



نام و نام خانوادگی:

زمان برگزاری:

نام آزمون: ریاضی پایه دهم رشته ریاضی

تاریخ آزمون:

۱) می خواهیم ۴ مداد به شماره های ۱ تا ۴ را بین علی و حسن و رضا تقسیم کنیم به طوریکه مدادی باقی نماند. این کار به چند طریق ممکن است؟

۲) فرض کنید θ زاویه ای در ربع دوم دایره ی مثلثاتی باشد و $\sin \theta = \frac{2\sqrt{6}}{7}$ مقدار $\tan \theta$ را بدست آورید.

۳) اگر اشتراک دو بازه $(x^2 + 2, 8)$ و $(3, 2x + 1)$ تهی باشد، آنگاه x کدام است؟

۴) مجموع جمله های اول و چهارم یک دنباله هندسی ۵۶ و مجموع جمله های دوم و سوم آن ۲۴ است. دنباله را مشخص کنید.

۵) با حروف کلمه ی «پارکینگ» و بدون تکرار حروف:

الف) چند کلمه ی ۷ حرفی می توان نوشت؟

ب) چند کلمه ی ۴ حرفی می توان نوشت؟

پ) چند کلمه ی ۶ حرفی که با «پاک» شروع شود می توان نوشت؟

ت) چند کلمه ی ۶ حرفی که با حروف کلمه ی «پاک» شروع شود می توان نوشت؟

ث) چند کلمه ی ۶ حرفی که با یک حرف از حروف کلمه ی «پاک» شروع شود می توان نوشت؟

ج) چند کلمه ی ۵ حرفی که با یک حرف نقطه دار شروع و با یک حرف بی نقطه تمام شود می توان نوشت؟

۶) با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ چند عدد ۵ رقمی بزرگ تر از ۲۱۴۰۰ می توان نوشت اگر:

الف) تکرار مجاز باشد؟

ب) تکرار مجاز نباشد؟

۷) از بین ۴ لیوان سبز متمایز و ۳ لیوان قرمز متمایز و ۲ لیوان آبی متمایز می خواهیم ۲ لیوان انتخاب کنیم به گونه ای که هم رنگ نباشند. به چند

طریق می توانیم این کار را انجام دهیم؟

۸) نامعادله ای قدر مطلق بنویسید که جواب آن بازه ی $(-\infty, -2] \cup [3, +\infty)$ باشد.

۹) اگر $(0, 2)$ و $(1, 2)$ دو نقطه بر روی یک سهمی باشند، خط تقارن این سهمی را بدست آورید.

۱۰) ۱۰۰ قرص نان را بین ۵ مرد چنان تقسیم کنید که سهم های دریافت شده دنباله حسابی تشکیل دهند و یک سوم مجموع سه سهم بزرگتر،

مساوی مجموع دو سهم کوچکتر باشد.

۱۱) یک آزمون شامل ۱۰ سؤال ۴ گزینه ای و ۵ سؤال ۲ گزینه ای (بله - خیر) است. فردی تصمیم دارد به سؤال ها به صورت اتفاقی پاسخ دهد. او به

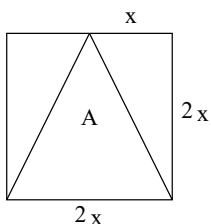
چند روش می تواند این کار را انجام دهد:

الف) اگر مجبور باشد به همه ی سؤال ها جواب دهد؟

ب) اگر بتواند سؤال ها را بدون جواب هم بگذارد؟

۱۲) در شکل مقابل اگر بدانیم مجموع محیط و مساحت مثلث A برابر با $5 - \sqrt{5}$ است، آنگاه مساحت مربع را بدست

آورید.



۱۳) معادلات زیر را به روش کلی حل کنید.

الف) $3x^2 - 5x + 7 = 0$

ب) $2x^2 + 3x - 5 = 8$

پ) $4x^2 - 3x + 2 = 1$

ت) $3x^2 - 3x = \frac{-3}{4}$

۱۴) عبارتهای زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن (حداکثر یک رادیکال) بنویسید.

الف) $\sqrt[2]{\sqrt[3]{2^4}}$ ب) $\sqrt{\sqrt{256}}$ ج) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{2048}}$

۱۵) در دنباله‌ی $0, 15, 18, 21$ اولین جمله منفی، چندمین جمله دنباله است؟

۱۶) اگر A یک زیرمجموعه نامتناهی داشته باشد، راجع به A چه می‌توان گفت؟

۱۷) تعداد ضربان قلب، پس از x دقیقه کار سنگین بدنی، طبق رابطه $y = \frac{15}{8}x^2 - 30x + 200$ به دست می‌آید. در چه زمان‌هایی پس از یک کار سنگین بدنی، تعداد ضربان قلب از 110 بیشتر است؟ آیا تمام جواب‌های به دست آمده قابل قبول‌اند؟

۱۸) اگر با استفاده از ارقام $2, 3, 4, 5, 6$ اعداد 5 رقمی بسازیم، در چه تعدادی از این اعداد، رقم‌های تکراری به چشم می‌خورد؟

۱۹) می‌خواهیم رمزی سه تایی متشکل از حروف a تا f و اعداد 1 تا 5 تشکیل بدهیم به طوری که حروف و اعداد یک در میان قرار بگیرند. به چند طریق این کار ممکن است؟

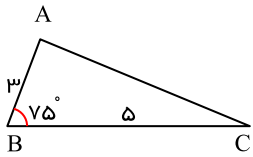
۲۰) عبارت $x^3 + x^2 - x - 1$ را تجزیه کنید (استفاده از اتحادها به طور مستقیم امکان‌پذیر نیست)

۲۱) اگر $n(A) = 10$ و $n(A \cap B) = 3$ و $n(A \cup B) = 14$ باشد، آنگاه $n(B)$ را بدست آورید؟

۲۲) فرض کنید $u = \{a, b, c, d, e\}$ مجموعه مرجع باشد و $A = \{a, e\}$ و $B = \{b, c\}$ ؛ حاصل عبارتهای زیر را بدست آورید.

الف) A' ب) B' پ) $A \cap B'$ ت) $A' \cup B$ ث) $A - B'$

۲۳) فرض کنید $\sin 75^\circ = 0.96$ ، مساحت مثلث ABC در شکل زیر را به دست آورید.



۲۴) یک نقاش قوطی‌هایی از ۴ رنگ قرمز، آبی، زرد و مشکی دارد. اگر او با ترکیب دو یا چند قوطی از رنگ‌های متمایز بتواند دقیقاً یک رنگ جدید درست کند، او چند رنگ می‌تواند داشته باشد؟

چرا با این که در کارهای هنری فقط از همین ۴ رنگ استفاده می‌شود، اما تعداد رنگ‌های حاصل بیش‌تر از جواب شماس‌ت؟

۲۵) اگر n یک عدد طبیعی باشد، حاصلضرب اعداد طبیعی متوالی از 1 تا n را چگونه نمایش می‌دهند؟

۲۶) در یک تابع خطی $f(2) = 3$ و $f(-1) = 4$ است؛ نمودار این تابع را رسم کنید و نمایش جبری آن را بنویسید.

۲۷) a و b را طوری تعیین کنید که روابط زیر تابع باشند.

الف) $f(x) = \left\{ \left(3, 2a - b \right), \left(\frac{6}{p}, 2a + b \right), (1, a), (2, 3), \left(\frac{2}{1}, \frac{3}{a} \right) \right\}$

ب) $g(x) = \{(a, a), (b, a), (2a - b, 0), (b, 2a - b), (a, 2b)\}$

۲۸) اگر بدانیم $AB = 0$ ، آنگاه راجع به A و B چه می‌توان گفت؟

۲۹) درستی اتحاد زیر را بررسی کنید.

$$\frac{(1 + \tan^2 \alpha) \cos^2 \alpha}{\cot \alpha} = \tan \alpha$$

۳۰) خطی از نقطه‌ی $A(2, 3)$ گذشته و محور x ها را با زاویه‌ی 45° قطع می‌کند، عرض نقطه‌ای به طول 4 بر روی این خط کدام است؟

۳۱) $\sin \theta + \cos \alpha$ همواره عددی در بازه‌ی $[a, b]$ است. مطلوبست محاسبه‌ی مقدار عددی $3a - 5b$.

