

نام و نام خانوادگی:

زمان برگزاری: ۱۴۸۸ دقیقه

نام آزمون: هندسه دوازدهم

تاریخ آزمون: ۱۴۰۱/۱۱/۱۰



شرکت توسعه انتشارات

پرش_۱۱

۱) نشان دهید $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & b & 1 \\ c & d & 1 \end{vmatrix} = 0$ معادله خطی است که از نقاط (a, b) و (c, d) می‌گذرد.

۲) اگر A و B دو ماتریس مربعی وارون‌پذیر از مرتبه n باشند. ثابت کنید:

$$|A^{-1} + B^{-1}| = \frac{|A + B|}{|AB|}$$

۳) اگر $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ اعداد m و n را طوری پیدا کنید به طوری که داشته باشیم $mA^2 + nA + rI = \bar{O}$

۴) اگر A وارون‌پذیر باشد، ثابت کنید.

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

۵) اگر $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -5 \end{bmatrix}$ در این صورت $|A^2|$ را به دست آورید.

۶) ماتریس مربعی A در تساوی $2A^2 - A + I = \bar{O}$ صدق می‌کند. ابتدا نشان دهید A وارون‌پذیر است، سپس وارون A را حساب کنید.

۷) اگر A و B مربعی و وارون‌پذیر باشند، ثابت کنید:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

۸) اگر برای دو ماتریس مربعی A و B داشته باشیم $AB = I$ ، آنگاه ثابت کنید.

الف) A وارون‌پذیر است.

ب) $B = A^{-1}$

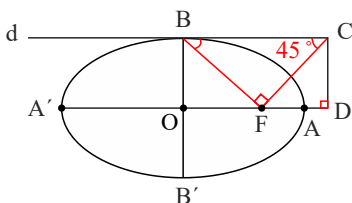
۹) اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ مقادیر α و β را طوری بیابید که داشته باشیم $A^2 = \alpha A + \beta I$.

۱۰) از نقطه $A(2, 3)$ روی دایره $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 3$ مماسی بر دایره رسم کرده‌ایم، معادله این خط مماس را به دست آورید.

۱۱) معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکزش روی خط $d: y = 3x - 8$ باشد و بر محورهای مختصات در ناحیه چهارم مماس باشد.

۱۲) در بیضی مقابل AA' و BB' در قطراند. خط d در نقطه B بر بیضی مماس است. پاره خط BF را رسم می‌کنیم و در نقطه F عمودی بر BF رسم می‌کنیم تا آن را در نقطه‌ای مانند D قطع کند. اگر

$\angle BCF = 45^\circ$ ، مقدار $\frac{AD}{AF}$ را به دست آورید.



۱۳) وضعیت دو دایره $x^2 + y^2 = 1$ و $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ را نسبت به هم مشخص کنید.

۱۴) از رابطه ماتریسی $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ، ماتریس A را محاسبه کنید.

۱۵) اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس A^{100} را به دست آورید؟



۱۶ در مثلث ABC ، نقاط M و N به ترتیب روی AB و AC قرار دارد. چند نقطه روی محیط مثلث MNB می‌توان یافت که از AC و AB به یک فاصله باشد؟ (M و N روی رأس‌های مثلث قرار ندارند).

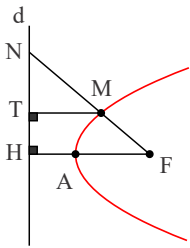
۱۷ اگر a, b دو بردار در فضای سه‌بعدی باشند، ثابت کنید اندازه $a \times b$ از رابطه زیر به دست می‌آید. (θ زاویه بین دو بردار a, b است).
 $|a \times b| = |a| |b| \sin \theta$

۱۸ مقدار m را طوری بیابید که سه بردار $a = 2i + (m+1)j - 3k$ ، $b = 2j + k$ و $c = -i + j + k$ هم‌صفحه باشند.

۱۹ مقدار m را طوری بیابید که تصویر قائم بردار $a = (m-1, 2, -1)$ در امتداد بردار b بردار $a' = (1, 3, -4)$ باشد.

۲۰ به‌ازای هر دو بردار دلخواه u و v نامساوی کوشی - شوارتز را اثبات کنید.

۲۱ در شکل، سهمی با رأس A و کانون F و خط هادی d رسم شده است. از F به نقطه دلخواه M روی سهمی وصل کرده و امتداد داده‌ایم تا d را



در N قطع کند و از نقطه M ، MT را بر d عمود کرده‌ایم. ثابت کنید: $\frac{FN}{FA} = \frac{2NT}{TH}$

۲۲ فرض کنید بتوان یک ماتریس 3×3 مانند A را به صورت حاصلضرب یک ماتریس 3×2 در یک ماتریس 2×3 نوشت. ثابت کنید $|A| = 0$.

۲۳ درستی و نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

الف در حالی که صفحه P بر محور سطح مخروطی (l) عمود باشد و از رأس آن عبور نکند، فصل مشترک حاصل یک دایره خواهد بود.

ب در دستگاه $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}$ ماتریس ضرایب باشد و $|A| \neq 0$ ، در این حالت دستگاه هیچ جوابی ندارد.

پ برای بردار غیر صفر \vec{a} در \mathbb{R}^3 داریم: $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$

۲۴ جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

الف در ماتریس $A = [a_{ij}]_{4 \times 3}$ که در آن $a_{ij} = \frac{2i}{j-1}$ باشد، درایه واقع در سطر سوم و ستون دوم ماتریس A برابر است با:

ب اگر $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ باشد، مقدار $| -A |$ برابر است با

پ اگر \vec{a}, \vec{j} و \vec{k} بردارهای یکه در فضای \mathbb{R}^3 باشند، حاصل $(\vec{i} \times \vec{j}) \cdot \vec{k}$ برابر است با

۲۵ درستی و نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

الف در حالت کلی حاصلضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی دارد.

ب اگر A یک ماتریس 3×3 باشد و $|A| = 2$ ، آنگاه $|2A| = 16$ است.

پ مکان هندسی مرکز همه دایره‌هایی با شعاع ثابت r که بر دایره $C(O, r)$ در صفحه این دایره مماس خارج‌اند، دایره $C'(O, 2r)$ است.

ت در حالی که خروج از مرکز بیضی برابر یک باشد بیضی تبدیل به یک دایره می‌شود.

۲۶ نقاط A, B, C و D در صفحه مفروض‌اند، نقطه‌ای در این صفحه بیابید که از A و B به یک فاصله و از C و D نیز به یک فاصله باشد (بحث کنید).

۲۷ بیضی با طول قطرهای کوچک و بزرگ ۶ و ۱۰ مفروض است، خروج از مرکز بیضی را به دست آورید.

۲۸ اگر $A = \begin{bmatrix} 2x & 5 \\ z & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 & 2x+y \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ ، در این صورت حاصل $(x+y+z)$ را بیابید.

۲۹ اگر $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{k}$ و $\vec{b} = (1, 2, 1)$ باشد، طول بردار $\vec{a} - 2\vec{b}$ را به دست آورید.



۳۰) اگر $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $|A^3|$ را محاسبه کنید.

۳۱) برای دو بردار غیر صفر \vec{a} و \vec{b} ثابت کنید \vec{a} و \vec{b} بر هم عمودند اگر و فقط اگر $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

۳۲) اگر $\vec{a} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ و $\vec{b} = (3, 1, -1)$ و $r = 2$ باشد، بردار $r\vec{b} - \vec{a}$ را به دست آورید.

۳۳) در سهمی $4y^2 + 4y - 2x - 1 = 0$ ، مختصات کانون و رأس و معادله خط هادی را بیابید.

۳۴) نقطه $S = (2, 1)$ رأس سهمی افقی با کانون F می‌باشد. اگر F روی خط $y = -x + 1$ قرار گیرد، مختصات F را مشخص کنید و سپس معادله سهمی را بنویسید.

۳۵) طول کوتاه‌ترین وتر گذرنده از نقطه $A(1, 1)$ در دایره $x^2 - 4x + y^2 - 2y = 4$ را حساب کنید.

۳۶) دایره C به مرکز $O(-1, 1)$ و شعاع ۲، از چند ناحیه مختصات می‌گذرد؟

۳۷) مختصات رأس، کانون و معادله خط هادی سهمی به معادله $x^2 - 4x - 8y - 4 = 0$ را به دست آورید.

۳۸) معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن روی خط $x = y + 2$ بوده و در نقطه‌ای به طول ۵ بر محور x مماس باشد.

۳۹) نوع مقطع مخروطی زیر را تعیین کنید:

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$$

۴۰) معادله سهمی را بنویسید که کانون آن $F(2, 3)$ و خط $x = 4$ هادی آن باشد.

۴۱) برداری عمود بر دو بردار $b = (-2, 1, -5)$ و $a = (1, -3, 2)$ پیدا کنید.

۴۲) اگر $|a| = 3$ و $|b| = 4$ و اندازه تصویر قائم بردار a بر امتداد بردار b برابر ۲ باشد، مساحت مثلث ساخته شده روی دو بردار $2a + 3b$ و $b - 2a$ را به دست آورید.

