$

(ب) درست است. $\sim q: 2 \notin \{3, 4, 5\}$

(پ) نادرست است. $\sim r: \frac{1}{2} \leq \frac{1}{3}$ یا $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$

(ت) نادرست است. این چنین نیست که نیوتن فیزیکدان است: $\sim S$ یا نیوتن فیزیکدان نیست: $\sim S$

۷

الف

نقاط را روی محور زیر مشخص کرده و به هم وصل می‌کنیم:

برای تخمین تعداد سفارشات در ساعت ۹، ابتدا معادله خط گذرنده از دو نقطه (۸ و ۵۰) و (۱۰ و ۹۰) را مشخص می‌کنیم.

ب

شیب خط $= \frac{90 - 50}{10 - 8} = \frac{40}{2} = 20$

$y = ax + b \xrightarrow{\text{شیب}=20} y = 20x + b \xrightarrow{(8, 50)} 50 = 20 \times 8 + b$
 $\Rightarrow 50 = 160 + b \Rightarrow b = -110 \Rightarrow y = 20x - 110$

$y = 20x - 110 \xrightarrow{x=9} y = 20 \times 9 - 110 = 70$

حال با قرار دادن $x = 9$ در معادله خط به دست آمده تعداد سفارشات در ساعت ۹ را تخمین می‌زنیم:

۸ تعداد کلمات در جمله و درصد کلمات دشوار

۹ تورم

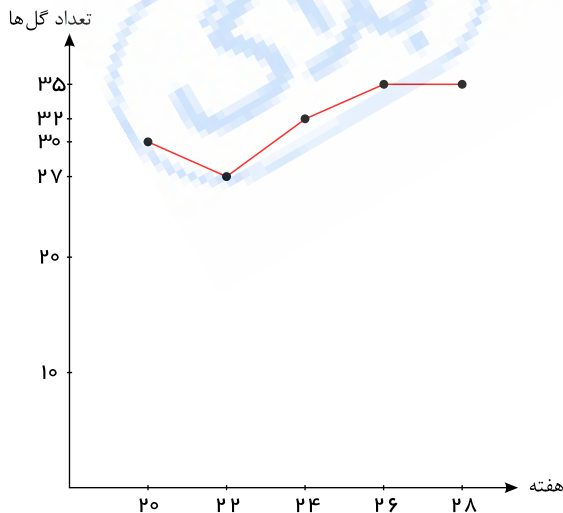
۱۰ برون‌یابی

۱۱ زمان

۱۲ نمودار ب

در نمودار سری زمانی که داده‌ها به‌طور یکنواخت افزایش یا کاهش داشته باشند، درون‌یابی و برون‌یابی مناسب‌تری انجام می‌گیرد.

۱۳



معادله خط گذرنده از نقطه میانگین و آخرین داده را مشخص می‌کنیم.

$\bar{x} = \frac{20 + 22 + 24 + 26 + 28}{5} = \frac{120}{5} = 24$

$\bar{y} = \frac{30 + 27 + 32 + 35 + 35}{5} = \frac{159}{5} = 31,8$

شیب خط: $\frac{35 - 31,8}{28 - 24} = \frac{3,2}{4} = 0,8$

$$y = ax + b \xrightarrow{\text{شیب} = 0,8} y = 0,8x + b \xrightarrow{(28 \text{ و } 35)} 35 = 0,8 \times 28 + b$$

$$\Rightarrow 35 = 22,4 + b \Rightarrow b = 12,6 \Rightarrow y = 0,8x + 12,6$$

$$\xrightarrow{x=30} y = 0,8 \times 30 + 12,6 = 24 + 12,6 = 36,6$$

با توجه به آنکه تعداد گل عددی طبیعی است، می توان گفت تقریباً ۳۶ یا ۳۷ گل در هفته ۳۰ تخمین زده می شود.

۱۴ ابتدا با تقسیم میزان درآمد هر خانواده بر تعداد اعضای خانواده، متوسط درآمد هر عضو را مشخص می کنیم.

متوسط درآمد هر عضو	تعداد اعضای خانواده	درآمد ماهیانه بر حسب هزار تومان
$\frac{1500}{3} = 500$	۳	۱۵۰۰
$\frac{800}{1} = 800$	۱	۸۰۰
$\frac{900}{2} = 450$	۲	۹۰۰
$\frac{1200}{3} = 400$	۳	۱۲۰۰
$\frac{1000}{4} = 250$	۴	۱۰۰۰

در مرحله دوم، متوسط درآمد هر عضو را از کوچک به بزرگ مرتب می نویسیم، سپس میانه داده‌ها را به دست می آوریم.

$$250 \text{ و } 250 \text{ و } 250 \text{ و } 250 \text{ و } 400 \text{ و } 400 \text{ و } 400 \text{ و } 400 \text{ و } 450 \text{ و } 450 \text{ و } 500 \text{ و } 500 \text{ و } 500 \text{ و } 800$$

تعداد داده‌ها فرد است، پس میانه داده‌ها برابر داده وسطی یعنی برابر ۴۰۰ است. برای به دست آوردن خط فقر به روش نصف میانه کفایت میانه به دست آمده را بر ۲ تقسیم کنیم.

$$400 \div 2 = 200$$

۱۵ نرخ بیکاری برابر است با: نسبت جمعیت بیکار به جمعیت فعال جامعه؛ در این صورت داریم:

$$\text{نرخ بیکاری} = \frac{240000}{3000000} \times 100 = 0,8 \times 100 = 8\%$$

۱۶ شاخص پوسیدگی دندان برابر ۶ است، یعنی به طور متوسط هر فرد دارای ۲ دندان کشیده شده، دو دندان پوسیده و دو دندان پر شده است.

۱۷ این شاخص، تحولات قیمت را بر مبنای سال پایه نشان می دهد.

۱۸ شاخص بهای کالاها و خدمات به واحد اندازه گیری بستگی ندارد.

۱۹ خط فقر بین المللی توسط بانک جهانی در سال جاری حدود چهار هزار تومان (۱,۲۵ دلار آمریکا) برای هر نفر در روز تعیین شده است.

۲۰ دامنه دو تابع f و g برابر \mathbb{R} است، در نتیجه اشتراک دامنه این دو تابع برابر \mathbb{R} است.

الف برای مشخص کردن ضابطه تابع $f - g$ تابع $f(x) = |x|$ را به صورت دو ضابطه‌ای $g(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ نشان می دهیم.

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = x - |x| = \begin{cases} 0, & x \geq 0 \\ 2x, & x < 0 \end{cases}$$

ب) از اشتراک دامنه‌های دو تابع f و g مقادیری که $g(x) = 0$ می شوند را کنار می گذاریم:

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\}$$

$$g(x) = |x| = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} \frac{x}{x}, & x > 0 \\ \frac{x}{-x}, & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

۲۱ دامنه دو تابع f و g برابر \mathbb{R} است، پس دامنه مشترکشان نیز برابر \mathbb{R} خواهد بود.

الف برای به دست آوردن ضابطه تابع $f + g$ تابع $g(x)$ را به صورت دو ضابطه‌ای می نویسیم.

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 + |x| = \begin{cases} x^2 + x, & x \geq 0 \\ x^2 - x, & x < 0 \end{cases}$$

$$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x) = x^2 \times |x| = \begin{cases} x^3, & x \geq 0 \\ -x^3, & x < 0 \end{cases}$$

۲۲) ابتدا تابع $f(x) = \text{sign}(x)$ را به صورت چند ضابطه‌ای مشخص می‌کنیم.

$$f(x) = \text{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

سپس ضابطه تابع $f - g$ را مشخص می‌کنیم.