۳۲) اگر $a_n = 5 + (n - 1) \times 3$ و $b_n = 7 + (n - 1) \times 2$ باشد. جمله چندم این دو دنباله با هم برابر است؟

۳۳) جمله اول یک دنباله حسابی نصف جمله سوم است. جمله پانزدهم این دنباله چند برابر قدر نسبت آن است؟

۳۴) در یک مدرسه ۱۲۲ نفری، ۸۲ نفر ساعت در دست دارند و ۷۹ نفر عینک می‌زنند که ۵۴ نفر هم عینک می‌زنند و هم ساعت در دست دارند.

چند نفر:

الف) حداقل یکی از دو مورد را استفاده می‌کنند؟

ب) فقط ساعت در دست دارند؟

پ) دقیقاً یکی از دو مورد را استفاده می‌کنند؟

ت) نه ساعت می‌بندند و نه عینک می‌زنند؟

۳۵) فرض کنیم A و B زیر مجموعه‌هایی از مجموعه مرجع U باشد بطوریکه $n(u) = 120$ ، $n(A) = 75$ ، $n(B) = 50$ ، $n(A \cap B) = 35$

مطلوب است:

الف) $n(A \cup B)$ (ب) $n(A \cap B')$

پ) $n(A' \cap B)$ (ت) $n(A' \cap B')$

۳۶) اگر حروف کلمه «موبایل» را تصادفی کنار هم قرار دهیم، احتمال این که دو حرف (د) و (ی) کنار هم بگذارند چه مقدار است؟

۳۷) از بین پنج کتاب ریاضی، فیزیک، شیمی، هندسه و ادبیات ۳ کتاب به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال این که کتاب ریاضی در بین این سه کتاب

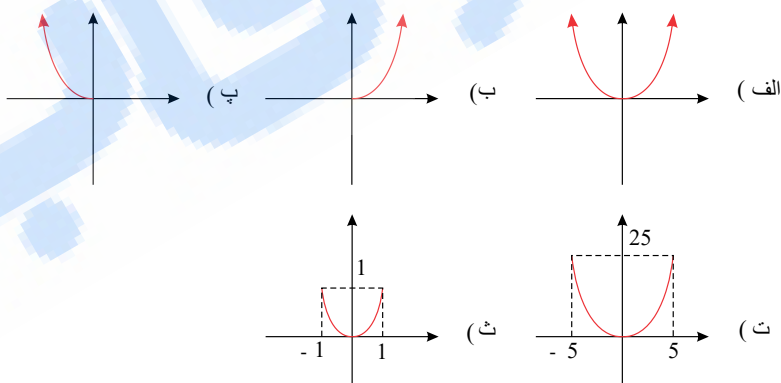
نباشد چند درصد است؟

۳۸) با حروف کلمه *Computer* چند کلمه ۵ حرفی صرف نظر از معنادار بودن آن می‌توان نوشت؟ (هر حرف حداکثر یک بار می‌تواند مورد استفاده

قرار بگیرد)

۳۹) با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ چند عدد ۴ رقمی می‌توان نوشت؟

۴۰) کدام یک از نمودارهای زیر نمایش صحیحی برای تابع $f(x) = x^2$ است؟ چرا؟



۴۱) آیا جدول مقابل نمایانگر یک تابع است؟ چرا؟

| | | | | | | |
|-----|---|---|---|----|----|----|
| x | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ | ۶ |
| y | ۱ | ۴ | ۸ | ۱۶ | ۲۵ | ۳۶ |

۴۲) تابع بودن یا نبودن مجموعه زوج مرتب‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $f(x) = \{(1, 2)(2, 3)(3, 4)(4, 5)\}$

ب) $g(x) = \{(1, 2)(1, 3)(2, 2)(3, 3)\}$

پ) $h(x) = \{(1, 1)(2, 2)(3, 3)(1, 1)(2, 2)\}$

ت) $z(x) = \{(1, 1)(2, 1)(3, 1)(4, 1)\}$

۴۳) عبارتهای زیر را تعیین علامت کنید.

الف) $3x^2 + 7x - 5$

ب) $2x^2 - 3x + 5$

پ) $2x^2 - 4x + 2$

ت) $x^2 - 4x + 3$

۴۴) در مسابقات پرتاب نیزه، دو پرتاب‌کننده A و B ، نیزه‌های خود را با زوایای α و β پرتاب کرده‌اند که معادله‌ی حرکت آنها به شکل

$y_A = -x^2 + 3x + 4$ و $y_B = -4x^2 + 6x + 4$ است. که در آن x مسافت افقی طی شده بر روی زمین و y ارتفاع نیزه‌ها از سطح زمین است،

تعیین کنید کدام پرتاب‌کننده برنده می‌شود؟

۴۵) اگر سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + c$ محور y ها را در نقطه‌ای به عرض ۳ و محور x ها را در دو نقطه به طول‌های ۲ و -۲ قطع کند، این سهمی را رسم کنید و عرض نقطه‌ای به طول ۱ بر روی این سهمی را بیابید.

۴۶) درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را تعیین کنید.

الف) $x^2 = 25 \rightarrow x = 5$

ب) $x^2 = 25 \rightarrow x = -5$

پ) $x^2 = 25 \rightarrow x = \pm 5$

ت) $a^2 = b \rightarrow a = \pm\sqrt{b}$

۴۷) معادلات زیر را به روش تجزیه حل کنید.

الف) $x^2 - x = 0$ ب) $x^2 - 16 = 0$ پ) $x^2 + 4x - 21 = 0$ ت) $x^2 - 4x + 4 = 0$

۴۸) درجه‌ی هر یک از معادلات زیر را تعیین کنید:

الف) $x^2 - 3x + 5 = 2$ ب) $x^3 - 4x^2 + 5x + 1 = 0$

پ) $x^2 = -1$ ت) $x = -1$

ث) $\frac{3x^2}{2} + 1 = 0$ ج) $x - 5 = 4$

۴۹) اگر $a^2 - 6a = -1$ باشد حاصل عبارت $\frac{a+1}{\sqrt{a}}$ را بدست آورید.

۵۰) اگر $a^2 < 1$ باشد و $\sqrt{a^2} = -a$ ، آنگاه حاصل $\frac{\sqrt{(1-a)^2}}{\sqrt{(a-1)^2}}$ را بدست آورید؟

۵۱) در صورتیکه a مقداری حقیقی بین صفر و منفی یک باشد، حاصل عبارت زیر را به صورت مضربی از ۳ بیان کنید.

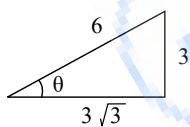
$$\sqrt{a^2} + \sqrt{a^2 + 1} - 2a + \sqrt{a^2 + 4} - 4a$$

۵۲) درستی اتحاد زیر را بررسی کنید.

$$\left(\frac{1}{\cos \alpha} + \tan \alpha\right)(1 - \sin \alpha) = \cos \alpha$$

۵۳) ربع هر یک از زوایای زیر را مشخص کنید.

-۲۷۳, ۱۴۵, ۲۲۰, -۱۵



۵۴) در مثلث زیر، نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی θ را بدست آورید همچنین، اندازه زاویه‌ی θ را مشخص کنید.

۵۵) شرکت‌های اینترنت شاتل و پارس آنلاین طی اعلامیه‌ای شرایط فروش خود را به شرح زیر اعلام کرده‌اند:

شاتل: هزینه مودم ۳۰ هزار تومان و هر گیگابایت اینترنت ۳ هزار تومان

پارس آنلاین: هزینه مودم ۲۰ هزار تومان و هر گیگابایت اینترنت ۴ هزار تومان

علی و حسن می‌خواهند از این دو شرکت خرید کنند و به مدت یک ماه از این خدمات استفاده کنند. علی در یک ماه حدود ۵ گیگابایت و حسن در یک ماه حدود ۱۵ گیگابایت استفاده می‌کند به هر کدام از این دو نفر کدام یک از شرکت‌ها را پیشنهاد می‌کنید که هزینه کمتری بپردازند؟

۵۶) طرف دوم تساوی‌های زیر را بنویسید.