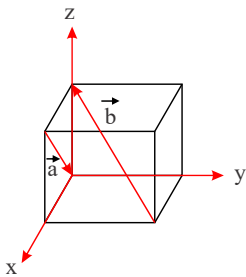
۴۳) کدام یک از موارد زیر درست و کدام یک نادرست است؟

الف) اگر بردار a یک ضلع متوازی‌الاضلاع و بردار d یک قطر آن باشد، مساحت متوازی‌الاضلاع برابر است با: $S = |a \times d|$

ب) اگر d و d' قطرهای یک متوازی‌الاضلاع باشند، مساحت متوازی‌الاضلاع برابر است با: $S = |d \times d'|$

۴۴) اگر زاویه دو بردار u و v با محور x به ترتیب $\frac{3\pi}{4}$ و $\frac{\pi}{3}$ بوده و $|u| = \sqrt{2}$ و $|v| = 2$ باشند، اندازه تصویر قائم بردار $u + v$ روی محور x ها را به دست آورید.

۴۵) در مکعب مقابل زاویه بین دو بردار \vec{a} و \vec{b} را به دست آورید.



۴۶) سه بردار a, b, c به طول یک واحد مفروض‌اند. در صورتی که $\vec{c} = 2a + 3b + 4c = 0$ اندازه بردار $3a + 4b$ را به دست آورید.

۴۷) برای دو بردار غیر صفر a و b رابطه $|2a - b| = |a + b|$ برقرار است. درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

$$\text{الف) } (2b - a) \perp a \quad \text{ب) } |a| = 2|b|$$

۴۸) بردار غیر صفر $V = (|a|, a, a - |a|)$ مفروض است. درستی و نادرستی هریک از عبارات زیر را تعیین کنید:

الف) اگر V بر محور z عمود باشد، زاویه آن با محور oy حاده است.

ب) اگر V با محور z زاویه منفرجه بسازد، زاویه آن با محور oy حاده است.

ب) اگر V با محور y زاویه حاده بسازد، زاویه آن با محور ox حاده و عمود بر محور z هاست.

۴۹) فرض کنید زاویه بین دو بردار a و b حاده بوده و $|a| = 2$ و $|b| = \sqrt{2}$ باشد. اگر $|2a + b|^2 = 12a \cdot b$ ، اندازه تصویر قائم بردار a در امتداد بردار b را به دست آورید.



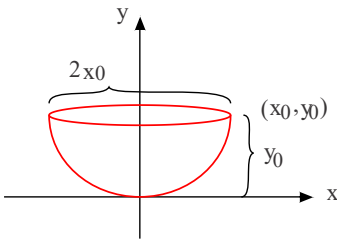
۵۰ فرض کنید $A(2, -1, 1)$ ، $B(3, 2, -1)$ و M نقطه‌ای در فضا باشد به طوری که $\vec{AM} \cdot \vec{BM} = \frac{7}{2}$ فاصله نقطه M تا وسط پاره خط AB را به دست آورید.

۵۱ مختصات رأس و کانون سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + c$ را به دست آورید. ($a \neq 0$)

۵۲ ثابت کنید خط $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ بر سهمی به معادله $y^2 - 2y + x + 1 = 0$ مماس است و مختصات نقطه تماس را بیابید.

۵۳ مختصات کانون و همچنین معادله سهمی را به رأس $A(4, 6)$ و خط هادی $x = 9$ بنویسید.

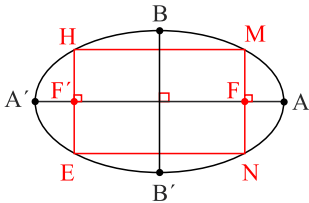
۵۴ یک دانش آموز با دیدن دو دیش مخابراتی با ابعاد متفاوت و مشاهده فاصله کانونی متفاوت آن به این فکر افتاد که چگونه می توان با داشتن یک دیش فاصله کانونی آن را به دست آورد. او از معلمش خواست که فرمولی برای محاسبه فاصله کانونی یک دیش به او بگوید. معلم به او گفت: باید قطر دهانه دیش را در خودش ضرب کرد و حاصل ضرب را بر اندازه گودی (عمق) دیش تقسیم کرد و عدد حاصل را بر ۱۶ تقسیم کرد. حاصل فاصله کانونی دیش است. دلیل درستی این دستور را با توجه به سهمی رسم شده در شکل مقابل و فرمول سهمی توضیح دهید.



۵۵ ثابت کنید اگر M نقطه‌ای بیرون بیضی باشد آنگاه مجموع فواصل M از دو کانون بیشتر از $2a$ است.

۵۶ ثابت کنید مکان هندسی مرکز دایره‌هایی که بر دو دایره متداخل $C_1(O_1, R_1)$ و $C_2(O_2, R_2)$ مماس اند، یک بیضی می باشد.

۵۷ در شکل مقابل طول قطر بزرگ برابر ۴۰ و طول قطر کوچک برابر ۲۴ می باشد. محیط و مساحت مستطیل $MNEH$ را به دست آورید.



۵۸ ثابت کنید در هر بیضی طول کوتاه ترین وتر کانونی برابر است با: $MN = \frac{2b^2}{a}$

۵۹ وضعیت هریک از جفت دایره‌های زیر را نسبت به هم مشخص کنید:

الف) $x^2 + y^2 - 2x = 1$, $x^2 + y^2 = 1$

ب) $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 19 = 0$

۶۰ هرگاه صفحه‌ای شامل محور یک سطح مخروطی، آن را برش دهد، فصل مشترک (مقطع) حاصل چیست؟

۶۱ ثابت کنید مکان هندسی نقاطی که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله اند، نیمساز آن زاویه است.

۶۲ اگر $A = \begin{bmatrix} 4 & a \\ b & -1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ مقادیر a و b را طوری بیابید که حاصل ضرب $A \times B$ ماتریسی قطری باشد.

۶۳ درمیان ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$ را بر حسب سطر سوم بیابید. چه نتیجه‌ای می گیرید؟

۶۴ فرض کنید $A(-3, 6, 2)$ ، $B(2, 1, 2)$ و C نقطه‌ای روی پاره خط AB باشد. اگر $|AC| = 4|BC|$ ، مختصات نقطه C را به دست آورید.

۶۵ در متوازی الاضلاع $ABCD$ ، اگر $\vec{BA} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ و $\vec{BD} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ باشد، طول قطر AC را به دست آورید.

۶۶ دو بردار $a = (0, 0, -4)$ و $b = (-2, 1, 2)$ در فضا مفروض اند. برداری به طول $4\sqrt{6}$ را به دست آورید که در خلاف راستای نیمساز داخلی زاویه بین دو بردار a و b باشد.

۶۷ اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ مطلوب است محاسبه A^{10} .



۶۸ جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.

الف) ماتریس قطری که درایه‌های روی قطر اصلی آن با هم برابر باشند، ماتریس می‌نامیم.

ب) حاصل ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی

۶۹ بردارهای $\vec{a} = (1, -3, 2)$ و $\vec{b} = (-2, 1, -5)$ را در نظر بگیرید.

الف) تصویر قائم بردار \vec{a} را بر امتداد بردار \vec{b} به دست آورید.

ب) برداری عمود بر دو بردار \vec{a} و \vec{b} بنویسید.

۷۰ جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

الف) مکان هندسی نقاطی از صفحه که از یک خط ثابت در آن صفحه و از یک نقطه ثابت غیرواقع بر آن خط در آن صفحه به یک فاصله باشند را می‌نامیم.

ب) اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ باشد، مقدار $|A|$ برابر است با

پ) اگر برای دو بردار \vec{a} و \vec{b} داشته باشیم: $|\vec{a} \cdot \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}|$ ، در این صورت زاویه بین دو بردار \vec{a} و \vec{b} برابر است.

۷۱ مساحت متوازی‌الاضلاعی را به دست آورید که توسط دو بردار $\vec{a} = (3, 2, 1)$ و $\vec{b} = (2, 0, 1)$ به وجود می‌آید.

۷۲ نقاط $A = (1, 2, 1)$ و $B = (2, 2, 1)$ و $C = (3, 2, -1)$ را در فضا در نظر می‌گیریم، کدام یک روی خط $\begin{cases} y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$ قرار دارند؟ چرا؟

۷۳ اگر $A = [a_{ij}]$ یک ماتریس 3×3 با درآیه‌های $a_{ij} = \begin{cases} i - j & , i < j \\ 2 & , i = j \\ i + j & , i > j \end{cases}$ باشد، درآیه‌های a_{12}, a_{31}, a_{33} را به دست آورید.

۷۴ اگر $2A - I + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ و مجموعه درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس A برابر با ۵ باشد، مقدار m را بیابید.

۷۵ درون مثلث ABC ، چند نقطه وجود دارد که از ضلع BC به فاصله L و از AB و AC یا امتداد آنها به یک فاصله باشد؟ در صفحه مثلث چطور؟

۷۶ خط مورب L ، دو خط موازی d و d' را در نقاط A و B قطع می‌کند. مکان هندسی محل برخورد نیمساز زوایای A و B را با جابه‌جایی خط L بیابید.

۷۷ مربع $ABCD$ به طول ضلع a مفروض است. مکان هندسی نقاطی درون مربع را بیابید که فاصله آنها از مرکز مربع بین $\frac{a}{2}$ و $\frac{\sqrt{2}}{2}a$ باشد.