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = \text{sign}(x) - (x^2 + 1) \\ = \begin{cases} 1 - (x^2 + 1), & x > 0 \\ 0 - (x^2 + 1), & x = 0 \\ -1 - (x^2 + 1), & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 - x^2 - 1, & x > 0 \\ -x^2 - 1, & x = 0 \\ -1 - x^2 - 1, & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} -x^2, & x > 0 \\ -x^2 - 1, & x = 0 \\ -x^2 - 2, & x < 0 \end{cases}$$

۲۳) ابتدا تابع $g(x) = [x]$ را به ازای $0 \leq x \leq 2$ به صورت چند ضابطه‌ای مشخص می‌کنیم.

$$\begin{cases} 0 \leq x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \\ 1 \leq x < 2 \Rightarrow [x] = 1 \\ x = 2 \Rightarrow [x] = 2 \end{cases} \Rightarrow g(x) = [x] = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & 1 \leq x < 2 \\ 2, & x = 2 \end{cases}$$

پس ضابطه تابع $f + g$ را مشخص می‌کنیم:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = x + 1 + [x] \\ = \begin{cases} x + 1 + 0, & 0 \leq x < 1 \\ x + 1 + 1, & 1 \leq x < 2 \\ x + 1 + 2, & x = 2 \end{cases} = \begin{cases} x + 1, & 0 \leq x < 1 \\ x + 2, & 1 \leq x < 2 \\ x + 3, & x = 2 \end{cases}$$

۲۴) تابع $g(x)$ یک تابع خطی است، ضابطه این تابع را مشخص می‌کنیم. این تابع از دو نقطه $(0, 1)$ و $(-1, 0)$ می‌گذرد در نتیجه، داریم:

$$\text{شیب} = \frac{1 - 0}{0 - (-1)} = \frac{1}{1} = 1$$

و عرض از مبدأ این خط (محل برخورد با محور y ها) برابر ۱ است، پس ضابطه تابع $g(x)$ به صورت مقابل است.

$$g(x) = x + 1$$

حال با داشتن ضابطه تابع f و g ضابطه $f \times g$ را مشخص می‌کنیم.

$$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x) = (x^2 - 1)(x + 1) = x^3 + x^2 - x - 1$$

۲۵) ابتدا اشتراک دامنه دو تابع f و g را مشخص می‌کنیم. در هر قسمت مقادیری که مخرج برابر صفر می‌شود را کنار می‌گذاریم.

$$D_f = \{0, 2, 3\}, \quad D_g = \{0, 2, 3\}$$

$$D_f \cap D_g = \{0, 2, 3\}$$

الف) $(\frac{f}{g})(0)$ قابل محاسبه نیست چون $g(0) = 0$ است در نتیجه صفر در دامنه $\frac{f}{g}$ قرار نمی‌گیرد.

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} \left(\frac{f}{g}\right)(2) = \frac{f(2)}{g(2)} = \frac{0}{3} = 0 \\ \left(\frac{f}{g}\right)(3) = \frac{f(3)}{g(3)} = \frac{1}{-1} = -1 \end{cases}$$

$$\frac{f}{g} = \{(2, 0), (3, -1)\}$$

ب) $(\frac{g}{f})(2)$ قابل محاسبه نیست چون $f(2) = 0$ است در نتیجه ۲ در دامنه $\frac{g}{f}$ قرار نمی‌گیرد.

$$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \begin{cases} \left(\frac{g}{f}\right)(0) = \frac{g(0)}{f(0)} = \frac{0}{1} = 0 \\ \left(\frac{g}{f}\right)(3) = \frac{g(3)}{f(3)} = \frac{-1}{-1} = 1 \end{cases}$$

$$\frac{g}{f} = \{(0, 0), (3, 1)\}$$

۲۶) دامنه تابع f و g برابر \mathbb{R} پس اشتراک دامنه این دو تابع برابر \mathbb{R} خواهد بود.

الف)

$$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x) = (x - 2)(6 - 2x) = 6x - 2x^2 - 12 + 4x = -2x^2 + 10x - 12$$

$$(f \times g)(x) = -2x^2 + 10x - 12 \quad D_{f \times g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R}$$

ب) از اشتراک دامنه دو تابع f و g ، مقادیری که $g(x) = 0$ می‌شود را کنار می‌گذاریم:

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\}$$

$$g(x) = 6 - 2x = 0 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow D_{\left(\frac{f}{g}\right)} = \mathbb{R} - \{3\}$$

$$g(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x-2}{6-2x}$$

(پ) از اشتراک دامنه دو تابع f و g مقادیری که $f(x) = 0$ می شود را کنار می گذاریم:

$$D_{\frac{g}{f}} = D_f \cap D_g - \{x | f(x) = 0\}$$

$$f(x) = x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow D_{\frac{g}{f}} = \mathbb{R} - \{2\}$$

$$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{6-2x}{x-2}$$

(۲۷) دامنه دو تابع f و g برابر \mathbb{R} است، پس $D_f \cap D_g = \mathbb{R}$.

(الف)

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = 2x - 1 + 5 - 3x = -x + 4$$

$$(f+g)(x) = -x + 4 \quad D_{f+g} = \mathbb{R}$$

(ب)

$$(g-f)(x) = g(x) - f(x) = 5 - 3x - (2x - 1) = 5 - 3x - 2x + 1 = -5x + 6$$

$$(g-f)(x) = -5x + 6 \quad D_{g-f} = \mathbb{R}$$

(پ)

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = 2x - 1 - (5 - 3x) = 2x - 1 - 5 + 3x = 5x - 6$$

$$(f-g)(x) = 5x - 6 \quad D_{f-g} = \mathbb{R}$$

(۲۸)

$$(f+g)(1) = f(1) + g(1) = a + 1 + 4 = 7 \Rightarrow a + 5 = 7 \Rightarrow a = 2$$

$$(f-g)(-1) = f(-1) - g(-1) = a - b - 5 = -4 \xrightarrow{a=2} 2 - b - 5 = -4 \Rightarrow -b - 3 = -4 \Rightarrow b = 1$$

(۲۹) الف) از سال گذشته به خاطر داریم اگر هزینه را از درآمد کم نماییم، سود به دست می آید.

$$\text{سود} = \text{درآمد (فروش)} - \text{هزینه} \Rightarrow P(x) = R(x) - C(x)$$

سود هر یک از کارخانه ها را مطابق رابطه فوق به دست می آوریم.

کارخانه A:

$$P_A(x) = -2x^2 + 16x - (8x + 6) = -2x^2 + 8x - 6$$

کارخانه B:

$$P_B(x) = -x^2 + 12x - (2x + 9) = -x^2 + 10x - 9$$

تابع سود شرکت هولدینگ از مجموع توابع سود دو کارخانه به دست می آید.

$$\text{سود کارخانه A} + \text{سود کارخانه B} = \text{سود شرکت هولدینگ}$$

$$P_H = -2x^2 + 8x - 6 + (-x^2 + 10x - 9)$$

$$P_H(x) = -3x^2 + 18x - 15 \quad D = \{x | x \geq 0\}$$

توجه داشته باشید مقدار تولید کارخانه ها نمی تواند منفی باشد، به همین دلیل دامنه اشتراک کارخانه A و B را مقادیر صفر و بزرگتر از صفر در نظر می گیریم.

(ب) تابع سود شرکت، یک تابع درجه دوم و نمودار آن به شکل سهمی \cup است.