الف) $W - N$ (ب) $R \cap Q'$ (پ) $Z \cap W$ (ت) $Q' \cap Z$

۵۷) حاصل $\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$ را تا حد امکان تجزیه و ساده کنید.

۵۸) هر یک از معادله‌های زیر را به روش دلخواه حل کنید.

۱) $2x^2 = 25$

۳) $4a^2 + 3a = 1$

۲) $9 - 6z + z^2 = 0$

۴) $b^2 + \sqrt{2b} - 4 = 0$

۵۹) معادله‌های زیر را به روش مربع کامل حل کنید.

$$1) x^2 - 6x = 7$$

$$3) r^2 + 4r + 4 = 0$$

$$2) s^2 - 3s + 3 = 0$$

$$4) 2a^2 + 5a - 3 = 0$$

۶۰) جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.

به انتخاب r شیء از n شیء متمایز که در آن ترتیب انتخاب اهمیت باشد یا به عبارتی به هر زیرمجموعه‌ی r عضوی از یک مجموعه‌ی n عضوی یک می‌گوییم که با یا نمایش می‌دهیم و برای محاسبه‌ی آن از رابطه‌ی استفاده می‌کنیم که محدوده r در آن به صورت است.

۶۱) یک موسسه‌ی پژوهشی برای انجام پروژه‌های تحقیقاتی به سه نفر از متخصصان خود نیاز دارد. اگر ترتیب انتخاب این افراد به صورت مدیر، معاون و پیمانکار پروژه باشد و ۷ نفر متخصص در این شرکت باشند که توان انجام هر سه کار را داشته باشند به چند طریق این موسسه، می‌تواند پروژه را شروع کند؟

۶۲) جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

الف) تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز برابر است با

ب) تعداد جایگشت‌های r تایی از n شیء متمایز یا به عبارتی تعداد حالت‌های انتخاب r شیء از بین n شیء که در آن‌ها ترتیب قرار گرفتن مهم باشد را با نمایش می‌دهیم که برای محاسبه‌ی آن از رابطه‌ی استفاده می‌کنیم.

۶۳) اعداد و عبارات زیر را با نماد فاکتوریل نمایش دهید.

الف) $8 \times 7 \times 6$

ب) $3 \times 4 \times 5$

پ) $\frac{12 \times 11}{2}$

ت) $n(n-1)$

ث) $n^2 + n$

ج) $(n+2) \times (n+1) \times n \times (n-1)$

۶۴) در یک شهرک ۵ خیابان اصلی، و در هر خیابان اصلی بین ۷ تا ۱۰ خیابان فرعی و در هر خیابان فرعی بین ۳ تا ۵ کوچه و در هر کوچه بین ۵ تا ۱۰ ساختمان و در هر ساختمان بین ۲ الی ۵ نفر زندگی می‌کنند. میانگین جمعیت این شهرک را بدست آورید.

۶۵) تابع f با نمایش جبری $f(x) = 3x + 2$ و دامنه‌ی $D = \{1, 2, 3, 4\}$ در دست است. با تعیین برد، نمودار پیکانی این تابع را رسم نمایید.

۶۶) تابع بودن یا نبودن روابط زیر را با نوشتن اعضاء مشخص کنید.

الف) $f(x) = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{W}, 2x + 2y = 10\}$

ب) $h(x) = \{(x, 2y) \mid x, y \in \mathbb{Z}, x^2 + y^2 = 18\}$

پ) $g(x) = \{(x, \frac{y}{2}) \mid x, y \in \mathbb{Z}, x + y \leq 3\}$

ت) $Z(x) = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z}, |x| + |y| = 3\}$

۶۷) تابع را تعریف کنید.

۶۸) نامعادله‌ی قدر مطلق $3x < |2x - 1| \leq 4$ را حل کنید.

۶۹) نامعادله‌های قدر مطلق زیر را حل کنید.

الف) $|x - 2| \leq 3$

ب) $|3x - 1| \geq 1$

۷۰) اختلاف سنی دو برادر با یکدیگر سه سال است؛ اگر سه سال دیگر، حاصل ضرب سن آنها برابر با ۲۷۰ باشد، نسبت سن کنونی آن‌ها به یکدیگر چقدر است؟

۷۱) معادلات زیر را به روش مربع کامل حل کنید.

الف) $4x^2 - 2x - \frac{1}{2} = 0$

ب) $3x^2 - 6x + 3 = 1$

۷۲) معادلات زیر را با روش ریشه گیری حل کنید.

الف) $3x^2 = 27$

ب) $4x^2 = 1$

پ) $t^2 + 10 = 0$

ت) $(a - 2)^2 = 0$

ث) $(x + 3)^2 = 16$

ج) $(x - 3)^2 = 5$

۷۳) ابتدا کسرها را گویا کرده و سپس مجموع آنها را حساب کنید.

$$\frac{2}{\sqrt{x} - \sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{x} + \sqrt{2}}$$

۷۴) عبارت های زیر را تجزیه کنید (استفاده از اتحادها کفایت نمی کند)

الف) $x^3 + x^2 - 4x - 4$

ب) $a^5 - ab^4$

پ) $a^3 - a^2b - ab^2 + b^3$

ت) $2x^2 + 6x + 4$

۷۵) عدد $\sqrt{3} \times \sqrt[3]{2}$ را به صورت یک رادیکال بنویسید.

۷۶) عدد $\sqrt[3]{-3} \sqrt[3]{3}$ را به صورت یک رادیکال بنویسید.

۷۷) عدد $\sqrt{2} \sqrt[3]{2} \sqrt[4]{2} \sqrt[5]{2}$ را به صورت یک رادیکال بنویسید.

۷۸) حاصل عبارت $\sqrt[3]{(\sqrt{3}-2)^3} - \sqrt[4]{(\sqrt{3}-2)^4} - \sqrt[5]{(\sqrt{3}-2)^5}$ را بیابید؟

۷۹) در جاهای خالی، علامت مساوی، کوچکتر یا بزرگتر قرار دهید.

الف) $(-0,1)^5 \square (-0,1)^4$

ب) $\sqrt[4]{0,00001} \square 0,1$

پ) $(3,2)^2 \square (3,2)^3$

ت) $(-2)^3 \square (-2)^5$

ث) $(-1,1)^4 \square (1,1)^4$

ج) $(-2)^5 \square (-2)^7$

چ) $2^3 \square 3^2$

ح) $(\frac{1}{2})^2 \square (\frac{1}{2})^3$

۸۰) در هر یک از حالات زیر a چه اعدادی می تواند باشد؟ برای هر یک مثالی بزنید.

الف) $a > 0$ $\sqrt[3]{a} > a$ (پ) $a \geq 0$ $\sqrt[3]{a} = a$ (ث) $a > 0$ $\sqrt[3]{a} < a$

ب) $a < 0$ $\sqrt[3]{a} > a$ (ت) $a < 0$ $\sqrt[3]{a} = a$ (ج) $a < 0$ $\sqrt[3]{a} < a$

۸۱) فرض کنید $A = [-3, 2]$ و $B = (-1, 3]$ و \mathbb{R} مجموعه مرجع باشد؛ حاصل $(A \cap B)'$ را به صورت بازه بدست بیاورید.

۸۲) متناهی یا نامتناهی بودن هر یک از مجموعه های زیر را مشخص کنید:

الف) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 5\}$

ب) مجموعه کتاب های کمک آموزشی

پ) $\mathbb{Z} - \mathbb{W}$

ت) مجموعه اعداد طبیعی کوچکتر از ۷

ث) مجموعه مداد های جهان

ج) $\left[-3, \frac{1}{2}\right)$

چ) مجموعه مورچه های هر شهر

۸۳) اگر $A_n = \left[\frac{-3}{n}, \frac{n-1}{2}\right)$ باشد، آنگاه حاصل $A_1 \cup (A_2 \cap A_3)$ را بدست آورید و تعداد اعداد صحیح در بازه ی بدست آمده را معین کنید.