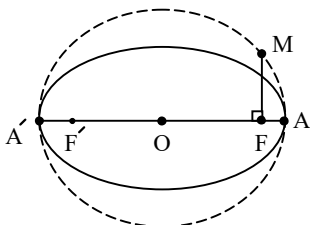
۷۸ به ازای چه مقادیری از k و m دستگاه مقابل بی‌شمار جواب دارد؟

$$\begin{cases} -2x + ky = 2 \\ 4x - 6y = m \end{cases}$$

۷۹ الف) مختصات رأس، کانون و معادله خط هادی سهمی $x^2 - 4y + 8x = 0$ را به دست آورید.

ب) نمودار سهمی را با استفاده از نقاط کمکی رسم کنید.

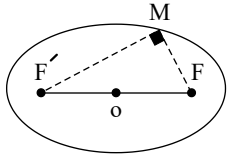
۸۰ قطر دایره C مانند شکل، قطر بزرگ بیضی است و از کانون F عمودی بر AA' رسم کرده‌ایم تا دایره را در نقطه‌ای مانند M قطع کند. ثابت کنید MF با نصف قطر کوچک بیضی برابر است.





۸۱) نقطه M روی بیضی به اقطار ۶ و ۱۰ واحد به گونه‌ای قرار دارد که فاصله آن تا مرکز بیضی برابر ۴ واحد است. در صورتی که بدانیم مثلث $MF'F'$ در رأس M قائم‌الزاویه است، طول MF را به دست آورید. (F' و F کانون‌های بیضی هستند).

طبق فرض داریم: $b = 3 \rightarrow 2b = 6$ و $a = 5 \rightarrow 2a = 10$



۸۲) وضعیت خط $3x + y = 0$ را نسبت به دایره $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7 = 0$ مشخص کنید.

۸۳) بردارهای $\vec{a} = (1, 2, 3)$ و $\vec{b} = (-2, 0, 2)$ مفروض‌اند:

الف) تصویر قائم بردار \vec{a} بر امتداد بردار \vec{b} را به دست آورید.

ب) طول بردار $2\vec{a} - \vec{b}$ را محاسبه کنید.

۸۴) دو بردار $\vec{a} = (3, -2, 1)$ ، $\vec{b} = -2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ را در نظر بگیرید.

الف) بردار \vec{a} در کدام ناحیه از فضای \mathbb{R}^3 واقع است؟ (شماره ناحیه ذکر شود).

ب) طول بردار $\vec{a} + 2\vec{b}$ را حساب کنید.

پ) برداری عمود بر دو بردار \vec{a} و \vec{b} را به دست آورید.

۸۵) درستی و نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.

الف) حاصل ضرب ماتریس 1×3 در ماتریس 3×1 ، یک عدد است.

ب) اگر $A \times B = \vec{0}$ باشد، آنگاه $A = \vec{0}$ یا $B = \vec{0}$.

۸۶) جاهای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید.

الف) ماتریس قطری ماتریسی است که

ب) ماتریس اسکالر، ماتریسی است که

۸۷) درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.

الف) اگر خط d در نقطه M بر بیضی مماس شود، زاویه MF' و MF با خط d برابرند. (F' و F کانون‌ها هستند).

ب) در سهمی با کانون F و خط هادی d ، مرکز هر دایره که از F بگذرد و بر خط d مماس باشد، روی سهمی است.

۸۸) درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.

الف) مجموع طول‌های دو بردار \vec{a} و \vec{b} از طول بردار $\vec{a} + \vec{b}$ کمتر نیست.

ب) خط $\begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases}$ با محور z موازی است.

۸۹) درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.

الف) برای بردارهای غیر صفر a و b و c ، اگر $a \times b = a \times c$ آنگاه داریم: $b = c$

ب) برای بردارهای غیر صفر a و b و c ، اگر $a \cdot b = a \cdot c$ آنگاه داریم: $b = c$

۹۰) دو بردار $\vec{a} = (1, 2, -1)$ و $\vec{b} = (0, 2, -1)$ را در نظر بگیرید.

الف) بردار \vec{a} در کدام ناحیه از فضای \mathbb{R}^3 واقع است؟ (شماره ناحیه ذکر شود).

ب) طول بردار $2\vec{a} - \vec{b}$ را به دست آورید.



پاسخنامه تشریحی

۱) معادله خطی که از نقاط (a, b) و (c, d) می‌گذرد به شکل زیر است:

$$y - b = \frac{b - d}{a - c}(x - a) \rightarrow y = \left(\frac{b - d}{a - c}\right)x - \left(\frac{ab - ad}{a - c}\right) + b$$

$$\rightarrow y = \left(\frac{d - b}{c - a}\right)x + \frac{bc - ad}{c - a}$$

مطابق روش ساروس داریم:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & b & 1 \\ c & d & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x & y \\ a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (bx + yc + ad) - (ay + dx + bc) = 0$$

$$(b - d)x + (c - a)y + (ad - bc) = 0$$

$$(c - a)y = (d - b)x + (bc - ad)$$

$$y = \left(\frac{d - b}{c - a}\right)x + \frac{bc - ad}{c - a}$$

$$\frac{|A + B|}{|AB|} = \frac{|A + B|}{|A| |B|} = \frac{1}{|A|} \frac{|A + B|}{|B|}$$

$$= |A^{-1}| |A + B| |B^{-1}| = |A^{-1}(A + B)B^{-1}| = |(I + A^{-1}B)B^{-1}| = |B^{-1} + A^{-1}|$$

$$A^r = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31 & 18 \\ 12 & 7 \end{bmatrix}$$

$$mA^r + nA + rI = \bar{0} \rightarrow \begin{bmatrix} 31m & 18m \\ 12m & 7m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5n & 3n \\ 2n & n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix} = \bar{0}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 31m + 5n + r & 18m + 3n \\ 12m + 2n & 7m + n + r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} 18m + 3n = 0 \\ 12m + 2n = 0 \end{array} \right\} \rightarrow 6m + n = 0 \Rightarrow n = -6m$$

با جایگذاری $n = -6m$ در درایه‌های دیگر نتیجه می‌گیریم $r = -m$; پس با فرض $m = 1$ مقادیر $n = -6$ و $r = -1$ به دست می‌آیند.

$$A^{-1}A = I \xrightarrow{\text{از طرفین دترمینان می‌گیریم}} |A^{-1}A| = |I|$$

$$\rightarrow |A^{-1}| |A| = 1 \rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

۵) می‌دانیم $|A^n| = |A|^n$ بنابراین داریم:

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -5 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} = -30$$

$$\rightarrow |A^r| = |A|^r = (-30)^r = 900$$

$$-2A^r + A = I \rightarrow A(-2A + I) = I \rightarrow |A| |I - 2A| = |I|$$

$$\rightarrow |A| |I - 2A| = 1 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow A \text{ وارون پذیر است.}$$

$$A(I - 2A) = I \rightarrow A^{-1} = I - 2A$$

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A \underbrace{(BB^{-1})}_I A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1} \underbrace{(A^{-1}A)}_I B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$$

۷) طبق تعریف وارون باید ضرب AB و $B^{-1}A^{-1}$ برابر I باشد.



$$AB = I \rightarrow |AB| = |I| \rightarrow |A| |B| = 1 \rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow$$

پس A وارون پذیر است.

(ب)

$$AB = I \xrightarrow{\text{ضرب در } A^{-1}} A^{-1}(AB) = A^{-1}I$$

$$\rightarrow (A^{-1}A)B = A^{-1} \rightarrow IB = A^{-1} \rightarrow B = A^{-1}$$

۹

$$A^r = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix}$$

$$\alpha A = \begin{bmatrix} \alpha & 2\alpha \\ 3\alpha & 4\alpha \end{bmatrix}, \beta I = \begin{bmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$$

$$A^r = \alpha A + \beta I \rightarrow \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha + \beta & 2\alpha \\ 3\alpha & 4\alpha + \beta \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} \alpha = 5 \\ \beta = 2 \end{cases}$$

۱۰

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 5$$

$$O(1,1), A(2,3) \rightarrow m_{OA} = \frac{y_A - y_o}{x_A - x_o} = \frac{3-1}{2-1} = 2 \xrightarrow{\text{شیب خط مماس}} m' = -\frac{1}{2} \rightarrow y-3 = -\frac{1}{2}(x-2)$$

۱۱ اگر دایره‌ای در ناحیه چهارم بر محورهای مماس باشد، مرکز آن به صورت $O(R, -R)$ می‌باشد که شعاع دایره است. داریم:

$$O \in d \Rightarrow -R = 3R - 1 \Rightarrow R = 2 \text{ و } O(2, -2)$$

$$\text{معادله دایره: } (x-2)^2 + (y+2)^2 = 4$$

۱۲

$$\hat{B} = \hat{C} = 45^\circ \rightarrow \left. \begin{array}{l} BF = FC \\ BF = a \end{array} \right\} \rightarrow BF = FC = a$$

$$\hat{BFC}: \left. \begin{array}{l} a^r + a^r = BC^r \rightarrow BC = a\sqrt{2} \\ OD = BC \end{array} \right\} \rightarrow BC = OD = a\sqrt{2}$$

$$AD = OD - OA = a\sqrt{2} - a = a(\sqrt{2} - 1)$$

$$\hat{CFD} = \hat{FCD} = 45^\circ \rightarrow DF = DC$$

$$\hat{FDC}: DF^r + DC^r = a^r \rightarrow DF^r = \frac{a^r}{2} \rightarrow DF = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$$

$$AF = FD - AD = \frac{\sqrt{2}}{2}a - (a\sqrt{2} - a) = a\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2} + 1\right) = a\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\frac{AD}{AF} = \frac{a(\sqrt{2}-1)}{a\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \frac{\sqrt{2}-1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}-1}{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}$$