یادآوری: در تابع درجه دوم به صورت $y = ax^2 + bx + c$ اگر $a < 0$ باشد، سهمی در نقطه به طول $x = \frac{-b}{2a}$ دارای بیشترین مقدار است.

$$P(x) = -3x^2 + 18x - 15 \quad (a = -3, b = 18, c = -15)$$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-18}{2(-3)} \Rightarrow x = 3$$

$$P_{max} = -3(3)^2 + 18(3) - 15 = -27 + 54 - 15 \Rightarrow P_{max} = 12$$

$$f(-1) = -1, \quad g(-1) = 1$$

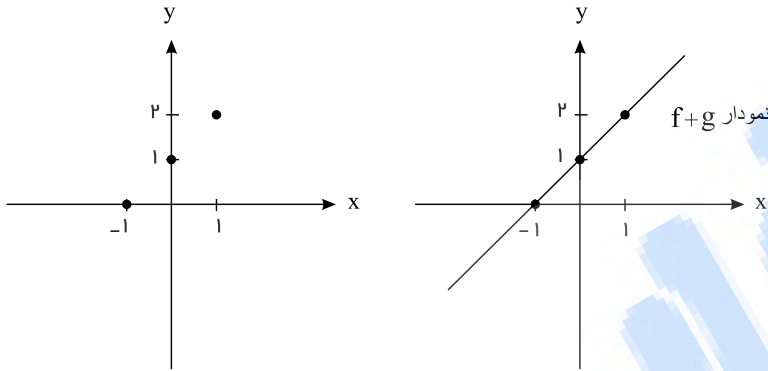
$$\Rightarrow (f+g)(-1) = f(-1) + g(-1) = -1 + 1 = 0 \Rightarrow (-1, 0)$$

$$f(0) = 0, \quad g(0) = 1$$

$$\Rightarrow (f+g)(0) = f(0) + g(0) = 0 + 1 = 1 \Rightarrow (0, 1)$$

$$f(1) = 1, \quad g(1) = 1$$

$$\Rightarrow (f+g)(1) = f(1) + g(1) = 1 + 1 = 2 \Rightarrow (1, 2)$$



$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = x + 1$$

$$f(-1) = 1, \quad g(-1) = -1$$

$$\Rightarrow (f+g)(-1) = f(-1) + g(-1) = 1 + (-1) = 0 \Rightarrow (-1, 0)$$

$$f(0) = 0, \quad g(0) = 0$$

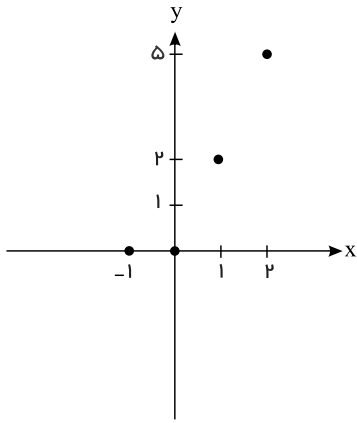
$$\Rightarrow (f+g)(0) = f(0) + g(0) = 0 + 0 = 0 \Rightarrow (0, 0)$$

$$f(1) = 1, \quad g(1) = 1$$

$$\Rightarrow (f+g)(1) = f(1) + g(1) = 1 + 1 = 2 \Rightarrow (1, 2)$$

$$f(2) = 4, \quad g(2) = 1$$

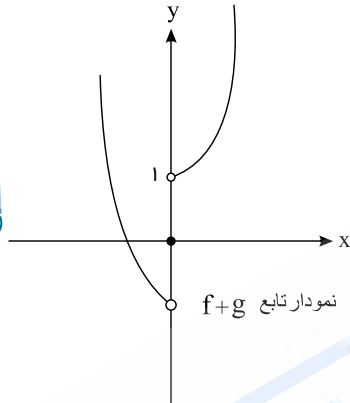
$$\Rightarrow (f+g)(2) = f(2) + g(2) = 4 + 1 = 5 \Rightarrow (2, 5)$$



ضابطه تابع $sign(x)$ را می‌نویسیم و با تابع $f(x)$ به ازای $x > 0$ ، $x = 0$ و $x < 0$ جمع می‌کنیم.

$$f(x) = x^x, \quad g(x) = sign(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (f+g)(x) = f(x) + g(x) = \begin{cases} x^x + 1, & x > 0 \\ x^x, & x = 0 \\ x^x - 1, & x < 0 \end{cases}$$

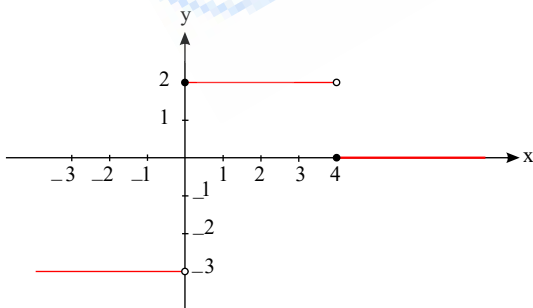


۳۱) تابع چندضابطه‌ای که در هر ضابطه مقدار تابع، عددی ثابت باشد را یک تابع پلکانی می‌نامیم. نمودار مختصاتی توابع پلکانی به صورت نیم خطها یا پاره خطهای موازی محور طولها است.

الف) نمودار تابع پلکانی نیست.

ب) نمودار تابع پلکانی است.

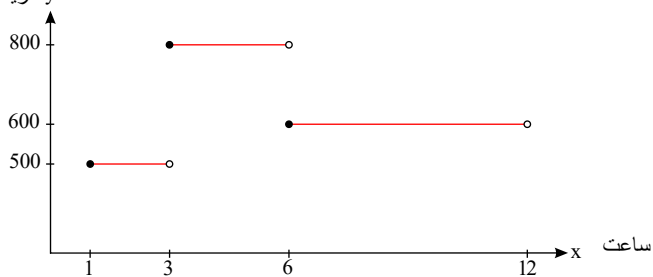
۳۲) ضابطه تابع پلکانی از چند تابع ثابت تشکیل شده است، پس با توجه به مقادیر x ها نمودار مختصاتی این تابع را رسم می‌کنیم.



۳۳) الف) با توجه به صورت مسئله تابع سه ضابطه‌ای به صورت زیر است:

$$f(x) = \begin{cases} 500, & 1 \leq x < 3 \\ 800, & 3 \leq x < 6 \\ 600, & 6 \leq x < 12 \end{cases}$$

y هزینه پارکینگ (تومان)



پ) مساحت زیر نمودار نشان‌دهنده هزینه پرداختی برای توقف در پارکینگ به ازای ساعت‌های استفاده از این پارکینگ است.

۳۴ الف) جزء صحیح هر عدد صحیح برابر خودش است.

$$[-5] = -5$$

ب) جزء صحیح هر عدد غیر صحیح برابر اولین عدد صحیح در سمت چپ عدد مورد نظر روی محور است.

$$[8.3] = 8$$

پ) $\sqrt{5}$ تقریباً برابر 2.2 است.

$$\sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{9} \Rightarrow 2 < \sqrt{5} < 3 \Rightarrow -3 < -\sqrt{5} < -2$$

$$\Rightarrow -1 < 2 - \sqrt{5} < 0 \Rightarrow [2 - \sqrt{5}] = -1$$

ت)

$$\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} \Rightarrow \left[\left(\frac{4}{5}\right)^2\right] = \left[\frac{16}{25}\right] = 0$$

۳۵ الف)

$$[x] = 1 \Rightarrow 1 \leq x < 2$$

ب)

$$[x + 2] = 5 \Rightarrow [x] + 2 = 5 \Rightarrow [x] = 3$$

$$\Rightarrow 3 \leq x < 4$$

پ)

$$[x + 2] = -4 \Rightarrow [x] + 2 = -4 \Rightarrow [x] = -6$$

$$-6 \leq x < -5$$

۳۶ الف)

$$[3x] = 2 \Rightarrow 2 \leq 3x < 3 \Rightarrow \frac{2}{3} \leq x < \frac{3}{3} \Rightarrow \frac{2}{3} \leq x < 1$$

ب)

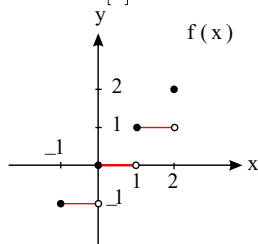
$$[2x - 1] = -3 \Rightarrow -3 \leq 2x - 1 < -2$$

$$\Rightarrow -2 \leq 2x < -1 \Rightarrow -\frac{2}{2} \leq x < -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow -1 \leq x < -\frac{1}{2}$$

۳۷ دامنه تابع را به ۴ بخش تقسیم می‌کنیم و در هر بخش مقدار تابع را به دست می‌آوریم:

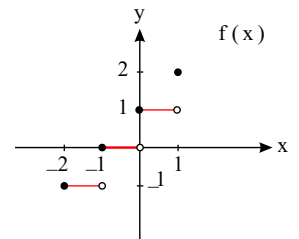
$$\begin{aligned} -1 \leq x < 0 &\Rightarrow [x] = -1 \\ 0 \leq x < 1 &\Rightarrow [x] = 0 \\ 1 \leq x < 2 &\Rightarrow [x] = 1 \\ x = 2 &\Rightarrow [x] = 2 \end{aligned} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} -1 & , -1 \leq x < 0 \\ 0 & , 0 \leq x < 1 \\ 1 & , 1 \leq x < 2 \\ 2 & , x = 2 \end{cases}$$



۳۸ با توجه به خواص جزء صحیح داریم $[x + 1] = [x] + 1$ ، با تقسیم کردن فواصل $-2 \leq x \leq 1$ به قسمت‌های زیر داریم:

$$\begin{aligned}
 -2 \leq x < -1 &\Rightarrow [x] = -2 \Rightarrow [x+1] = [x] + 1 = -2 + 1 = -1 \\
 -1 \leq x < 0 &\Rightarrow [x] = -1 \Rightarrow [x+1] = [x] + 1 = -1 + 1 = 0 \\
 0 \leq x < 1 &\Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow [x+1] = [x] + 1 = 0 + 1 = 1 \\
 x = 1 &\Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow [x+1] = [x] + 1 = 1 + 1 = 2
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} -1, & -2 \leq x < -1 \\ 0, & -1 \leq x < 0 \\ 1, & 0 \leq x < 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$$



۳۹) با توجه به اینکه $1 < \sqrt{1} < 2$ و $1 < \sqrt{2} < 2$ و $1 < \sqrt{3} < 2$ است.

در نتیجه:

$$[\sqrt{1}] = [\sqrt{2}] = [\sqrt{3}] = 1$$

$$[\sqrt{4}] = [\sqrt{5}] = [\sqrt{6}] = [\sqrt{7}] = 2$$

$$[\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + [\sqrt{3}] + [\sqrt{4}] + [\sqrt{5}] + [\sqrt{6}] + [\sqrt{7}] = 3 \times 1 + 4 \times 2 = 11$$

$$[\sqrt{1}] = [\sqrt{2}] = [\sqrt{3}] = 1$$

$$[\sqrt{4}] = [\sqrt{5}] = [\sqrt{6}] = [\sqrt{7}] = [\sqrt{8}] = 2$$

$$[\sqrt{9}] = [\sqrt{10}] = [\sqrt{11}] = [\sqrt{12}] = [\sqrt{13}] = [\sqrt{14}] = [\sqrt{15}] = 3$$

$$[\sqrt{16}] = [\sqrt{17}] = [\sqrt{18}] = [\sqrt{19}] = [\sqrt{20}] = 4$$

$$3 \times 1 + 5 \times 2 + 7 \times 3 + 5 \times 4 = 3 + 10 + 21 + 20 = 54$$

همچنین $2 < \sqrt{4} < 3$ و $2 < \sqrt{5} < 3$ و $2 < \sqrt{6} < 3$ و $2 < \sqrt{7} < 3$ در نتیجه:

و در نهایت داریم:

۴۰) جذر اعداد ۱ تا ۳ بین ۱ و ۲ است.

جذر اعداد ۴ تا ۸ بین ۲ و ۳ است.

جذر اعداد ۹ تا ۱۵ بین ۳ و ۴ است.

جذر اعداد ۱۶ تا ۲۰ بین ۴ و ۵ است.

بنابراین:

۴۱) قدرمطلق هر عدد مثبت برابر خودش و قدرمطلق هر عدد منفی برابر قرینه‌اش است.

$$|3| = 3 \text{ (الف)}$$

$$|-5| = -(-5) = 5 \text{ (ب)}$$

$$|4-5| = |-1| = -(-1) = 1 \text{ (پ)}$$

$$|8-3| = |5| = 5 \text{ (ت)}$$

$$|-\sqrt{5}| = -(-\sqrt{5}) = \sqrt{5} \text{ (ث)}$$

۴۲) قدرمطلق هر عدد مثبت برابر خودش است و قدرمطلق هر عدد منفی برابر قرینه‌اش است.

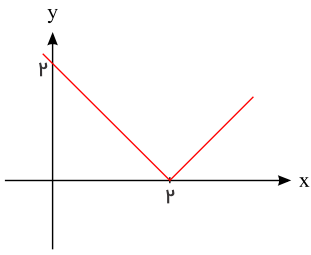
(الف) عدد π تقریباً برابر ۳٫۱۴ است.

$$f(3-\pi) = |3-\pi| \stackrel{3-\pi < 0}{=} -(3-\pi) = -3+\pi$$

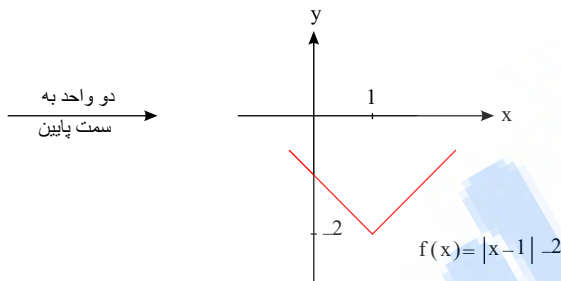
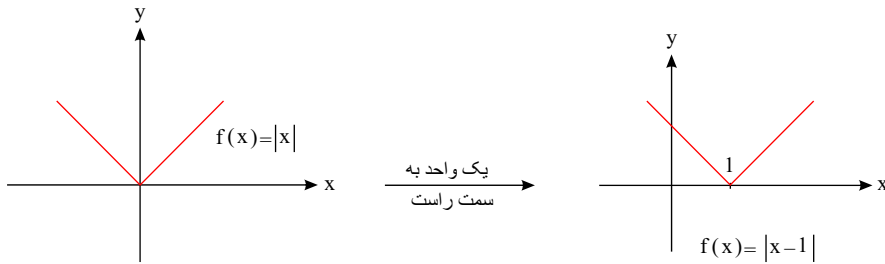
$$f(\pi-2) = |\pi-2| \stackrel{\pi-2 > 0}{=} \pi-2$$

$$\begin{aligned}
 f(\sqrt{3}) &= |2-\sqrt{3}| - |2+\sqrt{3}| \stackrel{2-\sqrt{3} > 0}{=} 2-\sqrt{3} - (2+\sqrt{3}) \\
 &= 2-\sqrt{3}-2-\sqrt{3} = -2\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

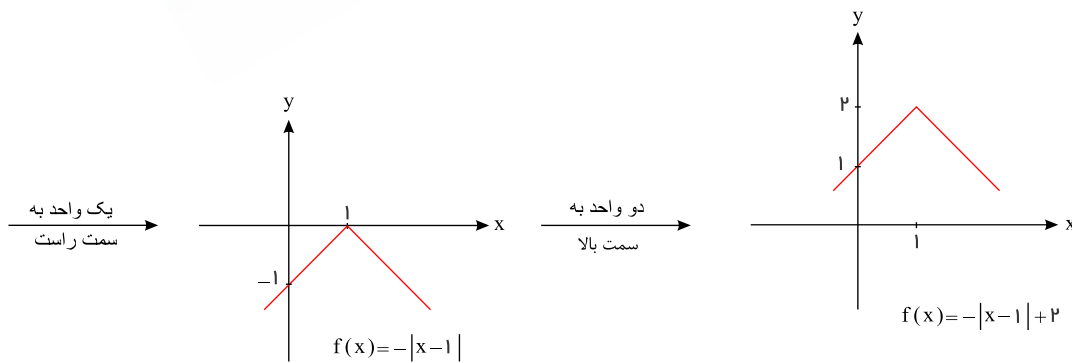
$$f(x) = |x-2| = \begin{cases} x-2, & x \geq 2 \\ -x+2, & x < 2 \end{cases}$$



۴۵) برای رسم نمودار مختصاتی تابع $f(x) = |x - 1| - 2$ ابتدا نمودار مختصاتی تابع $f(x) = |x|$ را یک واحد به سمت راست و سپس دو واحد به سمت پایین منتقل می‌کنیم.