۸۴) ساده شده عبارت های زیر را به دست آورید.

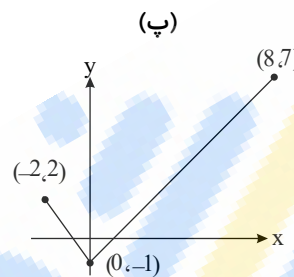
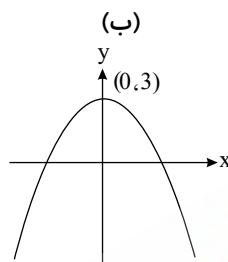
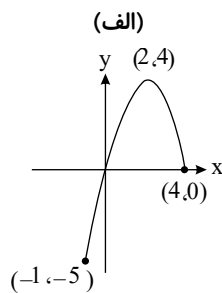
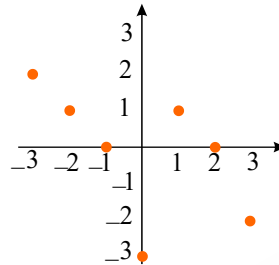
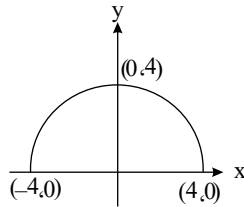
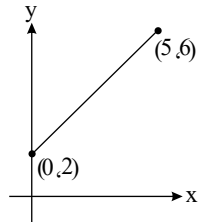
الف)

$$\left(\frac{1}{1 - \cos \theta} - \frac{1}{1 + \cos \theta}\right) \left(\frac{1}{\cos \theta(1 + \cot^2 \theta)}\right)$$

ب

$$\left(\frac{1}{1-\sin\theta} + \frac{1}{1+\sin\theta}\right) - 2\tan^2\theta$$

۸۵ در شکل‌های زیر نمودار تعدادی از توابع رسم شده‌اند. دامنه و برد هر یک از این توابع را به کمک نمودار آنها مشخص کنید. در هر مورد که امکان دارد، دامنه و برد را به صورت یک بازه نمایش دهید. نمایش جبری (الف) و (ج) را بنویسید.



(ت)

(ث)

(ج)

۸۶ اگر $\tan\alpha = \frac{-4}{3}$ و α زاویه‌ای در ناحیه چهارم مثلثاتی باشد، نسبت‌های دیگر مثلثاتی زاویه α را به دست آورید.

۸۷ از بین دنباله‌های زیر، دنباله‌های حسابی را مشخص کنید و در هر یک از آنها با تعیین قدرنسبت، جمله بیست‌ویکم را بیابید.

(الف) ۳, ۱۰, ۱۷, ۲۴, ...

ب) ۱, ۲, ۴, ۸, ...

(پ) $\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 3\sqrt{3}, 4\sqrt{3}, \dots$

ت) ۱۰, ۷, ۴, ۱, ...

(ث) $\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1, \dots$

ج) ۲, ۲, ۲, ۲, ...

۸۸ اگر $n(A) = 15$, $n(A \cap B) = 5$ و $n(A \cup B) = 30$ آنگاه $n(B)$ را محاسبه کنید.

۸۹ انواع متغیرهای کیفی را نام برده و هر یک را توضیح دهید.

۹۰ مفاهیم زیر را تعریف کنید.

الف) جامعه یا جامعیت

ب) اندازه یا حجم جامعه

ج) نمونه

د) اندازه یا حجم نمونه

۹۱ مفاهیم زیر را تعریف کنید.

الف) آمار

ب) علم آمار

۹۲ یک فروشگاه دو نوع کارت اعتباری A و B را می‌پذیرد. اگر ۳۴ درصد از مشتریان کارت نوع A $\left(P(A) = \frac{34}{100}\right)$ و ۶۲ درصد کارت نوع

B و ۱۵ درصد هر دو کارت را همراه داشته باشند، چقدر احتمال دارد مشتریان با در اختیار داشتن حداقل یکی از این دو کارت از این فروشگاه خرید کنند؟

۹۳) حاصل عبارت‌های زیر را بدست آورید. (مانند نمونه)

نمونه) $6! = 6 \times \underbrace{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}_{5!} = 6 \times 5!$

- (الف) $7!$
 (ب) $10!$
 (پ) $n!$
 (ت) $(n-3)!$
 (ث) $(n+2)!$

۹۴) اصل ضرب و تعمیم یافته اصل ضرب را تعریف کنید.

۹۵) اصل جمع و تعمیم یافته اصل جمع را تعریف کنید.

۹۶) جدول زیر را کامل کرده و نمودار هر یک از توابع را رسم کنید.

| | (الف) | (ب) | (ج) | (د) |
|-------|-------------------|--------------|--------------|---------------------------|
| تابع | $f(x) = -3x$ | $g(x) = -3x$ | $h(x) = -3x$ | $k(x) = -3x$ |
| دامنه | $\{-1, 0, 1, 2\}$ | \mathbb{R} | $[-3, 2)$ | مجموعه اعداد حقیقی نامثبت |
| برد | ? | ? | ? | ? |

۹۷) هر تابع که بتوان آنرا به فرم نمایش داد، یک تابع خطی نامیده می‌شود.

۹۸) مفاهیم زیر را تعریف کنید.

(الف) دامنه (ب) برد (ج) نمایش جبری تابع

۹۹) اگر رابطه‌ای از مجموعه‌ی $\{\text{خربزه, انار, سیب}\}$ به $\{\text{تند, ترش, شیرین}\}$ وجود داشته باشد که مزه هر میوه را مشخص کند، آیا این رابطه تابع است؟ با رسم نمودار پیکانی پاسخ دهید.

۱۰۰) دو رابطه از A به B بنویسید که تابع باشند و دو رابطه از B به A بنویسید که تابع نباشند.

$A = \{a, b, c, d\}$ $B = \{e, f, g, h\}$

۱۰۱) نامعادله‌های زیر را به روشی هندسی حل کنید.

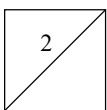
(الف) $x^2 - 2x - 4 \geq 4$ (ب) $x^2 + 1 \leq 2x$

۱۰۲) در یک مسابقه کاراته، اگر تک تک شرکت کنندگان با هم مبارزه کنند و در نهایت ۳۶ مبارزه انجام شده باشد تعداد شرکت کنندگان و همچنین گویبی بین تعداد شرکت کنندگان و تعداد مبارزات را بدست آورید.

۱۰۳) معادله‌های زیر را به روش دلخواه حل کنید.

(الف) $x^2 - 2x + 1 = 4$ (ب) $x^2 - 2x - 10 = 5$

۱۰۴) در شکل مقابل طول ضلع مربع را بدست آورید.



۱۰۵) معادله‌ی درجه‌ی دومی بنویسید که ریشه‌های آن -1 و 3 باشد.

۱۰۶) اگر داشته باشیم $\sqrt{\sqrt{x}\sqrt{x}} = y^{\frac{1}{3}}$ ، چه رابطه‌ی بین x و y برقرار است؟

۱۰۷) عدد $5\sqrt[3]{3}$ را به صورت یک رادیکال بنویسید.

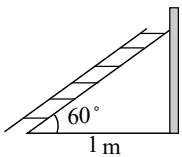
۱۰۸) اگر $\sqrt{a^2 b^3} = -ab\sqrt{b}$ باشد، حاصل $|a|$ را بدست آورید.

۱۰۹) تفاوت $(\sqrt{a})^2 = a$ و $\sqrt{a^2} = |a|$ در چیست؟

۱۱۰) θ زاویه‌ای در ربع دوم است؛ حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$\frac{\sin \theta |\cos \theta| - |\sin \theta| \cos \theta}{|\sin \theta \cos \theta|}$$

۱۱۱) اگر $A = \frac{\cos^2 45}{2} - \frac{\sin 30}{3} + \tan 45$ باشد، حاصل $2A - \frac{1}{6}$ را بدست آورید.



۱۱۲) با توجه به شکل اگر دو متر روی نردبان حرکت کنیم، ارتفاع مان از زمین چه قدر خواهد شد؟

۱۱۳) بین اعداد ۱۲ و ۱۹۲ سه واسطه هندسی درج کنید.