۱۳ مرکز و شعاع دایره $(x-1)^2 + y^2 = 1$ برابر است با: $O = (1, 0), r = 1$ و مرکز و شعاع دایره $x^2 + (y-1)^2 = 1$ برابر $O' = (0, 1), r' = 1$ فاصله دو مرکز برابر $OO' = \sqrt{2}$ است و $r + r' = 2$ و $r - r' = 0$ پس:دو دایره متقاطع اند. $|r - r'| < OO' < r + r' \Rightarrow$

۱۴

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow BAC = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \underbrace{B^{-1}BAC}_{I} \underbrace{CC^{-1}}_{I} = B^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} C^{-1} \Rightarrow A = B^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} C^{-1}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow |B| = 4 - 3 = 1$$

$$\Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow |C| = 9 - 10 = -1$$



$$\Rightarrow C^{-1} = \frac{1}{-1} \times \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

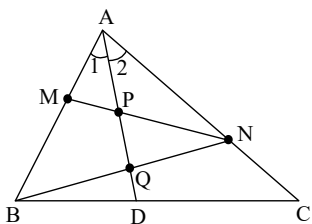
$$A = B^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} C^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31 & 19 \\ -49 & -30 \end{bmatrix}$$

۱۵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} = -4I$$

$$A^{100} = (A^4)^{25} = (-4I)^{25} = -(4^{25}) \times I^{25} = -(4^{25})I$$



۱۶

مکان هندسی نقاطی که از AB و AC به یک فاصله‌اند، نیمساز زاویه A می‌باشد.
محل برخورد نیمساز AD با MN و PQ پاسخ مسئله می‌باشد. (نقاط P و Q)

۱۷

فرض: $\begin{cases} a = (a_1, a_2, a_3) \\ b = (b_1, b_2, b_3) \end{cases} \rightarrow a \times b = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$

توان دوم اندازه

$$\rightarrow |a \times b|^2 = (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2$$

$$= a_2^2 b_3^2 + a_3^2 b_2^2 - 2a_2 a_3 b_2 b_3 + a_3^2 b_1^2 + a_1^2 b_3^2 - 2a_1 a_3 b_1 b_3 + a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 - 2a_1 a_2 b_1 b_2$$

$$= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - \underbrace{(a_1^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 + a_3^2 b_3^2 + 2a_1 a_2 b_1 b_2 + 2a_1 a_3 b_1 b_3 + 2a_2 a_3 b_2 b_3)}_{(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 = (a \cdot b)^2}$$

$$= |a|^2 |b|^2 - (a \cdot b)^2 = |a|^2 |b|^2 - |a|^2 |b|^2 \cos^2 \theta$$

$$= |a|^2 |b|^2 (1 - \cos^2 \theta) = |a|^2 |b|^2 \sin^2 \theta = (|a| |b| \sin \theta)^2 \xrightarrow{\text{جذر}} |a \times b| = |a| |b| \sin \theta$$

۱۸

حجم دترمینان 3×3 به روش ساروس:

$$V = 0 \Rightarrow \text{سه بردار هم‌صفحه‌اند.}$$

$$V = |a \cdot (b \times c)| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & m+1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$|(4 - m - 1 + 0) - (6 + 2 + 0)| = 0 \Rightarrow m = -5$$

۱۹ اگر $a' = (1, 3, -4)$ تصویر قائم بردار $a = (m - 1, 2, -1)$ در امتداد بردار b باشد، می‌دانیم:

$$a \cdot a' = |a'|^2$$

زیرا:

$$\begin{cases} a \cdot a' = a \cdot \frac{a \cdot b}{|b|^2} b = \frac{(a \cdot b)}{|b|^2} (a \cdot b) = \frac{(a \cdot b)^2}{|b|^2} = |a'|^2 \\ a' = \frac{a \cdot b}{|b|^2} b \Rightarrow |a'| = \frac{|a \cdot b|}{|b|^2} |b| = \frac{|a \cdot b|}{|b|} \end{cases}$$

$$a \cdot a' = |a'|^2 \Rightarrow m - 1 + 6 + 4 = 1 + 9 + 16 \Rightarrow m = 17$$

۲۰ نامساوی کوشی-شوارتز:

$$|u \cdot v| \leq |u| |v|$$

طبق تعریف ضرب داخلی داریم:

$$u \cdot v = |u| |v| \cos \theta$$

$$\xrightarrow{\text{اندازه}} |u \cdot v| = ||u| |v| \cos \theta| = |u| |v| |\cos \theta| \Rightarrow |u \cdot v| \leq |u| |v|$$

$$-1 \leq \cos \theta \leq 1 \Rightarrow |\cos \theta| \leq 1$$



۲۱) فاصله هر نقطه روی سهمی تا خط هادی برابر فاصله آن تا کانون است. بنابراین:

$$MT = MF, FA = AH$$

$$\left. \begin{aligned} MT \parallel FH &\rightarrow \frac{MT}{FH} = \frac{NT}{NH} \rightarrow \frac{MT}{\sqrt{FA}} = \frac{NT}{NH} \\ MT \parallel FH &\rightarrow \frac{MF}{FN} = \frac{TH}{HN} \rightarrow \frac{MT}{FN} = \frac{TH}{NH} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{طرفین دو تساوی را بر هم} \\ \text{تقسیم می‌کنیم} \end{array} \rightarrow \frac{\frac{MT}{\sqrt{FA}}}{\frac{MT}{FN}} = \frac{\frac{NT}{NH}}{\frac{TH}{NH}}$$

$$\rightarrow \frac{FN}{\sqrt{FA}} = \frac{NT}{TH} \rightarrow \frac{FN}{FA} = \frac{\sqrt{NT}}{TH}$$

۲۲) فرض کنیم $B = \begin{bmatrix} x & y \\ p & q \\ r & s \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$ در این صورت داریم:

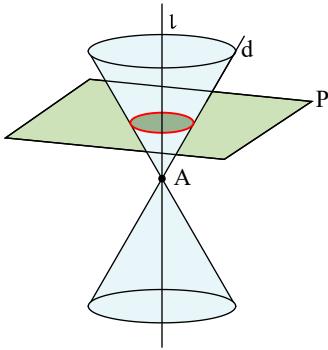
$$A = B \times C \Rightarrow |A| = |BC| = \begin{vmatrix} x & y \\ p & q \\ r & s \end{vmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & 0 \\ p & q & 0 \\ r & s & 0 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x & y & 0 \\ p & q & 0 \\ r & s & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \times 0 = 0$$

۲۳

درست

الف



ب نادرست

پ درست

۲۴

الف

$$a_{ij} = \frac{2i}{j-1} \Rightarrow a_{33} = \frac{2 \times 3}{3-1} = 6$$

ب

$$|-A| = (-1)^3 |A| = -8$$

$$\text{توجه: } A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 8$$

پ

$$\vec{k} \cdot (\underbrace{\vec{i} \times \vec{j}}_k) = |\vec{k}|^2 = 1$$

۲۵

نادرست

الف

در حالت کلی ماتریس خاصیت جابه‌جایی ندارد. برای مثال $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید:

$$\left. \begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ BA &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \Rightarrow AB \neq BA$$

ب



$$|2A| = (2)^r |A| \stackrel{|A|=2}{=} 8 \times 2 = 16 \text{ درست}$$

$$|kA| = k^n |A|$$

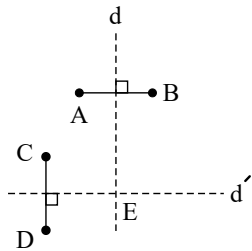
می‌دانیم: اگر ماتریس A به صورت $n \times n$ باشد، داریم:

پ درست

ت نادرست

۲۶ مکان هندسی نقاطی که از A و B به یک فاصله‌اند، عمودمنصف پاره‌خط AB است این خط را d می‌نامیم؛ همچنین مکان هندسی نقاطی که از دو نقطه C و D به یک فاصله باشد،

عمودمنصف پاره‌خط CD است این خط را d' می‌نامیم.
بنابراین نقطه برخورد خطوط d و d' جواب مسئله است. (نقطه E)
اگر خطوط d و d' متقاطع باشند، مسئله یک جواب دارد.
اگر خطوط d و d' منطبق باشند، مسئله بی‌شمار جواب دارد.
اگر خطوط d و d' موازی باشند، مسئله جواب ندارد.