۴۶) برای رسم نمودار مختصاتی تابع $f(x) = -|x - 1| + 2$ ابتدا نمودار مختصاتی تابع $f(x) = |x|$ را نسبت به محور x قرینه می‌کنیم، سپس یک واحد به سمت راست و در آخر دو واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم.



نمودار تابع	جواب تابع g	حدود x
	$g(x) = 2$	$2 \leq x < 3$
	$g(x) = 1$	$1 \leq x < 2$
	$g(x) = 0$	$0 \leq x < 1$
	$g(x) = -1$	$-1 \leq x < 0$
	$g(x) = -2$	$-2 \leq x < -1$

۴۸ در نمایش زوج مرتبی تابع همانی، مؤلفه اول و دوم هر زوج مرتب با هم برابرند.

$$f = \{(3, 3), (5, 5), (3, 25), (6, 6)\}$$

۴۹ الف) خودش

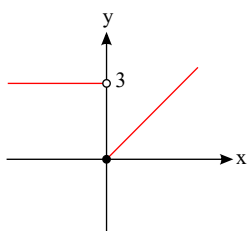
ب) $f(x) = x$

پ) نیمساز ناحیه اول و سوم

ت) همانی

۵۰

این تابع دو ضابطه‌ای برای x های بزرگتر مساوی صفر ($x \geq 0$) تابع همانی و برای x های کوچکتر از صفر ($x < 0$) تابع ثابت $f(x) = 3$ است. بنابراین نمودار آن به صورت زیر است:



۵۱ هر نقطه روی نیمساز ناحیه اول و سوم دارای طول و عرض یکسان است.

روی نیمساز ناحیه اول و سوم

$$(x^2 - 4x + 1, -3) \rightarrow x^2 - 4x + 1 = -3 \Rightarrow x^2 - 4x + 1 + 3 = 0$$

اتحاد مربع دو جمله‌ای

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \rightarrow (x - 2)^2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

۵۲ در نمایش زوج مرتبی تابع ثابت تمام مؤلفه‌های دوم با هم برابرند.

$$f = \{(1, 4), (2, 4), (3, 4)\}$$

۵۳ دو زوج مرتب $(6, a - 1)$, $(6, 3)$ دارای مؤلفه‌های اول یکسان هستند در نتیجه با توجه به تعریف تابع داریم:

$$a - 1 = 3 \Rightarrow a = 4$$

مقدار a را در زوج مرتب‌ها جایگذاری می‌کنیم.

$$\{(4, 3), (6, 3), (3, b + 4), (6, 3), (3, 6)\}$$

دو زوج مرتب $(3, 6)$, $(3, b + 4)$ دارای مؤلفه‌های اول یکسان هستند در نتیجه داریم:

$$b + 4 = 6 \Rightarrow b = 2$$

و در آخر حاصل $a + b$ برابر می‌شود با:

$$a + b = 4 + 2 = 6$$

۵۴ با توجه به زوج مرتب $(3, \sqrt{5})$ حاصل $f(3)$ برابر $\sqrt{5}$ می‌شود.

$$f(3) = \sqrt{5}$$

همچنین با داشتن زوج مرتب $(2, 3, 75)$ داریم:

$$f(2) = 3, 75$$

۵۵ در نمودار یک تابع هر خط موازی محور عرض‌ها، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند؛ با توجه به این مطلب داریم:

(الف) تابع است.

(ب) تابع نیست.

(پ) تابع نیست.

(ت) تابع است.

۵۶

برای رسم نمودار مختصاتی در $-1 \leq x < 3$ با ضابطه $f(x) = x + 1$ نقاط $f(3)$ و $f(-1)$ را مشخص می‌کنیم و پاره خط مربوط به این دو نقطه را به هم وصل می‌کنیم (البته نقطه $f(3)$ را توخالی قرار می‌دهیم چون نقطه ۳ در دامنه ضابطه پایینی است).

$$f(-1) = -1 + 1 = 0 \Rightarrow (-1, 0)$$

$$f(3) = 3 + 1 = 4 \Rightarrow (3, 4)$$

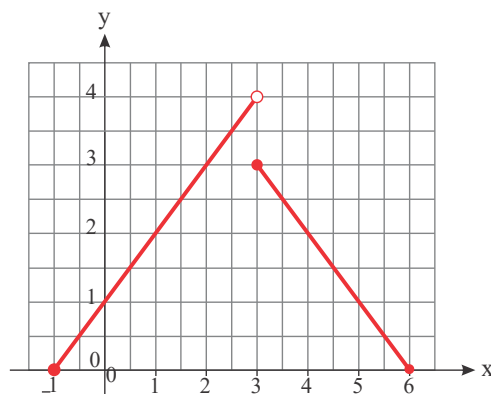
همچنین برای مشخص کردن ضابطه قسمت دوم معادله خطی که از دو نقطه $(3, 3)$ و $(6, 0)$ می‌گذرد را به دست می‌آوریم.

$$\text{شیب خط: } \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - 3}{6 - 3} = \frac{-3}{3} = -1$$

با قراردادن $m = -1$ (شیب خط) در معادله کلی خط $y = mx + b$ و قرار دادن یکی از نقاط عرض از مبدأ خط را به دست می‌آوریم.

$$y = mx + b \xrightarrow{m=-1} y = -x + b \xrightarrow{\text{در معادله صدق می‌کند } (6, 0)} 0 = -6 + b$$

$$\Rightarrow b = 6 \rightarrow y = -x + 6$$



$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & , -1 \leq x < 3 \\ -x + 6 & , 3 \leq x \leq 6 \end{cases}$$

۵۷) چون تعداد لیوان‌های روبه پایین ۲ تا (زوج) و روبه بالا یکی (فرد) است. در هر مرحله تغییر وضعیت تعداد لیوان‌های روبه پایین همواره زوج و روبه بالا همواره فرد است. پس هیچ‌گاه نمی‌توان ۳ لیوان روبه پایین داشت.

۵۸)

$$((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$$

p	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge p$	$((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$
د	د	د	د	د
د	ن	ن	ن	د
ن	د	د	ن	د
ن	ن	د	ن	د

۵۹) الف) $a + 5 = 2a$

ب) $ab = a + b, a, b \in \mathbb{R}$

ج) $a^2 + 3 > a$ یا $a \cdot a + 3 > a$

۶۰)

$$((p \Rightarrow q) \wedge q) \Rightarrow p$$

p	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge q$	$((p \Rightarrow q) \wedge q) \Rightarrow p$
د	د	د	د	د
د	ن	ن	ن	د
ن	د	د	د	ن
ن	ن	د	ن	د

با توجه به اینکه ستون آخر که مربوط به مغالطه است در تمامی حالت‌ها درست نیست پس استدلال به روش مغالطه معتبر نیست.

۶۱) الف) اگر $\sqrt{8}$ عددی گنگ و ۱۴ عددی فرد باشد، آنگاه ۲۴ مضرب ۳ است.

ب) $\sqrt{8}$ عددی گنگ است و ۱۴ عددی فرد است یا ۲۴ مضرب ۳ نیست.

۶۲) ترکیب فصلی دو گزاره زمانی درست است که حداقل یکی از گزاره‌ها درست باشد و زمانی نادرست است که هر دو گزاره نادرست باشند.

۶۳) الف) ابتدا ضابطه تابع $s(x)$ را مشخص می‌کنیم.

$$s(x) = f(x) + g(x) = [x] + |x|$$

دامنه تابع s از اشتراک دامنه‌های توابع f و g به دست می‌آید.

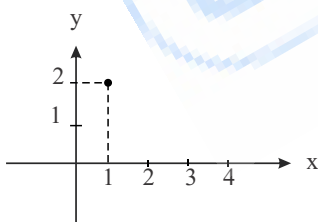
$$D_s = D_f \cap D_g = \{x \mid 0 \leq x \leq 1\} \cap \{x \mid 1 \leq x \leq 2\} = \{1\}$$

دامنه تابع s فقط دارای یک عضو $x = 1$ است، اکنون مقدار تابع s را در این نقطه تعیین می‌کنیم.

$$s(x) = [x] + |x|, \quad x = 1$$

$$s(1) = [1] + |1| = 1 + 1 = 2 \Rightarrow y = 2$$

بنابراین نمودار تابع s نقطه‌ای به مختصات $(1, 2)$ است.