۱۱۴) بین ۳۲ و ۶۸ سه واسطه حسابی قرار دهید.

۱۱۵) یک دنباله حسابی مثال بزنید که سه جمله اول آن منفی و بقیه‌ی جملات مثبت شود.

۱۱۶) جمله یازدهم و هفدهم یک دنباله حسابی به ترتیب برابر ۲۵ و ۳۷ است. a_1 و d جمله عمومی را بدست آورید.

۱۱۷) حاصل عبارت مقابل را به دست آورید.

$$A = \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots}}}$$

۱۱۸) سکه‌ای را به هوا می‌اندازیم. اگر پشت بیاید، یک تاس می‌اندازیم و اگر رو بیاید دو سگه دیگر را می‌اندازیم:

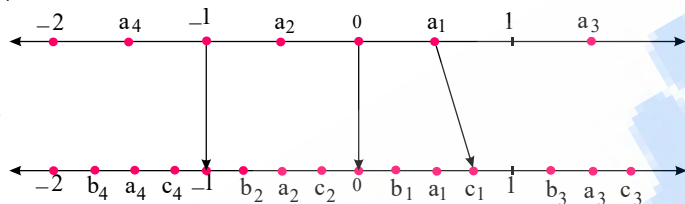
الف) فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی را مشخص کنید.

ب) پیشامد آنکه «تاس زوج بیاید» را مشخص کنید.

پ) پیشامد آنکه «حداقل ۲ سکه رو بیاید» را مشخص کنید.

۱۱۹) طول یک مستطیل ۳ واحد بیشتر از عرض آن است. رابطه‌ای ریاضی بنویسید که محیط این مستطیل بر حسب تابعی از عرض آن بیان کند.

۱۲۰) مانند نمونه در شکل زیر، هر یک از نقاط مشخص شده روی محور بالا را به یکی از نقاط مشخص شده روی محور پایین که متناظر با ریشه سوم آن عدد است، وصل کنید (یک مثال عددی از هر مورد ارائه کنید).



۱۲۱) هر یک از اعداد ۱ تا ۱۰ را روی یک کارت می‌نویسیم و در کیسه‌ای قرار می‌دهیم. دو کارت را با هم به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال این که

مجموع اعداد رو شده روی کارت‌ها، عددی زوج باشد چه قدر است؟

۱۲۲) در یک باشگاه تیراندازی، ۳۰٪ افراد با سلاح نوع A ، ۵۰٪ با سلاح نوع B و ۱۰٪ با هر دو سلاح تیراندازی می‌کنند. مطلوبست احتمال

این که یک نفر:

الف) حداقل با یکی از دو سلاح تیراندازی کند.

ب) فقط با سلاح A تیراندازی کند.

ج) با هر دو سلاح تیراندازی کند.

۱۲۳) نامعادلات زیر را حل کنید.

الف) $3x - 2 > 5x + 7$

ب) $2 - 3x \leq -3 + 7x$

۱۲۴) اگر مساحت زمینی مستطیل شکل که طول آن دو برابر عرض آن است برابر ۸ واحد باشد، محیط این زمین چند واحد است؟

۱۲۵) اعداد زیر را با هم مقایسه کنید.

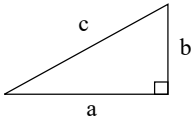
الف) $\sqrt[2]{2} \square \sqrt[2]{5}$ ب) $\sqrt[2]{8} \square \sqrt[2]{6}$ پ) $\sqrt[4]{9} \square \sqrt[5]{12}$

۱۲۶) درستی اتحاد زیر را بررسی کنید.

$$\frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\cos \alpha (\tan \alpha - 1)} = \sin \alpha + \cos \alpha$$

۱۲۷) درستی اتحاد زیر را بررسی کنید.

$$\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{\sin \alpha} - \sin \alpha\right) \cot \alpha}{\cos \alpha}} = |\cot \alpha|$$



۱۲۸ در صورتیکه $\cot \alpha = \frac{1}{5}$ ، حاصل $\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1$ را بدست آورید.

۱۲۹ در مثلث روبرو اگر $\frac{b}{c} = \frac{1}{3}$ باشد، نسبت $\frac{a}{b}$ را بیابید.

۱۳۰ اگر داشته باشیم $\sin \alpha = \frac{6}{10}$ ، $\cot \alpha$ را بدست آورید.

۱۳۱ مقایسه کنید:

۱) $\sin 75^\circ \square \sin 85^\circ$

۲) $\cos 40^\circ \square \cos 32^\circ$

۳) $\cos 30^\circ \square \sin 60^\circ$

۴) $|\sin 123^\circ| \square |\sin 321^\circ|$

۱۳۲ درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.

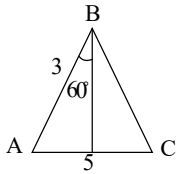
(الف) زاویه 90° در ربع اول است.

(ب) زاویه 180° در ربع سوم است.

۱۳۳ در دایرهی مثلثاتی، محل زوایای زیر را نشان دهید.

۱۳۴ مساحت مثلث روبرو را بدست بیاورید.

37° ، -53° ، 245° ، -27° .



۱۳۵ مثلث قائم‌الزاویه‌ای با وتر 10 داریم که در آن کسینوس یک زاویه‌ی حاده $8/10$ است. مساحت مثلث را بدست آورید.

۱۳۶ یک صخره اورانیومی بزرگ به جرم 200 kg ، هر روز $\frac{1}{4}$ جرم خود را از دست می‌دهد، پس از چند روز جرم این صخره به 50 kg می‌رسد؟

۱۳۷ واسطه حسابی بین اعداد زیر را بنویسید.

(الف) $11, 15$

(ب) $-1, 1$

(پ) $-3, -12$

۱۳۸ باتوجه به دنباله $2, 5, 8, 11, 14, \dots$

(الف) نوع دنباله را مشخص کنید.

(ب) جمله عمومی دنباله را بدست آورید.

(پ) جمله دوازدهم دنباله را بدست آورید.

(ت) جمله پنجم این دنباله برابر با 20 است؟

۱۳۹ یک دستگاه کددهی به هر مراجعه‌کننده یک کد شناسایی می‌دهد به اینصورت که با توجه به زمان مراجعه هر فرد ساعت مراجعه را دو برابر

کرده و نصف دقیقه زمان مراجعه را به آن می‌افزاید و عدد حاصل را به صورت یک کد به مراجعه‌کننده می‌دهد؛ اگر مراجعه‌کننده‌ای در ساعت 11

مراجعه کرده باشد و کد دریافتی او 34 باشد، زمان دقیق مراجعه او را معلوم کنید؟

۱۴۰ تفاضل دو جمله متوالی از الگوی غیر خطی زیر برابر 28 است، آن دو جمله را بیابید؟

$$a_n = 4n^2 - 1$$

۱۴۱ 14 نفر به آزمایشگاهی مراجعه کرده‌اند که از بین آنها 9 نفر برای انجام آزمایش خون و 5 نفر برای انجام آزمایش قند خون مراجعه کرده‌اند

که در این میان 3 نفر هر دو آزمایش را داده‌اند مطلوب است تعداد کسانی که:

(الف) آزمایش خون یا قند انجام داده‌اند.

(ب) هیچ از دو یک آزمایش را انجام نداده‌اند.

۱۴۲ ثابت کنید برای دو مجموعه مجزای A و B داریم: $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

۱۴۳ اگر \mathbb{R} را مجموعه مرجع در نظر بگیریم و داشته باشیم $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 3\}$

A' را به صورت بازه نمایش دهید.

۱۴۴) اگر A دارای یک زیرمجموعه‌ی متناهی باشد، راجع به A چه می‌توان گفت؟

۱۴۵) درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

الف) از اشتراک دو مجموعه‌ی متناهی و نامتناهی، مجموعه‌ای نامتناهی بوجود می‌آید.

ب) می‌توان دو مجموعه نامتناهی یافت که یکی زیرمجموعه دیگری باشد.