۲۷ با توجه به تعریف بیضی داریم:

$$\text{قطر بزرگ: } 2a = 10 \Rightarrow a = 5$$

$$\text{قطر کوچک: } 2b = 6 \Rightarrow b = 3$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow (5)^2 = (3)^2 + c^2 \Rightarrow c = 4$$

$$\text{خروج از مرکز: } \frac{c}{a} = \frac{4}{5}$$

می‌دانیم:

۲۸

$$A = B \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 2x + y \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 5 \\ z & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 3 \rightarrow x = \frac{3}{2} \\ 2x + y = 5 \rightarrow y = 2 \rightarrow x + y + z = \frac{3}{2} \\ z = -2 \end{cases}$$

۲۹

$$\vec{a} - 2\vec{b} = (2, 0, -1) - (2, 4, 2) = (0, -4, -3), |\vec{a} - 2\vec{b}| = \sqrt{16 + 9} = 5$$

۳۰ دترمینان ماتریس A را با بسط نسبت به ستون اول محاسبه می‌کنیم:

$$|A| = 2(4 - 3) = 2 \rightarrow |A^r| = |A|^r = 8$$

۳۱

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow |\vec{a}||\vec{b}| \cos \theta = 0 \xrightarrow{\substack{|\vec{a}| \neq 0 \\ |\vec{b}| \neq 0}} \cos \theta = 0 \xrightarrow{0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}} \theta = \frac{\pi}{2}$$

۳۲

$$\vec{a} = (2, 2, -1) \rightarrow r\vec{b} - \vec{a} \stackrel{r=2}{=} 2\vec{b} - \vec{a} = (6, 2, -2) - (2, 2, -1) = (4, 0, -1)$$

۳۳

$$4y^2 + 4y = 2x + 1 \Rightarrow y^2 + y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$$

$$(y + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \Rightarrow (y + \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(x + 1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{سهمی افقی و دهانه رو به راست} \\ \text{رأس سهمی: } S(-1, -\frac{1}{2}) \text{ و } 4a = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{8} \end{array} \right.$$



$$\text{کانون سهمی: } F(-1 + \frac{1}{\lambda}, -\frac{1}{\lambda}) = (-\frac{\gamma}{\lambda}, -\frac{1}{\lambda})$$

$$\text{معادله خط هادی: } x = -1 - \frac{1}{\lambda} = -\frac{\gamma}{\lambda}$$

۳۴) سهمی افقی می‌باشد پس عرض رأس سهمی با عرض کانون برابر است. پس کانون آن $F(\alpha, 1)$ می‌باشد، داریم:

$$F \in (y = -x + 1) \Rightarrow 1 = -\alpha + 1 \Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow F(0, 1)$$

می‌دانیم که $SF = a$ داریم:

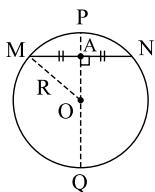
$$SF = \sqrt{(2-0)^2 + (1-1)^2} = 2 \Rightarrow a = 2$$

همچنین از مختصات S و F می‌یابیم که دهانه سهمی به سمت چپ باز می‌شود. داریم:

$$\text{معادله سهمی: } (y-1)^2 = -4(2)(x-2) \Rightarrow (y-1)^2 = -8(x-2)$$

۳۵) کوتاه‌ترین وتر گذرنده از نقطه A ، وتری است که بر قطر گذرنده از A عمود باشد (وتر MN).

مطابق شکل داریم:



$$x^2 - 4x + y^2 - 2y = 4 \Rightarrow (x-2)^2 - 4 + (y-1)^2 - 1 = 4$$

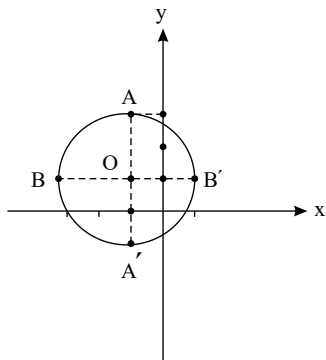
$$\Rightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 = 9 \Rightarrow O(2, 1) \text{ و } R = 3$$

$$\Delta AMO: R^2 = OA^2 + MA^2 \Rightarrow 9 = 1 + MA^2 \Rightarrow MA = 2\sqrt{2} \Rightarrow MN = 2AM = 4\sqrt{2}$$

۳۶)

$$\text{معادله دایره: } (x+1)^2 + (y-1)^2 = 4$$

نمودار این دایره به صورت زیر است؛ مطابق شکل از ۴ ناحیه مختصات دایره می‌گذرد.



۳۷)

$$x^2 - 4x - \lambda y - 4 = 0 \Rightarrow (x^2 - 4x) = \lambda y + 4 \Rightarrow (x-2)^2 - 4 = \lambda y + 4$$

$$\Rightarrow (x-2)^2 = \lambda y + 8 \Rightarrow (x-2)^2 = \lambda(y+1)$$

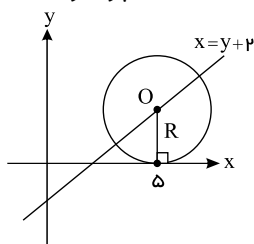
$$\text{رأس سهمی: } S = (h, k) = (2, -1) \text{ و } 4a = \lambda \Rightarrow a = 2$$

$$\text{کانون سهمی قائم: } F(h, a+k) = (2, -1+2) = (2, 1)$$

$$\text{خط هادی: } y = k - a = -1 - 2 = -3$$

۳۸) از آنجا که مرکز دایره روی خط $x = y + 2$ می‌باشد. پس می‌توان مختصات O را به صورت $(\alpha + 2, \alpha)$ نشان داد. چون طول نقطه O برابر با ۵ می‌باشد.

شکل زیر را در نظر می‌گیریم، پس داریم:



$$\alpha + 2 = 5 \Rightarrow \alpha = 3 \Rightarrow O(5, 3) \Rightarrow R = 3$$



$$\text{معادله دایره: } (x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 9$$

۳۹

$$(x^2 - 6x) + (y^2 + 4y) - 3 = 0$$

$$(x - 3)^2 - 9 + (y + 2)^2 - 4 - 3 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 16$$

پس این مقطع مخروطی، دایره‌ای به شعاع ۴ و مرکز $O(3, -2)$ می‌باشد.

۴۰

$$\begin{cases} \text{خط هادی: } x = 4 \\ \text{کانون: } F(2, 3) \end{cases}$$

می‌دانیم که فاصله کانون تا خط هادی برابر با $2a$ می‌باشد. داریم:

$$(x - 4 = 0) \text{ تا } F(2, 3) \text{ فاصله} = 2 \Rightarrow 2a = 2 \Rightarrow a = 1$$

$$\text{رأس سهمی: } S(2 + 1, 3) = (3, 3)$$

$$\text{معادله سهمی: } -4 \times 1(x - 3) = (y - 3)^2 \Rightarrow (y - 3)^2 = -4(x - 3)$$

سهمی افقی است چون هادی آن $x = 4$ می‌باشد و دهانه آن به سمت چپ باز می‌شود.

۴۱

بردار عمود بر دو بردار a و b ، برداری است که از ضرب خارجی آن دو به دست می‌آید.

$$\begin{cases} a = (1, -3, 2) \times \\ b = (-2, 1, -5) \end{cases}$$

$$a \times b = (15 - 2, -4 + 5, 1 - 6) = (13, 1, -5)$$

و نیز هر ضربی از این بردار بر a و b عمود است.

۴۲

$$|a| = 3, |b| = 4, |a'| = 2$$

مساحت مثلث ساخته شده روی دو بردار $(2a + 3b)$ و $(b - 2a)$ برابر است با نصف اندازه حاصل ضرب خارجی آن دو یعنی:

$$S = \frac{1}{2} |(2a + 3b) \times (b - 2a)| = \frac{1}{2} |2a \times b - 4a \times a + 3b \times b - 6b \times a| = \frac{1}{2} |8a \times b|$$

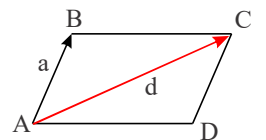
$$\Rightarrow S = 4 |a \times b| = ?$$

$$\begin{cases} \text{طبق فرض: } |a'| = 2 \Rightarrow \frac{|a \cdot b|}{|b|} = 2 \xrightarrow{|b|=4} |a \cdot b| = 8 \\ \text{می‌دانیم: } |a \times b|^2 + |a \cdot b|^2 = |a|^2 |b|^2 \Rightarrow |a \times b|^2 + 64 = 9 \times 16 \Rightarrow |a \times b|^2 = 80 \\ \Rightarrow |a \times b| = \sqrt{80} = 4\sqrt{5} \Rightarrow S = 4 |a \times b| = 4 \times 4\sqrt{5} = 16\sqrt{5} \end{cases}$$

اثبات رابطه $|a \times b|^2 + |a \cdot b|^2 = |a|^2 |b|^2$

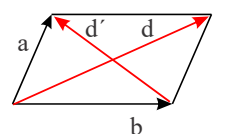
$$|a \times b|^2 + |a \cdot b|^2 = |a|^2 |b|^2 \sin^2 \theta + |a|^2 |b|^2 \cos^2 \theta = |a|^2 |b|^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = |a|^2 |b|^2$$

۴۳ الف) درست. زیرا:



$$S_{\text{موازی الاضلاع}} = 2S_{ABC} = 2 \times \frac{1}{2} |a \times d| = |a \times d|$$

ب) نادرست. زیرا:



$$\begin{cases} |d \times d'| = |(a+b) \times (a-b)| = \left| \underbrace{a \times a}_0 - a \times b + \underbrace{b \times a}_{-a \times b} - \underbrace{b \times b}_0 \right| = |-2a \times b| = 2 |a \times b| = 2S \\ d = a + b \\ d' = a - b \end{cases}$$

$$\Rightarrow |d \times d'| = 2S \rightarrow S = \frac{1}{2} |d \times d'|$$

۴۴ اگر α' و α به ترتیب زاویه بردار u و v با محور x باشند، داریم:



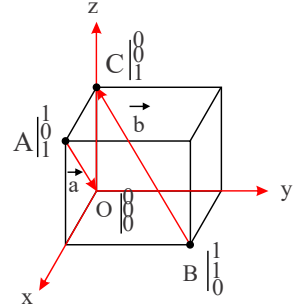
$$\begin{cases} \alpha = \frac{3\pi}{4}, |u| = \sqrt{2} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{a}{|u|} \Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a}{\sqrt{2}} \Rightarrow a = -1 \\ \alpha' = \frac{\pi}{3}, |v| = 2 \Rightarrow \cos \alpha' = \frac{a'}{|v|} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{a'}{2} \Rightarrow a' = 1 \\ u = (a, b, c), v = (a', b', c'), u + v = (a + a', b + b', c + c') \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{a} = \vec{AO} = O - A = (-1, 0, -1) \\ \vec{b} = \vec{BC} = C - B = (-1, -1, 1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \cos \theta = \frac{a \cdot b}{|a| |b|} = \frac{1 + 0 - 1}{|a| |b|} = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

بردار $u + v$ بر محور x عمود است و هیچ تصویر قائمی ندارد.