ب) گام اول: ضابطه تابع $q(x)$ را مشخص می‌کنیم.

$$q(x) = \frac{h(x)}{f(x)} = \frac{x^2 - 4}{[x]}$$

گام دوم: دامنه تابع q از اشتراک دامنه‌های توابع f و h ، با حذف مقادیری از x که تابع f (مخرج) را صفر می‌کند، به دست می‌آید.

$$D_h \cap D_f = \{x \mid -1 \leq x \leq 1\} \cap \{x \mid 0 \leq x \leq 1\} = \{x \mid 0 \leq x \leq 1\}$$

$$f(x) = 0 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow 0 \leq x < 1$$

(یادآوری: در فاصله $0 \leq x < 1$ جزء صحیح همه اعداد، صفر می‌شود.)

$$D_q = D_h \cap D_f - \{x \mid f(x) = 0\}$$

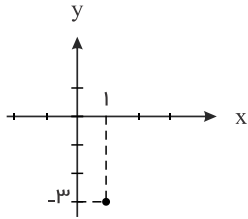
$$D_q = \{x \mid 0 \leq x \leq 1\} - \{x \mid 0 \leq x < 1\} = \{1\}$$

دامنه تابع q فقط دارای یک عضو $x = 1$ است، مقدار تابع q را در این نقطه تعیین می‌کنیم.

$$q(x) = \frac{x^2 - 4}{[x]} \quad x = 1$$

$$q(1) = \frac{1^2 - 4}{[1]} = \frac{-3}{1} = -3 \Rightarrow y = -3$$

بنابراین نمودار تابع q نقطه‌ای به مختصات $(1, -3)$ است.



$$p(x) = h(x) \times g(x) = (x^2 - 4)|x|$$

$$D_p = D_h \cap D_g = \{x | -1 \leq x \leq 1\} \cap \{x | 1 \leq x \leq 2\} = \{1\}$$

$$p(x) = (x^2 - 4)|x|, \quad x = 1$$

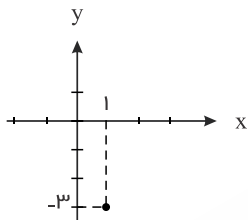
$$p(1) = (1^2 - 4)|1| = (-3) \times 1 = -3 \Rightarrow y = -3$$

ج ضابطه تابع $p(x)$ را به دست می‌آوریم.

دامنه تابع p از اشتراک بین دامنه‌های توابع h و g به دست می‌آید.

دامنه تابع p فقط دارای یک عضو $x = 1$ است، مقدار تابع p را در این نقطه تعیین می‌کنیم.

بنابراین نمودار تابع p نقطه‌ای به مختصات $(1, -3)$ است.



الف) $f(x) = [x]$

$$f(-2, 3) = [-2, 3] = -2$$

$$f(5) = [5] = 5$$

ب) $f(x) = [-x]$

$$f(1, 7) = [-1, 7] = -2$$

$$f(2, 3) = [2, 3] = 2$$

ج) $f(x) = [x] + [-x]$

$$f(1) = [1] + [-1] = 1 + (-1) = 1 - 1 = 0$$

$$x = 1 \in \mathbb{Z} \Rightarrow f(x) = 0$$

$$f(1, 3) = [1, 3] + [-1, 3] = 1 + (-2) = 1 - 2 = -1$$

$$x = 1, 3 \notin \mathbb{Z} \Rightarrow f(x) = -1$$

$$f(1, 7) = [1, 7] + [-1, 7] = 1 + (-2) = 1 - 2 = -1$$

$$x = 1, 7 \notin \mathbb{Z} \Rightarrow f(x) = -1$$

روش دوم:

$$f(2) = [2] + [-2] = 2 + (-2) = 2 - 2 = 0$$

$$x = 2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow f(x) = 0$$

$$\text{د) } f(x) = [3x]$$

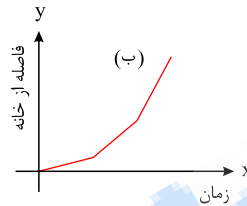
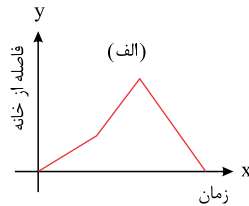
$$f(1) = [3 \times 1] = [3] = 3$$

$$f(0,2) = [3 \times 0,2] = [0,6] = 0$$

$$f(1,3) = [3 \times 1,3] = [3,9] = 3$$

۶۵) نمودار رسم شده، مربوط به داستان قسمت ج است.

نمودار مربوط به هر یک از داستان‌های الف و ب به صورت زیر است.



(تذکر: با توجه به اطلاعات محدود داستان‌ها، نمودارها تقریبی رسم شده‌اند.)

۶۶) برای آنکه زوج مرتب روی نیمساز ناحیه اول و سوم باشد، باید مقدار x (مؤلفه اول) و مقدار y (مؤلفه دوم) با یکدیگر برابر باشند.

$$\text{الف) } (2, n^2 - 3n + 4) \xrightarrow{\text{نیمساز ناحیه اول و سوم}} n^2 - 3n + 4 = 2$$

$$\Rightarrow n^2 - 3n + 4 - 2 = 0 \Rightarrow n^2 - 3n + 2 = 0$$

برای حل معادله درجه دوم فوق بهتر است به جای استفاده از روش کلی (تعیین Δ) از روش تجزیه به کمک اتحاد جمله مشترک استفاده کنیم.

$$n^2 - 3n + 2 = 0 \xrightarrow{\text{جمله مرتب}} (n-1)(n-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n-1=0 \Rightarrow n=1 \\ n-2=0 \Rightarrow n=2 \end{cases}$$

$$\text{ب) } (-1, n^2 - 4n + 2) \xrightarrow{\text{نیمساز ناحیه اول و سوم}} n^2 - 4n + 2 = -1 \Rightarrow n^2 - 4n + 2 + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$n^2 - 4n + 3 = 0 \xrightarrow{\text{جمله مشترک}} (n-1)(n-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n-1=0 \Rightarrow n=1 \\ n-3=0 \Rightarrow n=3 \end{cases}$$

۶۷) در تابع همانی به ازای هر مقدار x ، همان مقدار y به دست می‌آید، بنابراین داریم:

$$\text{تابع همانی} \quad (a, 1) \longrightarrow a = 1$$

$$\text{تابع همانی} \quad (b, 2) \longrightarrow b = 2$$

$$\text{تابع همانی} \quad (c, 5) \longrightarrow c = 5$$

میانگین a و b و c به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\frac{a+b+c}{3} = \frac{1+2+5}{3} = \frac{8}{3}$$

۶۸)

الف) با توجه به یکسان بودن ارزش‌ها در ستون‌های ۴ و ۵ هم ارزی برقرار است.

p	q	$\sim p$	$p \Rightarrow q$	$\sim p \vee q$
د	د	ن	د \Rightarrow د \equiv د	ن \vee د \equiv د
د	ن	ن	د \Rightarrow ن \equiv ن	ن \vee ن \equiv ن
ن	د	د	ن \Rightarrow د \equiv د	د \vee د \equiv د
ن	ن	د	ن \Rightarrow ن \equiv د	د \vee ن \equiv د

هم ارزش

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	$\sim q \Rightarrow \sim p$
د	د	ن	ن	د	$\text{ن} \Rightarrow \text{ن} \equiv \text{د}$
د	ن	ن	د	ن	$\text{ن} \Rightarrow \text{ن} \equiv \text{د}$
ن	د	د	ن	د	$\text{ن} \Rightarrow \text{د} \equiv \text{ن}$
ن	ن	د	د	د	$\text{ن} \Rightarrow \text{د} \equiv \text{ن}$

هم ارزش

ب) باتوجه به یکسان بودن ارزش‌ها در ستون ۵ و ۶ هم ارزی برقرار است.