پ) اگر $A \subseteq B$ و B مجموعه‌ای متناهی باشد، A ممکن است متناهی یا نامتناهی باشد.

ت) اجتماع مجموعه‌ای نامتناهی با هر مجموعه‌ای، مجموعه‌ای نامتناهی حاصل می‌کند.

ث) تهی یک مجموعه نامتناهی است.

۱۴۶) درستی یا نادرستی هر یک از روابط زیر را تعیین کنید.

الف)

$$5\frac{3}{7} \in [5, 1, 5, 9)$$

ب)

$$-\frac{1}{5} \in [-4, 0]$$

پ)

$$(1 + \sqrt{2}) \in [\frac{1}{2}, 2)$$

ت)

$$\frac{17}{6} \notin (2, 5, 3, 5]$$

۱۴۷) عبارت‌های زیر را تعیین علامت کنید.

الف)

$$P = \frac{(x-2)^{100}(x+3)^{101}}{(x+1)^{102}}$$

ب)

$$P = \frac{(1-2x)(3x^2+2x-1)}{x^2+8}$$

پ)

$$P = \frac{(-2x^2+x-1)(x+1)^3}{(-x^2+5x-6)(x^2+6x+9)}$$

۱۴۸) درستی یا نادرستی روابط زیر را تعیین کنید.

الف)

$$a_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n - 1 \Rightarrow a_3 = \frac{124}{125}$$

ب)

$$a_n = \frac{3n+4}{n-2} \Rightarrow a_5 = \frac{19}{3}$$

۱۴۹) حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف)

$$\sqrt{6}(\sqrt{2}-\sqrt{3})+\sqrt{50}$$

ب

$$\sqrt[5]{2^3} \sqrt{\sqrt{8}} + (\sqrt[5]{\sqrt{2}})^3 - 2^{0.3} - 8^{\frac{1}{5}}$$

پ

$$(\sqrt{6} - \sqrt{5})^4 (\sqrt{6} + \sqrt{5})^4$$

الف

$$\frac{2}{x^2 - 1} - \frac{x}{x^2 - 3x + 2} =$$

ب

$$\frac{x}{x-1} + \frac{3}{x+1} - \frac{4x-2}{x^2-1} =$$

پ

$$\frac{a^2 - b^2}{ab - b^2} - \frac{ab - b^2}{b^2} =$$

ت

$$\frac{a+1}{a-1} + \frac{a+2}{a+3} - \frac{a+7}{a^2+2a-3} =$$

الف

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x+1} > 0$$

ب

$$-1 < \frac{2x+1}{3x-1} < 2$$

پ

$$1 + \frac{x^2}{3x-4} \leq \frac{8x+1}{3x-4}$$

ت

$$\begin{cases} 2x - 5 \geq 1 \\ \frac{x}{2} + 3 \leq 7 \end{cases}$$

الف

$$\frac{m(m^2 + m)}{m-2} > 0$$

ب

$$\frac{x^2 + mx + m}{x - x^2 - 3} < 0$$

الف

$$f(x) = 5x^3 + 4x - 1$$

۱۵۰ حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

۱۵۱ نامعادلات زیر را حل کنید و مجموعه جواب آن را به صورت بازه نشان دهید.

۱۵۲ حدود m را چنان بیابید که نامساوی‌های زیر برقرار باشد.

۱۵۳ دامنهٔ توابع زیر را به دست آورید:

ب

$$h(x) = \frac{x-1}{x+3}$$

پ

$$k(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x^2-1}}$$

ت

$$f(x) = \sqrt{\frac{(x+1)(x-3)}{x^2+5}}$$

ث

$$h(x) = \sqrt{4-x} + \sqrt{x-4}$$

ج

$$g(x) = \frac{3x^5}{x^2-2x-3}$$

چ

$$k(x) = \sqrt{\frac{(x-1)^3}{2-x}}$$

۱۵۴ کدامیک از موارد زیر درست و کدامیک نادرست است؟

الف رابطه $\{(2, 3), (-1, 4), (2, 5)\}$ تابع است.

ب به ۶ طریق می‌توان ۶ کتاب را در یک قفسه کنار هم قرار داد.

پ معادله $0 = 4x^2 + 4x - 1$ ریشه مضاعف دارد.

ت رنگ مورد علاقه افراد یک متغیر کیفی اسمی است.

۱۵۵ جامعه و نمونه را تعریف و برای هریک مثال بزنید.

۱۵۶ جدول زیر متغیرهای دانش‌آموزان را نشان می‌دهد. انواع متغیرها از نظر کمی، کیفی، گسسته، پیوسته، ترتیبی و اسمی را در جدول زیر کامل کنید.

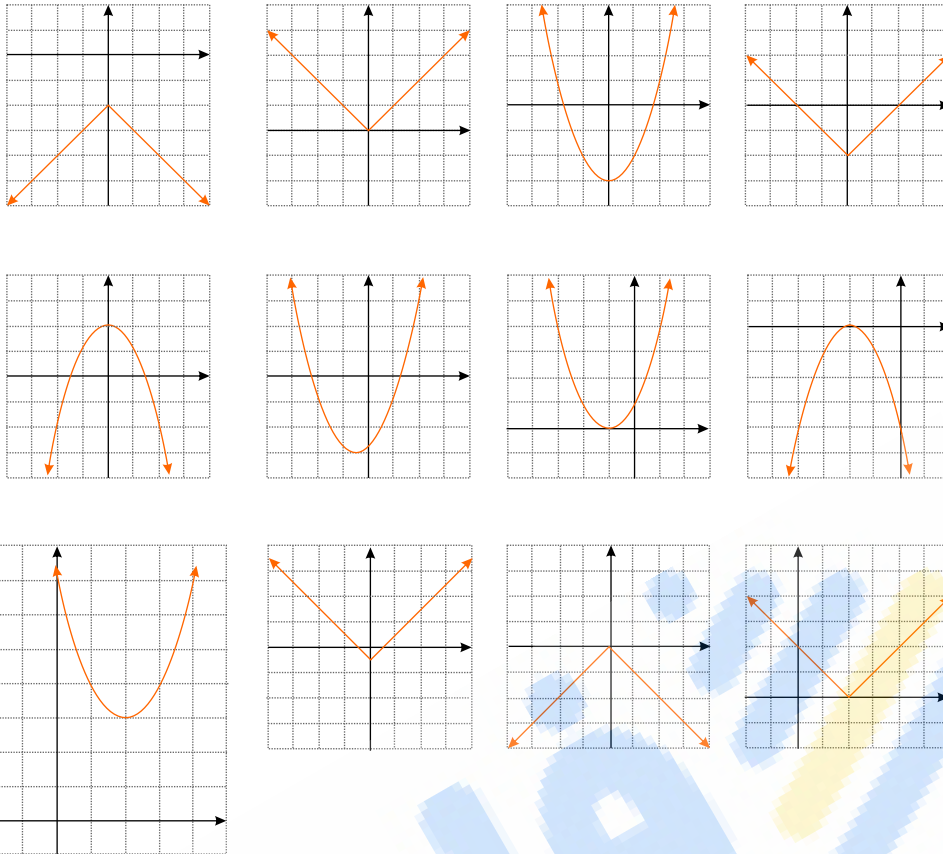
| متغیرهای دانش‌آموزان | کمی | کیفی | گسسته | پیوسته | ترکیبی | اسمی |
|------------------------|-----|------|-------|--------|--------|------|
| نمره ریاضی نهم | | | | | | |
| جنسیت | | | | | | |
| قد | | | | | | |
| وزن | | | | | | |
| هوش (بالا/متوسط/پایین) | | ? | | | ? | |
| رضایت در مدرسه | | | | | | |
| شاخص توده بدن | | | | | | |

۱۵۷ فشار خون نرمال یک شخص مذکر، که بر حسب میلی‌متر جیوه ($mmHg$) اندازه‌گیری می‌شود، با رابطه

$$P = 0.06s^2 - 0.2s + 120$$

محاسبه می‌شود که در آن، P فشار خون نرمال یک فرد با سن s است. سن شخصی را پیدا کنید که فشار خون آن ۱۲۵ میلی‌متر جیوه باشد. (از ماشین حساب استفاده کنید).