۴۵) فرض می‌کنیم یال مکعب به طول یک واحد باشد.



۴۶)

$$|a| = |b| = |c| = 1 \text{ و } |3a + 4b| = ?$$

$$2a + 3b + 4c = \vec{0} \Rightarrow 2a + 3b = -4c \xrightarrow{\text{اندازه}} |2a + 3b| = |-4c|$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} 4|a|^2 + 9|b|^2 + 12a \cdot b = 16|c|^2 \Rightarrow 13 + 12a \cdot b = 16 \Rightarrow a \cdot b = \frac{1}{4}$$

$$|3a + 4b|^2 = 9|a|^2 + 16|b|^2 + 24a \cdot b = 9 + 16 + 24 \times \frac{1}{4} = 31$$

$$\xrightarrow{\text{جذر}} |3a + 4b| = \sqrt{31}$$

$$|a| = |b| \Rightarrow (a + b) \perp (a - b)$$

$$\text{فرض: } |2a - b| = |a + b| \Rightarrow ((2a - b) + (a + b)) \perp ((2a - b) - (a + b))$$

$$\Rightarrow 3a \perp (a - 2b) \text{ یا } a \perp (2b - a) \Rightarrow \text{درست}$$

$$(2b - a) \perp a \Rightarrow (2b - a) \cdot a = 0$$

$$\Rightarrow 2a \cdot b - |a|^2 = 0 \Rightarrow 2|a||b| \cos \theta = |a|^2 \Rightarrow 2|b| \cos \theta = |a|$$

$$V \perp Oz \Rightarrow z = 0 \Rightarrow a - |a| = 0 \Rightarrow |a| = a \Rightarrow a > 0 \Rightarrow V = (+, +, 0)$$

زاویه V با محور oy حاده است.

$$a - |a| < 0 \Rightarrow a < |a| \Rightarrow a < 0 \Rightarrow V = (+, -, -)$$

زاویه V با محور oy منفرجه است.

$$a > 0 \Rightarrow V = (+, +, 0)$$

بر محور z زاویه با oz حاده

$$|a| = 2, |b| = \sqrt{2}, |a'| = ?$$

$$|2a + b|^2 = 12a \cdot b \Rightarrow 4|a|^2 + |b|^2 + 4a \cdot b = 12a \cdot b \Rightarrow 16 + 2 = 8a \cdot b$$

$$\Rightarrow a \cdot b = \frac{9}{4} \Rightarrow |a| |b| \cos \theta = \frac{9}{4} \Rightarrow |a| \cos \theta = \frac{9}{4\sqrt{2}} = \frac{9\sqrt{2}}{8}$$

۴۷) الف) یادآوری:

(ب) نادرست. زیرا طبق الف) داریم:

۴۸) الف) درست

(ب) نادرست

(پ) درست

۴۹)



$$A(2, -1, 1), B(3, 2, -1), M(x, y, z)$$

$$\overrightarrow{AM} = M - A = (x - 2, y + 1, z - 1), \overrightarrow{BM} = M - B = (x - 3, y - 2, z + 1)$$

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = \frac{y}{2} \Rightarrow (x - 2, y + 1, z - 1) \cdot (x - 3, y - 2, z + 1) = \frac{y}{2}$$

$$\Rightarrow x^2 - 5x + 6 + y^2 - y - 2 + z^2 - 1 = \frac{y}{2} \Rightarrow x^2 - 5x + y^2 - y + z^2 = \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$B, A \text{ وسط } N = \left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) \Rightarrow |MN| = \sqrt{\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + z^2}$$

$$\Rightarrow |MN| = \sqrt{\underbrace{x^2 - 5x + y^2 - y + z^2}_{\frac{1}{2} \text{ طبق (1)}} + \frac{26}{4}} = \sqrt{7}$$

$$y = ax^2 + bx + c \rightarrow ax^2 + bx = y - c \xrightarrow{\div a} x^2 + \frac{b}{a}x = \frac{y}{a} - \frac{c}{a}$$

$$\xrightarrow{+\left(\frac{b}{2a}\right)^2} x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{y}{a} - \frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$\rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{1}{a}\left(y + \frac{b^2}{4a} - c\right) \rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{1}{a}\left(y + \frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$$

سهمی قائم است.

$$\text{مختصات رأس } S\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

$$4m = \left|\frac{1}{a}\right| \rightarrow m = \frac{1}{4|a|}$$

(الف) اگر $a > 0$ باشد دهانه سهمی روبه بالا است و مختصات کانون آن برابر است با:

$$F\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a} + \frac{1}{4a}\right) = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{1 - \Delta}{4a}\right)$$

(ب) اگر $a < 0$ باشد دهانه سهمی رو به پایین است و مختصات کانون آن برابر است با:

$$F\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a} - \frac{1}{4a}\right) = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{1 - \Delta}{4a}\right)$$

بنابراین در هر حالت مختصات کانون سهمی $F\left(-\frac{b}{2a}, \frac{1 - \Delta}{4a}\right)$ می باشد.

(۵۲) خط بر سهمی مماس است بنابراین باید معادله حاصل از حل دستگاه آنها دارای ریشه مضاعف باشد.

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \xrightarrow{\times(-2)} -2y = x - 3 \rightarrow x = -2y + 3 \quad (1)$$

$$y^2 - 2y + x + 1 = 0 \xrightarrow{(1)} y^2 - 2y - 2y + 3 + 1 = 0 \rightarrow y^2 - 4y + 4 = 0 \rightarrow (y - 2)^2 = 0 \rightarrow y = 2$$

$y = 2$ ریشه مضاعف است پس این خط بر سهمی مماس است.

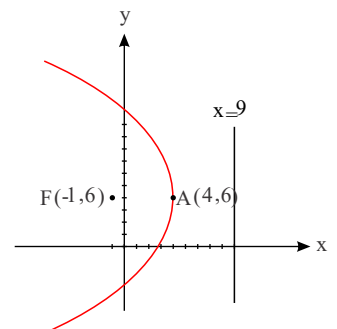
$$x = -2y + 3 \xrightarrow{y=2} x = -2 \times 2 + 3 = -1 \rightarrow \text{مختصات نقطه تماس } (-1, 2)$$

(۵۳) با توجه به جایگاه رأس و خط هادی در دستگاه مختصات داریم: $a = 9 - 4 = 5$

مختصات کانون به صورت زیر است:

$$x_F = x_A - a = 4 - 5 = -1, \quad y_F = y_A = 6$$

$$\Rightarrow F(-1, 6)$$

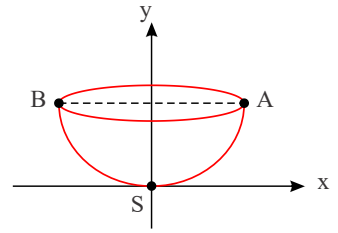




دهانه سهمی رو به چپ است و معادله آن $(y - k)^2 = -4a(x - h)$ می باشد و داریم:

$$(y - 6)^2 = -20(x - 4)$$

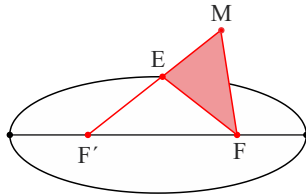
۵۴) رأس سهمی را منطبق بر مبدأ مختصات در نظر می گیریم. اگر قطر دهانه دیش برابر $2x_0$ و گودی (عمق) دیش برابر y_0 باشد مختصات نقطه $A(x_0, y_0)$ در معادله $x^2 = 4ay$ صدق می کند.



$$\left. \begin{aligned} x_0^2 &= 4ay_0 \rightarrow a = \frac{x_0^2}{4y_0} \\ x_0 &= \frac{AB}{2} \\ \rightarrow a &= \frac{AB^2}{16y_0} \end{aligned} \right\} \rightarrow a = \frac{\left(\frac{AB}{2}\right)^2}{4y_0}$$

۵۵

بنابر قضیه حمار در مثلث EMF داریم:



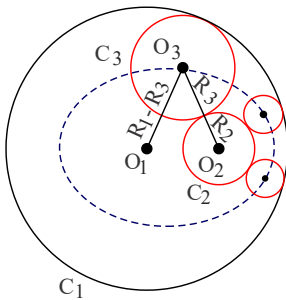
$$ME + MF > EF \xrightarrow{+EF'} (ME + EF') + MF > EF + EF'$$

$$\xrightarrow{EF+EF'=2a} MF' + ME > 2a$$

۵۶

مطابق شکل، دایره C_3 بر دو دایره متداخل C_1 و C_2 مماس است.