۶۹) الف) عدد ۲ زوج است، درست است، پس برای آن که ترکیب عطفی درست باشد باید p هم، باید گزاره‌ای درست باشد. پس می‌توان گفت: عدد ۱ نه اول است و نه مرکب: p

ب) $۲ \nmid ۱$ نادرست است. پس باید p درست باشد تا ترکیب فصلی درست باشد. پس می‌توان گفت:

$\sqrt{۲}$ عددی گنگ است: p

پ) $\mathbb{W} \notin \mathbb{W}$ نادرست است و ترکیب عطفی آن با هر گزاره چه درست و چه نادرست، نادرست است پس امکان ندارد، گزاره‌ای به جای p جایگزین نماییم که ارزش گزاره ترکیبی درست شود.

ت) عدد ۷ اول است، درست است، پس ترکیب فصلی آن با هر گزاره‌ای چه درست و چه نادرست، درست است. به طور مثال:

گزاره درست) عدد ۷ فرد است: p

یا

گزاره نادرست) عدد ۷ مربع کامل است: p

۷۰) مرحله پنجم توان ۲ از طرفین تساوی مرحله چهارم حذف شده؛ که این کار نادرست است، زیرا اگر توان دوم دو عدد برابر باشند، ممکن است آن دو عدد برابر یا قرینه هم باشند.

$$x^2 = y^2 \Rightarrow x = \pm y$$

۷۱) الف) جذر یک عدد بزرگتر از واحد از ریشه سوم آن بزرگتر است.

ب) اگر عددی مثبت باشد، آنگاه توان دوم آن عدد هم مثبت خواهد بود.

پ) مجموع مجذور یک عدد مثبت و جذر آن عدد با نصف عدد، به علاوه یک برابر است.

ت) مربع عددی بین صفر و یک از مکعب آن بزرگتر است.

۷۲)

$$۹ > ۰ \text{ یا } ۳^2 > ۰$$

الف)

خطوط L_1 و L_2 موازیند.

ب)

۷۳)

سود کالا = $x - y$ \Rightarrow قیمت فروش کالا: x ، قیمت خرید کالا: y

$$\frac{۱۵}{۱۰۰}x = ۲(x - y)$$

۷۴)

الف) $\frac{۵۰۰ \times ۱۵۰}{۱۰۰} = ۷۵۰$ هزار تومان

ب) $\frac{۲۵۰ \times ۲۶۲}{۱۰۰} = ۶۵۵$ هزار تومان

۷۵)

الف)

$$۱۱ = [11/2] = [0/4 \times 28] = [0/4 \times (8 + 20)] = [11/2] = 11$$

این کتاب، مناسب دانش‌آموزان پایه یازدهم است.

این کتاب، مناسب دانش‌آموزانی است که پایه یازدهم را به پایان رسانده‌اند.

ب

استفاده از این شاخص ساده است. با این حال، فرض می‌کند که کلمات بزرگ‌تر و جملات طولانی‌تر باعث سخت‌تر شدن متن می‌شوند اما یک نویسنده چیره‌دست می‌تواند با کلمات و جملات دیگری باعث ساده‌تر شدن متن شود.

پ

۱- تعداد کلمات در هر جمله ۲- درصد کلمات دشوار

۷۶)

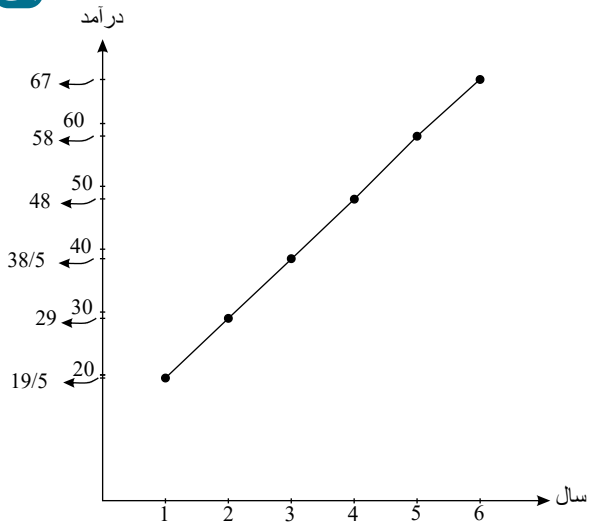
الف) تقریباً برابر ۳۷٫۶ درجه

ب

در ابتدای صبح کم بوده است، سپس افزایش یافته و در انتها باز کاهش یافته است.

در اوایل روز پایین است در اواسط روز افزایش یافته و در اواخر شب دوباره پایین آمده است.

الف



ب

$$\bar{x} = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{21}{6}$$

$$\bar{y} = \frac{19,5 + 29 + 38,5 + 48 + 58 + 67}{6} = \frac{260}{6}$$

معادله خط گذرنده از نقطه میانگین و آخرین داده یعنی $(\frac{21}{6}, \frac{260}{6})$ و $(6, 67)$ را مشخص می‌کنیم.

$$\text{شیب خط} = \frac{67 - \frac{260}{6}}{6 - \frac{21}{6}} = \frac{\frac{402 - 260}{6}}{\frac{36 - 21}{6}} = \frac{142}{15}$$

$$y = ax + b \xrightarrow{\text{شیب} = \frac{142}{15}} y = \frac{142}{15}x + b \xrightarrow{(6, 67)} 67 = \frac{142}{15} \times 6 + b$$

$$\Rightarrow b = \frac{153}{15} \Rightarrow y = \frac{142}{15}x + \frac{153}{15}$$

$$\xrightarrow{x=7} y = \frac{142}{15} \times 7 + \frac{153}{15} = \frac{1147}{15} \approx 76,47$$

۷۸ ابتدا مقدار $f(0)$ را از ضابطه پائینی حساب می‌کنیم.

$$x = f(0) = 0 - 1 = -1$$

$f(-1)$ از ضابطه پائینی f و $g(-1)$ از ضابطه بالایی f به دست می‌آید.

$$\Rightarrow (f + 3g)(-1) = f(-1) + 3g(-1) = (-1 - 1) + 3(-1 + 3) = -2 + 6 = 4$$

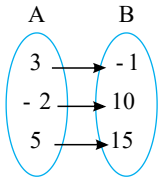
۷۹ الف) اشتراک دامنه‌های دو تابع برابر $\{3, -2, 5\}$ است.

$$(2f - 3g)(3) = 2f(3) - 3g(3) = 2(4) - 3(3) = -1$$

$$(2f - 3g)(-2) = 2f(-2) - 3g(-2) = 2(2) - 3(-2) = 10$$

$$(2f - 3g)(5) = 2f(5) - 3g(5) = 2(0) - 3(-5) = 15$$

پس تابع $2f - 3g$ با نمایش پیکانی به صورت زیر است:

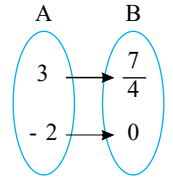


ب) اشتراک دامنه‌های دو تابع برابر $\{3, -2, 5\}$ است، از طرفی چون $f(5) = 0$ است پس دامنه تابع $\frac{f+g}{f}$ برابر $\{3, -2\}$ است.

$$\left(\frac{f+g}{f}\right)(3) = \frac{4+3}{4} = \frac{4+3}{4} = \frac{7}{4}$$

$$\left(\frac{f+g}{f}\right)(-2) = \frac{f(-2)+g(-2)}{f(-2)} = \frac{2+(-2)}{2} = 0$$

نمایش تابع بصورت بیکنی $\frac{f+g}{f}$



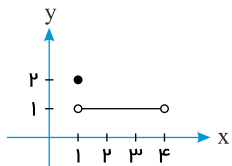
۸۰ الف) به همان مقدار افزایش x ، حجم نیز افزایش پیدا می‌کند.

x	۱	۲	۳	۴
V	۱	۲	۳	۴

ب) $V(x) = 1 \times 1 \times x \Rightarrow V(x) = x$ تابع همانی

پ) با توجه به همانی بودن تابع باید $x = 8$ باشد.