هریک از نمودارهای زیر کدامیک از تابع‌های (الف) تا (ر) را نمایش می‌دهد؟ دامنه و برد این توابع چیست؟



- الف) $y = x^2 - 3$ ب) $y = -x^2 + 2$ پ) $y = |x|$ ت) $y = -|x|$
 ث) $y = (x + 1)^2$ ج) $y = |x| - \frac{1}{2}$ چ) $y = |x - 2|$ ح) $y = -(x + 2)^2$
 خ) $y = -|x| - 2$ د) $y = (x - 2)^2 + 3$ ذ) $y = |x| - 2$ ر) $y = (x + \frac{1}{2})^2 - 3$

۱۵۹ اگر درباره تابع g داشته باشیم: $g(4) = 3, g(-2) = \frac{1}{3}, g(1) = 5, g(0) = 2$ ، را به صورت مجموعه‌ای مرتب بنویسید و نمودار آن را رسم کنید.

۱۶۰ علی در هر دقیقه پیاده‌روی، مسافت ۱٫۰ کیلومتر را طی می‌کند. اگر مسافتی را که علی در t دقیقه طی می‌کند، با $f(t)$ نمایش دهیم، کدام عبارت نمایش جبری این تابع را به دست می‌دهد؟

- الف) $f(t) = t - ۰٫۱$ ب) $f(t) = ۰٫۱t$
 پ) $f(t) = t + ۰٫۱$ ت) $f(t) = ۰٫۱ - t$

۱۶۱ برای یک تابع خطی می‌دانیم که: $f(2) = 11$ و $f(0) = 7$. نمودار این تابع را رسم کنید و نمایش جبری آن را بنویسید.

۱۶۲ جدول زیر دمای سنگ‌ها در عمق‌های زیر سطح زمین را نشان می‌دهد.

| | | | | | | |
|------------------|----|----|-----|-----|-----|-----|
| عمق (کیلومتر) | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ | ۶ |
| دما (سانتی‌گراد) | ۵۵ | ۹۰ | ۱۲۵ | ۱۶۰ | ۱۹۵ | ۲۳۰ |

الف) توضیح دهید که چرا این جدول یک تابع را به دست می‌دهد. نمودار آن را رسم کنید.
 ب) معادله‌ای برای این تابع به دست آورید.
 پ) دمای یک سنگ را که در عمق ۱۰ کیلومتری زیرزمین است، بیابید.

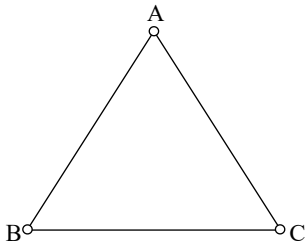
۱۶۳ یک شمع ۲۰ سانتی‌متر ارتفاع دارد و در هر ساعت ۴ سانتی‌متر آن می‌سوزد. پس از چند ساعت شمع خاموش خواهد شد؟ جدولی تنظیم کنید و در ساعات مختلف ارتفاع شمع را محاسبه کنید.

| | | | | | | |
|------------------|---|---|---|---|---|---|
| x (زمان) | ۰ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ |
| y (ارتفاع شمع) | | | | | | |

نمودار این تابع را رسم کنید.

چرا این تابع، یک تابع خطی است؟

۱۶۴ می‌خواهیم رأس‌های مثلث زیر را با دو رنگ قرمز و آبی رنگ کنیم. (الف) به چند طریق این کار امکان‌پذیر است؟



(ب) به چند طریق می‌توان این رنگ‌آمیزی را انجام داد، به گونه‌ای که رأس‌هایی که به هم وصل‌اند، هم‌رنگ نباشند.
(پ) هر دو قسمت (الف) و (ب) را در حالی که از سه رنگ مختلف استفاده می‌کنیم، بررسی کنید.

۱۶۵ اگر $\sin \alpha \times \cos \alpha < 0$ ، آن‌گاه α در کدام یک از نواحی چهارگانه می‌تواند قرار بگیرد؟ چرا؟

۱۶۶ حدود زاویه θ را در هر یک از حالات زیر مشخص کنید.

(الف) $\sin \theta > 0$ ، $\cos \theta > 0$

(ب) $\sin \theta < 0$ ، $\cos \theta > 0$

۱۶۷ (الف) واسطه حسابی بین ۵ و ۱۱ چه عددی است؟

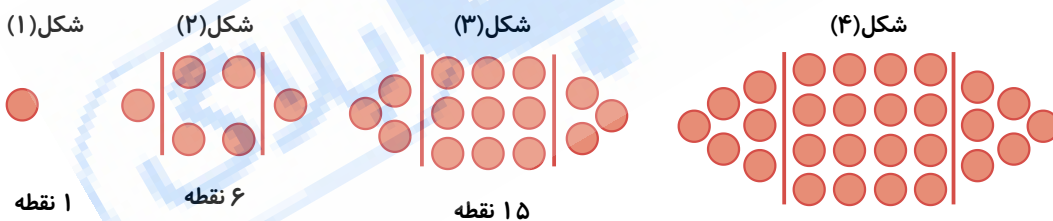
(ب) واسطه حسابی بین ۲۰ و ۳۰ چه عددی است؟

(پ) از دو قسمت قبل چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۱۶۸ جمله عمومی چند دنباله داده شده است. در هر مورد چهار جمله اول دنباله را بنویسید و سپس به هر یک از آنها یک الگوی هندسی نظیر کنید.

(الف) $a_n = 4n$ (ب) $b_n = 3n + 1$ (پ) $c_n = n^2 + 2$ (ت) $d_n = n^2 + n$

۱۶۹ الگوی زیر را در نظر بگیرید.



(الف) شکل بعدی را رسم کنید، سپس تعداد نقاط هر مرحله را به صورت یک دنباله تا جمله ششم آن بنویسید.

(ب) جمله عمومی الگو را بیابید.

(پ) شکل دهم در این الگو چند نقطه دارد؟

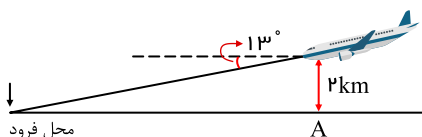
۱۷۰ هر یک از زاویه‌های زیر را روی دایره مثلثاتی رسم کنید، سپس مشخص کنید در کدام یک از نواحی چهارگانه قرار می‌گیرد.

(الف) $270^\circ +$ (ب) 225° (پ) $135^\circ -$ (ت) 185°

۱۷۱ یک هواپیما در ارتفاع 2 km از سطح زمین در حال فرود آمدن است. اگر زاویه هواپیما با افق حدود 13° باشد، هواپیما در چه فاصله‌ای از نقطه

A فرود می‌آید.

$$\tan 13^\circ \approx 0.23$$



۱۷۲ دو مجموعه نامتناهی مثال بزنید که اشتراک آن‌ها مجموعه‌ای متناهی باشد.

۱۷۳) هر یک از عبارتهای زیر را تا حد ممکن (به عبارتهای گویا) تجزیه کنید.

الف) $x^4 - y^4$ (ب) $x^6 - y^6$ (پ) $8a^3 + 27$ (ت) $a^3b^6 - 8$

۱۷۴) هر یک از توانهای کسری زیر را به صورت رادیکال نوشته و در صورت امکان حاصل آنها را به دست آورید.

| | | |
|--|-----------------------------------|----------------------|
| $16^{\frac{1}{2}}$ | $5^{\frac{1}{2}}$ | $4^{\frac{2}{7}}$ |
| $3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{2}{3}}$ | $(4^{\frac{1}{2}})^{\frac{2}{3}}$ | $4^{\frac{2}{3}}$ |
| $32^{-\frac{1}{5}}$ | $32^{\frac{2}{5}}$ | $125^{-\frac{2}{3}}$ |

۱۷۵) روی محیط دایره‌های ۲۰ نقطه‌ای متمایز وجود دارد. از هر نقطه به نقاط دیگر وصل می‌کنیم. تعداد کل وترهای متمایز را به دست آورید.

۱۷۶) انواع متغیرهای کتی را نام برده و هر یک را توضیح دهید.