دو دایره C_1 و C_2 مماس داخل هستند بنابراین طول خط‌المركزین آنها برابر است با:



$$O_1O_3 = R_1 - R_3$$

$$O_2O_3 = R_2 + R_3$$

$$O_1O_3 + O_2O_3 = (R_1 - R_3) + (R_2 + R_3) = R_1 + R_2$$

دو دایره C_1 و C_3 مماس خارج هستند بنابراین طول خط‌المركزین آنها برابر است با:

بنابراین مکان هندسی مرکز دایره C_3 یک بیضی با طول قطر بزرگ $R_1 + R_2$ با کانون‌های O_1 و O_2 می باشد.

۵۷

$$2a = 40 \rightarrow a = 20$$

$$2b = 24 \rightarrow b = 12$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow 20^2 = 12^2 + c^2 \rightarrow 400 = 144 + c^2 \rightarrow c^2 = 256 \rightarrow c = 16$$

$$\rightarrow FF' = HM = 2c = 2 \times 16 = 32$$

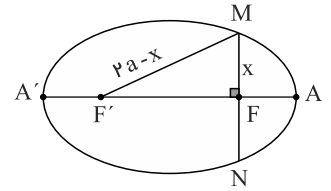
$$MN = \frac{2b^2}{a} = \frac{2 \times 12^2}{20} = 14,4$$

$$S_{MNEH} = MN \times HM = 14,4 \times 32 = 460,8$$

۵۸



$$\begin{cases} MF = x \\ MF' + MF = 2a \end{cases} \rightarrow MF' = 2a - x$$



$$MF' = MF' + MF = MF' \rightarrow x^2 + (2c)^2 = (2a - x)^2$$

$$\left. \begin{aligned} \rightarrow x^2 + 4c^2 &= 4a^2 + x^2 - 4ax \\ a^2 &= b^2 + c^2 \end{aligned} \right\} \rightarrow 4c^2 = 4(b^2 + c^2) - 4ax$$

$$\rightarrow 4c^2 = 4b^2 + 4c^2 - 4ax \rightarrow 4ax = 4b^2 \rightarrow x = \frac{b^2}{a}, \quad MN = 2MF = 2x = \frac{2b^2}{a}$$

۵۹

$$\text{الف) } x^2 + y^2 - 2x = 1 \rightarrow O\left(-\frac{-2}{2}, \frac{0}{2}\right) = (1, 0)$$

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2 + (0)^2 - 4(-1)} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$x^2 + y^2 = 1 \rightarrow O'(0, 0), R' = 1$$

$$\left. \begin{aligned} OO' &= \sqrt{(1-0)^2 + (0-0)^2} = 1 \\ R + R' &= \sqrt{2} + 1 \\ |R - R'| &= \sqrt{2} - 1 \end{aligned} \right\} \rightarrow |R - R'| < OO' < R + R' \rightarrow \text{دو دایره متقاطع هستند.}$$

$$\text{ب) } x^2 + y^2 = 4 \quad O(0, 0), R = 2$$

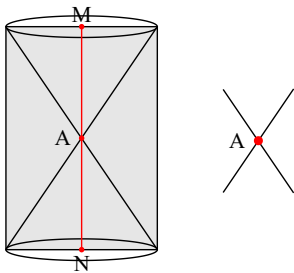
$$x^2 + y^2 - 8x - 4y + 19 = 0 \quad O'\left(-\frac{-8}{2}, -\frac{-4}{2}\right) = (4, 2)$$

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{(-8)^2 + (-4)^2 - 4 \times 19} = \frac{1}{2}\sqrt{64 + 16 - 76} = \frac{\sqrt{4}}{2} = 1$$

$$\left. \begin{aligned} OO' &= \sqrt{(4-0)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \\ R + R' &= 2 + 1 = 3 \end{aligned} \right\} \rightarrow OO' > R + R' \rightarrow \text{دو دایره متخارج هستند.}$$

۶۰

فصل مشترک صفحه‌ای شامل محور یک سطح مخروطی، برابر با، دو خط متقاطع در نقطه A است (شکل را ببینید).

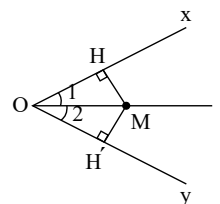


۶۱

طبق تعریف، مکان هندسی مجموعه نقاطی از صفحه است که همه آنها یک ویژگی مشترک داشته باشند و همچنین هر نقطه که آن ویژگی را داشته باشد عضو این مجموعه باشد. بنابراین اثبات در دو مرحله و به صورت قضیه دو شرطی انجام می‌شود یعنی ابتدا ثابت می‌کنیم هر نقطه‌ای روی نیمساز زاویه از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است و به صورت قضیه دو شرطی انجام می‌شود یعنی ابتدا ثابت می‌کنیم هر نقطه‌ای روی نیمساز زاویه از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است و هر نقطه که از دو ضلع زاویه به یک فاصله باشد روی نیمساز آن زاویه قرار دارد.

مرحله ۱:

فرض	$M(\hat{O}_1 = \hat{O}_2)$ روی نیمساز \hat{O} قرار دارد
حکم	$MH = MH'$



$$\left. \begin{aligned} MO &= MO \\ \hat{O}_1 &= \hat{O}_2 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک زاویه حاده}} \triangle MOH \cong \triangle MOH'$$

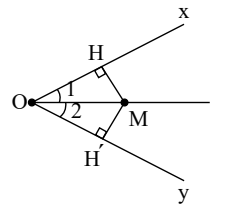


اجزای متناظر

$$\rightarrow MH = MH'$$

فرض	$MH = MH'$
حکم	$M(\hat{O}_1 = \hat{O}_2)$ روی نیمساز O قرار دارد

مرحله ۲:



$$\left. \begin{array}{l} MO = MO \\ MH = MH' \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع زاویه قائمه}} \triangle MOH \cong \triangle MOH' \xrightarrow{\text{اجزای نظیر}} \hat{O}_1 = \hat{O}_2$$

۶۲

$$AB = \begin{bmatrix} 4 & a \\ b & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 + 3a & -8 + 2a \\ b - 3 & -2b - 2 \end{bmatrix}$$

می‌دانیم در ماتریس قطری درایه‌های خارج قطر اصلی همگی صفر هستند. بنابراین داریم:

$$\begin{cases} -8 + 2a = 0 \rightarrow a = 4 \\ b - 3 = 0 \rightarrow b = 3 \end{cases}$$

۶۳

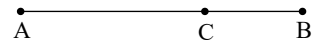
$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = d \begin{vmatrix} b & c \\ a & c \end{vmatrix} - e \begin{vmatrix} a & c \\ a & c \end{vmatrix} + f \begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = 0$$

نتیجه: هرگاه دو سطر (یا دو ستون) در یک ماتریس مانند هم (یا مضربی از هم) باشند حاصل دترمینان صفر است.

۶۴

$$A(-3, 6, 2), B(2, 1, 2), |AC| = 4|BC|$$

$$\Rightarrow \vec{AC} = 4\vec{CB} \Rightarrow C - A = 4B - 4C$$



$$\Rightarrow 5C = A + 4B \Rightarrow C = \frac{1}{5}(A + 4B) = \frac{1}{5}(5, 10, 10) = (1, 2, 2)$$

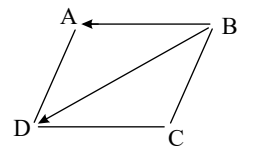
۶۵

$$\vec{BA} = (3, -1, 2), \vec{BD} = (2, 2, -1)$$

$$\vec{AD} = \vec{BD} - \vec{BA} = (-1, 3, -3)$$

$$\Rightarrow \vec{AC} = \vec{AD} + \vec{AB} = (-1, 3, -3) + (-3, 1, -2) = (-4, 4, -5)$$

$$\Rightarrow |\vec{AC}| = \sqrt{16 + 16 + 25} = \sqrt{57}$$



۶۶

$$\begin{cases} a = (0, 0, -4), b = (-2, 1, 2), |a| = 4, |b| = 3 \\ |b|\vec{a} + |a|\vec{b} = 3\vec{a} + 4\vec{b} = (-8, 4, -4) = 4(-2, 1, -1) \end{cases}$$

به‌ازای هر عدد حقیقی r ، هر مضربی از $3a + 4b$ به فرم $r(3a + 4b)$ نیز در راستای نیمساز داخلی و بردار a دو b است.

$$\Rightarrow |r(3a + 4b)| = 4\sqrt{6} \Rightarrow |4r(-2, 1, -1)| = 4\sqrt{6}, |(-2, 1, -1)| = \sqrt{6}$$

$$\Rightarrow |r| = 1 \Rightarrow r = \begin{cases} 1 & \text{غلق} \\ -1 & \text{ق} \end{cases} \text{ (زیرا طبق فرض بردار خلاف راستا موردنظر است.)}$$

$$\Rightarrow r(3a + 4b) \stackrel{r=-1}{=} (8, -4, 4)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$A^2 = I \Rightarrow (A^2)^5 = I^5 \Rightarrow A^{10} = I$$

۶۷

۶۸



الف) ماتریس اسکالر

ب) ندارد

۶۹

الف)

$$\vec{a}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b} = \frac{-2 - 3 - 10}{2^2 + 1^2 + 25} (-2, 1, -5) = \frac{-1}{2} (-2, 1, -5) = (1, -\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$$

ب)

$$\vec{a} \times \vec{b} = (1, -3, 2) \times (-2, 1, -5) = (13, 1, -5)$$

ب) -۳۰

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 2 \times (-3) \times 5 = -30$$

پ)

$$a \cdot b = |a||b| \cos \theta = |a||b| \Rightarrow \cos \theta = 1 \xrightarrow{0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}} \theta = 0$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (3, 2, 1) \times (2, 0, 1) = (2, -1, -4)$$

$$S = |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{4 + 1 + 16} = \sqrt{21}$$

۷۲) نقاط A و B ، زیرا در این دو نقطه $y = 2$ و $z = 1$ می‌باشد.