۸۱ این سؤال پاسخ‌های گوناگونی دارد که یکی از آن‌ها به شکل زیر است:



۸۲ با توجه به مشخص بودن ارزش p و q فقط ارزش r و s حالت‌های مختلف می‌گیرد و در کل $2^2 = 4$ حالت داریم.

p	q	r	s
د	ن	د	د
د	ن	د	ن
د	ن	ن	د
د	ن	ن	ن

۸۳ در مرحله ۳، زیرا طرفین معادله با عدد -6 و $-x$ جمع شده است، در حالی که در طرف دوم عدد 6 نوشته شده است.

۸۴

ابتدا ضابطه تابع را برای $x < 0$ ، $0 \leq x < 1$ و $x > 1$ به دست می‌آوریم:

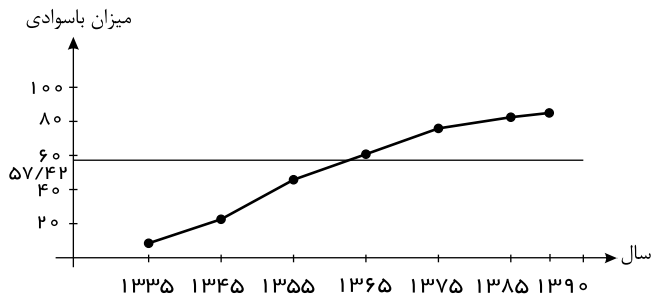
$$\left[\begin{array}{c} 0 \\ -3 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right] \Rightarrow m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-3 - 0}{0 - 1} = 3 \Rightarrow y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 0 = 3(x - 1) \Rightarrow y = 3x - 3$$

$$\left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 6 \\ 5 \end{array} \right] \Rightarrow m = \frac{5 - 0}{6 - 1} = 1 \Rightarrow y - 0 = 1(x - 1) \Rightarrow y = x - 1$$

$$f(x) = \begin{cases} -3 & , (x < 0) \\ 3x - 3 & , (0 \leq x \leq 1) \\ x - 1 & , (x > 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(0) = -3 \\ f(-x^2) = -3 \\ f\left(\frac{1}{3}\right) = 3\left(\frac{1}{3}\right) - 3 = -2 \end{cases}$$

۸۵ الف) میزان باسوادی کل، میانگین میزان باسوادی مرد و زن است. میزان باسوادی مرد و زن را با هم جمع و بر ۲ تقسیم می‌کنیم:

سال	۱۳۳۵	۱۳۴۵	۱۳۵۵	۱۳۶۵	۱۳۷۵	۱۳۸۵	۱۳۹۰
مرد	۱۵٫۲	۲۹	۴۷٫۵	۶۱٫۵۵	۷۹٫۴۵	۸۴٫۵	۸۴٫۷۵



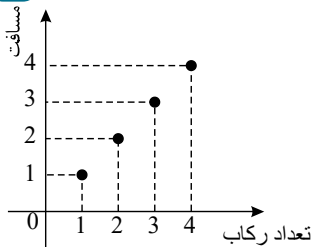
(پ)

$$\text{میانگین درصدها} = \frac{۱۵٫۲ + ۲۹ + ۴۷٫۵ + ۶۱٫۵۵ + ۷۹٫۴۵ + ۸۴٫۵ + ۸۴٫۷۵}{۷} = \frac{۴۰۱٫۹۵}{۷} \approx ۵۷٫۴۲$$

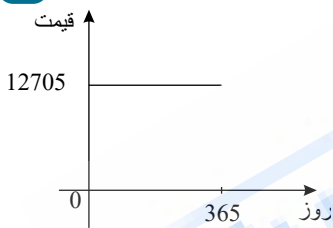
در سال‌های ۱۳۳۵، ۱۳۴۵ و ۱۳۵۵ میزان باسوادی پایین‌تر از میانگین بوده است.

۸۶

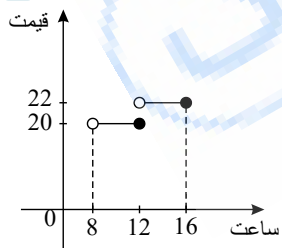
الف



ب



ب



۸۷

الف ثابت

ب خطی - چندضابطه‌ای

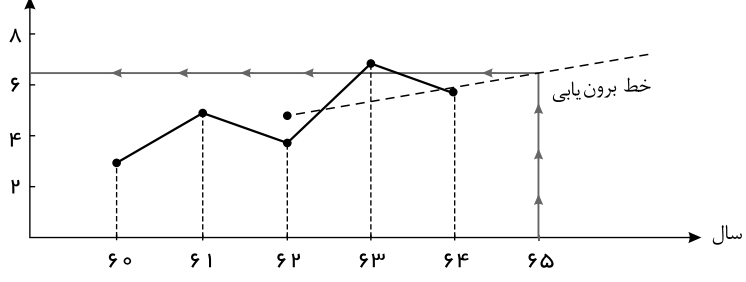
۸۸

الف

$$\text{میانگین سال} = \frac{۶۰ + ۶۱ + ۶۲ + ۶۳ + ۶۴}{۵} = ۶۲$$

$$\text{میانگین فروش} = \frac{۳ + ۵ + ۴ + ۷ + ۶}{۵} = ۵$$

تخمين فروش
در سال 65 حدود
6/5 است.



معادله خط برون يابى بين نقطه ميانگين (5 و 62) و نقطه انتهايى (6 و 64) را مي نويسيم:

ب

$$m = \frac{6 - 5}{64 - 62} = \frac{1}{2}$$

$$y - 6 = \frac{1}{2}(x - 64) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x - 32 + 6 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x - 26$$

فروش در سال 65 $\xrightarrow{x=65} y = \frac{1}{2} \times (65) - 26 = 6,5$

پ

$$E = |\text{مقدار برون يابى} - \text{مقدار واقعى}| = |6,5 - 9| = 2,5$$

با توجه به اينكه مقدارهاى داده شده از روى نمودار قابل محاسبه نيستند، ضابطه تابع را به كمك فرمول معادله خط مي يابيم.

$$\begin{cases} (0, 1) \\ (-3, -1) \end{cases} \Rightarrow m = \frac{1 + 1}{0 + 3} = \frac{2}{3}$$

$$y - 1 = \frac{2}{3}(x - 0) \Rightarrow y = \frac{2}{3}x + 1$$

$$\begin{cases} (0, 1) \\ (1, 0) \end{cases} \Rightarrow m = \frac{1 - 0}{0 - 1} = -1, y - 0 = -1(x - 1) \Rightarrow y = -x + 1$$

$$\begin{cases} (1, 0) \\ (2, 2) \end{cases} \Rightarrow m = \frac{2 - 0}{2 - 1} = 2, y - 0 = 2(x - 1) \Rightarrow y = 2x - 2$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x + 1 & x < 0 \\ -x + 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 2x - 2 & x > 1 \end{cases}$$

الف

$$\Rightarrow f(-1,5) = \frac{2}{3}(-1,5) + 1 = 0$$

ب

$$\Rightarrow f(0,2) = -0,2 + 1 = 0,8$$

پ

$$\Rightarrow f(3) = 2(3) - 2 = 4$$

الف

$$\text{میانگین صادرات} = \frac{\text{مجموع صادرات در ده سال}}{\text{تعداد سال}} = \frac{2510}{10} = 251$$

ب

به کمک نمودار داریم:

$$\frac{\text{صادرات ۳ سال آخر}}{\text{کل صادرات}} \times 100 = \frac{860}{2510} \times 100 \approx 34,26\%$$

پ

مجموع صادرات ۵ سال اول = ۱۱۰۰

مجموع صادرات ۵ سال دوم = ۱۴۱۰

به کمک نمودار داریم:

صادرات در ۵ سال دوم بیشتر بوده است. این کشور در ۵ سال دوم ۳۱۰ میلیون دلار صادرات بیشتری داشته است.

از فایبیلو