۷۳)

$$a_{33} = 2, a_{31} = 3 + 1 = 4, a_{12} = 1 - 2 = -1$$

۷۴)

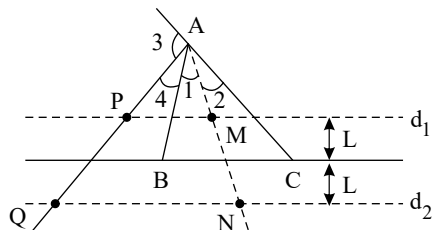
$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow 2A - I = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & m \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2a - 1 & 2b \\ 2c & 2d - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 3 - m \end{bmatrix}$$

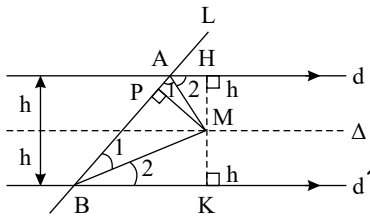
$$2a - 1 = -1 \Rightarrow 2a = 0 \Rightarrow a = 0, 2b = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{2}$$

$$2c = -2 \Rightarrow c = -1, 2d - 1 = 3 - m \quad (1)$$

$$\text{فرض: } a + d = 5 \Rightarrow 0 + d = 5 \Rightarrow d = 5 \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow 2 \times 5 - 1 = 3 - m \Rightarrow m = -6$$

۷۵) می‌دانیم مکان هندسی نقاطی که از خطی به فاصله L باشد، دو خط موازی با آن و به فاصله L از آن است، پس مکان هندسی نقاطی که از BC به فاصله L باشد، دو خط موازی d_1 و d_2 موازی با آن می‌باشد.همچنین می‌دانیم مکان هندسی نقاطی که از اضلاع زاویه‌ای به یک فاصله باشد، نیمساز آن زاویه است. پس مکان هندسی نقاطی که از AB و AC به یک فاصله باشد، نیمساز زاویه A می‌باشد. محل برخورد این دو مکان هندسی پاسخ مسئله می‌باشد. در داخل مثلث تنها یک نقطه M جواب است.در خارج از مثلث باید در نظر داشت که نیمساز خارجی رأس A هم با خطوط d_1 و d_2 متقاطع است. پس در خارج از مثلث سه نقطه P و Q و N هم پاسخ مسئله است که از اضلاع AB و AC یا امتداد آنها به یک فاصله هستند.۷۶) مطابق شکل نیمساز زوایای A و B در M یکدیگر را قطع می‌کنند.

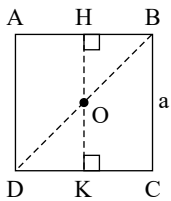


می دانیم که هر نقطه روی نیمساز زاویه از دو ضلع آن به یک فاصله است. بنابراین داریم:

$$\begin{cases} A \text{ روی نیمساز } M \Rightarrow MH = MP = h \\ B \text{ روی نیمساز } M \Rightarrow MP = MK = h \end{cases}$$

بنابراین $MH = MK = h$ می باشد. پس مکان هندسی M خطی مثل Δ موازی با d و d' می باشد که از وسط فاصله بین دو خط d و d' می گذرد.

اگر O مرکز مربع باشد داریم: (۷۷)

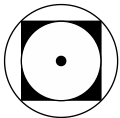


$$HK = a, OH = OK \Rightarrow OH = OK = \frac{a}{2}$$

پس مکان هندسی نقاطی مثل H و K که فاصله آنها از مرکز مربع برابر با $\frac{a}{2}$ باشد، دایره‌ای به مرکز O و شعاع $\frac{a}{2}$ می باشد. داریم:

$$BD = a\sqrt{2} \Rightarrow OB = OD = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

پس مکان هندسی نقاطی مثل B و D که فاصله آنها از مرکز مربع برابر با $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ باشد، دایره‌ای به مرکز O و شعاع $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ است. در صورت سؤال، نقاطی مورد نظر است که داخل مربع بوده و بین دو دایره قرار گیرد که همان قسمت هاشورزده شده است.



(۷۸)

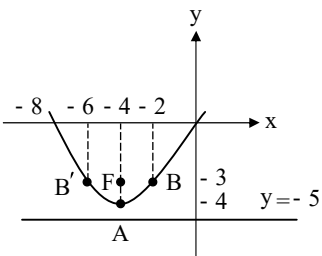
$$\text{شرط بی شمار جواب: } \frac{-2}{4} = \frac{k}{-6} = \frac{2}{m} \Rightarrow \begin{cases} m = -4 \\ k = 3 \end{cases}$$

(الف) فرم استاندارد سهمی به صورت $(x+4)^2 = 4(y+4)$ است.

سهمی قائم و دهانه آن رو به بالا باز می شود. رأس سهمی نقطه $A(-4, -4)$ است و $a = 1$ ، مختصات کانون آن نقطه

$F(-4, -4+1) = (-4, -3)$ است. معادله خط هادی سهمی به صورت $y = -4 - 1 = -5$ است.

(ب) نقاط کمکی $B(-2, -3)$ و $B'(-6, -3)$ برای رسم سهمی استفاده می کنیم؛ شکل سهمی به صورت مقابل است.



(۸۰)

$$OM = OA = a$$

$$\triangle OMF : OF^2 + MF^2 = OM^2 \rightarrow c^2 + MF^2 = a^2 \rightarrow MF^2 = a^2 - c^2 = b^2 \rightarrow MF = b$$

(۸۱)

$$\text{می دانیم: } c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 9 = 16 \rightarrow c = 4$$

$$MF + MF' = 2a = 10 \rightarrow MF' = 10 - MF$$

از طرفی:



با توجه به شکل داریم:

$$(MF)^r + (MF')^r = (FF')^r \rightarrow (MF)^r + (10 - MF)^r = 1^r$$

$$\rightarrow 2MF^r - 20MF + 36 = 0 \rightarrow MF^r - 10MF + 18 = 0 \rightarrow MF = 5 \pm \sqrt{7}$$

۸۲

$$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 1 \rightarrow O(2, 2), r = 1$$

$$d = \frac{|3(2) + 2|}{\sqrt{10}} = \frac{8}{\sqrt{10}} \rightarrow d > r$$

خط، دایره را قطع نمی‌کند.

۸۳

تصویر قائم بردار \vec{a} بر امتداد بردار \vec{b} برابر است با:

الف

$$\vec{a}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\vec{b} \cdot \vec{b}} \vec{b} = \frac{(1, 2, 3) \cdot (-2, 0, 2)}{(-2, 0, 2) \cdot (-2, 0, 2)} (-2, 0, 2) = \frac{-2 + 6}{4 + 4} (-2, 0, 2) = (-1, 0, 1)$$

ب

$$2\vec{a} - \vec{b} = 2(1, 2, 3) - (-2, 0, 2) = (4, 4, 4), |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{16 + 16 + 16} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

۸۴

بردار \vec{a} در ناحیه چهارم

ب

$$\vec{a} + 2\vec{b} = (3, -2, 1) + 2(-2, 1, -1) = (-1, 0, -1)$$

$$|\vec{a} + 2\vec{b}| = \sqrt{2}$$

پ

$$\vec{a} \times \vec{b} = (1, 1, -1)$$

ضرب خارجی دو بردار \vec{a} و \vec{b} بر آنها عمود است.

۸۵

درست

الف

$$A_{1 \times 3} \times B_{3 \times 1} = C_{1 \times 1} = \text{عدد}$$

ب

$$\text{مثال نقض: } \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \vec{0}$$

نادرست

۸۶

به جز دایره‌های روی قطر اصلی، بقیه دایره‌ها صفر هستند.

الف

قطری بوده و همه دایره‌های روی قطر اصلی باهم برابرند.

ب

۸۷

درست

الف

درست - زیرا هر نقطه روی سهمی از F' و d به یک فاصله است.

ب

۸۸

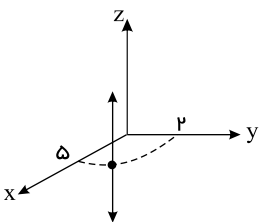
درست - بنابر قانون وجود مثلث:

الف

$$|\vec{a}| + |\vec{b}| \geq |\vec{a} + \vec{b}|$$

ب

درست



۸۹

نادرست

الف

نادرست

ب



الف بردار \vec{a} در ناحیه ۵ واقع است.

ب

$$\vec{a} - \vec{b} = 2(1, 2, -1) - (0, 2, -1) = (2, 2, -1) \Rightarrow |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{4 + 4 + 1} = \sqrt{9} = 3$$