۱۷۷) متغیرهای کیفی را تعریف کرده و مثال بزنید.

۱۷۸) متغیرهای کتی را تعریف کرده و مثال بزنید.

۱۷۹) متغیر و مقدار متغیر را تعریف کرده و برای هر یک مثالی بزنید.

۱۸۰) درستی یا نادرستی هر عبارت را تعیین کنید.

الف) اندازه‌ی جامعه، کم‌تر از اندازه‌ی نمونه است.

ب) اعضای نمونه، همان اعضای جامعه‌اند.

ج) نمونه، زیرمجموعه‌ای از جامعه است.

۱۸۱) درست یا نادرست بودن جملات زیر را تعیین کنید.

الف) اولین قدم در استفاده از علم آمار، جمع‌آوری داده‌هاست.

ب) پیش‌بینی و تصمیم‌گیری برای آینده، نتیجه‌ی استفاده از علم آمار است.

ج) علم آمار، همان اعداد و ارقام است.

۱۸۲) سکه‌ای را دو بار پرتاب می‌کنیم. اگر هر دو پرتاب مثل هم بود تاس می‌ریزیم و اگر مثل هم نبود یک بار دیگر سکه را پرتاب می‌کنیم. احتمال

این که پرتاب‌ها یک در میان مثل هم باشند کدام است؟

۱۸۳) سکه‌ای را پرتاب می‌کنیم و سپس تاسی می‌ریزیم. مطلوبست احتمال آن‌که:

الف) تاس زوج بیاید.

ب) سکه رو بیاید.

ج) تاس فرد و سکه پشت بیاید.

د) تاس فرد یا سکه پشت بیاید.

۱۸۴) در یک کارخانه ۵ نوع کالای A, B, C, D, E تولید می‌شوند. می‌خواهیم برای آزمایش دو نوع از این پنج نوع کالا را به تصادف انتخاب کرده

و آزمایش کنیم. مطلوبست احتمال آن‌که:

الف) A انتخاب شود.

ب) A, B انتخاب نشوند.

پ) C انتخاب شود ولی D انتخاب نشود.

۱۸۵) سکه‌ای را به هوا می‌اندازیم. اگر پشت بیاید، یک تاس می‌اندازیم و اگر رو بیاید دو سکه را دیگر می‌اندازیم.

الف) فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی را مشخص کنید.

ب) پیشامد آن‌که «تاس زوج بیاید» را مشخص کنید.

پ) پیشامد آن‌که «حداقل ۲ سکه رو بیاید» را مشخص کنید.

۱۸۶) در یک مدرسه، ۳ کلاس داریم که در کلاس الف ۷ دانش‌آموز، در کلاس ب ۱۰ دانش‌آموز و در کلاس پ ۸ دانش‌آموز داوطلب شرکت در

شورای دانش‌آموزی هستند و این شورا حداکثر ۱۵ نفر از دانش‌آموزان این سه کلاس را می‌پذیرد. احتمال این‌که ۴ دانش‌آموز از کلاس الف، ۵

دانش‌آموز از کلاس ب و ۶ دانش‌آموز از کلاس پ به این شورا راه یابند چه قدر است؟ (استفاده از ماشین حساب بلامانع است).

۱۸۷ در پرتاب دو تاس با رنگ‌های قرمز و آبی به‌طور همزمان مطلوبست:

الف) تعداد اعضای فضای نمونه‌ای

ب) پیشامدهای زیر:

$A =$ پیشامد آن‌که هر دو تاس فرد بیایند

$B =$ پیشامد آن‌که تاس آبی زوج بیاید

$C =$ پیشامد آن‌که مجموع دو تاس از ۶ بیش‌تر باشد

پ) پیشامدهای زیر:

$A - B$

$A \cap C$

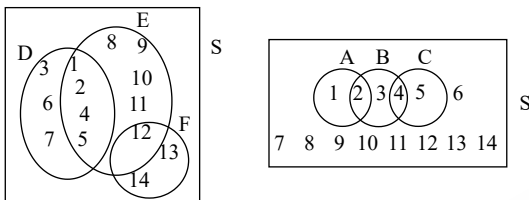
$B \cup C$

$A' - B'$

$A' \cap C$

ت) تعیین ناسازگار بودن یا نبودن یکی از پیشامدهای قسمت ب و یک پیشامد دلخواه از قسمت ج با یکدیگر (برای مثال A و $A - B$)

۱۸۸ اجتماع دو پیشامد ناسازگار در فضای نمونه‌ای S در شکل سمت راست، برابر با اشتراک کدام پیشامدها در فضای نمونه‌ای شکل سمت چپ است؟



۱۸۹ فضای نمونه‌ای و پیشامد را تعریف کنید.

۱۹۰ ۴ کتاب ریاضی و ۴ کتاب فیزیک داریم. به چند حالت می‌توانیم آن‌ها را کنار هم و به صورت یک در میان بچینیم؟

۱۹۱ ۴ کتاب ریاضی و ۳ کتاب فیزیک داریم؛ به چند حالت می‌توانیم آن‌ها را یک در میان در یک قفسه کنار هم بچینیم؟

۱۹۲ عبارت‌های زیر را تا حد امکان ساده کنید.

الف) $\frac{2n}{n!} - \frac{1}{(n-1)!}$ ب) $\frac{3}{4!} + \frac{5}{5!}$

ت) $\frac{1}{12}(10! + 11!)$ پ) $(n+2)! - (n+1)!$

۱۹۳ نمودار تابعی، یک سهمی است که از نقاط $(1, -4)$ و $(2, -3)$ می‌گذرد و محور y ها را در نقطه‌ای به عرض -3 قطع می‌کند. نمایش جبری

این تابع را بیابید و با رسم آن، دامنه و بردش را معلوم کنید.

۱۹۴ اگر دامنه و برد تابع $f(x) = \{(2, a), (b, a+b), (7, 20), (4, 11)\}$ به ترتیب برابر با $\{2, 3, 7, 4\}$ و $\{a, 8, 20, 11\}$ باشند، آنگاه

حاصل $2a + b$ را بدست آورید.

۱۹۵ تابع $f(x) = 2x - 1$ را با دامنه‌های زیر رسم کنید.

الف) \mathbb{R} ب) اعداد حقیقی نامنفی ج) $[-1, 2]$ د) اعداد حقیقی منفی

۱۹۶ یک تابع خطی به صورت $f(x) = 3x - b$ از نقطه‌ی $(2, -3)$ عبور می‌کند؛ b را بدست آورید و تابع را رسم کنید.

۱۹۷ در یک مثلث متساوی‌الساقین، طول هر یک از دو ساق از قاعده‌ی مثلث ۳ واحد بیشتر است؛ رابطه‌ای که محیط این مثلث را برحسب تابعی از

طول قاعده‌ی آن بیان می‌کند بنویسید.

۱۹۸ جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

الف) مجموعه جواب نامعادله‌ی قدر مطلق $|x| < 3$ نقاطی است که

ب) مجموعه جواب نامعادله‌ی قدر مطلق $|x| > 3$ نقاطی است که

۱۹۹ نامعادله‌ی $\frac{x-1}{x} > \frac{x+1}{x+2} > \frac{x+3}{x+4}$ را حل کنید.

۲۰۰) حدود a را طوری تعیین کنید که عبارت $y = ax^2 + (a-1)x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2a}$ همواره منفی باشد.

۲۰۱) دمای ایده‌آل برای پرورش قارچ گلخانه‌ای بین ۱۸ تا ۲۵ درجه سانتی‌گراد است؛ اگر سیستم تنظیم دمای گلخانه برحسب فارنهایت باشد و

بدانیم $C = \frac{5}{9}(F - 32)$ ، سیستم را باید بین چه دماهایی برحسب فارنهایت تنظیم کنیم؟

۲۰۲) معادله‌ی درجه‌ی دوم را تعریف کنید.

۲۰۳) حاصل $\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} + 2\sqrt{2}$ را بدست آورید.

۲۰۴) تا حد ممکن اعداد زیر رادیکال را خارج کنید.

مثال: $\sqrt{8} = \sqrt{2 \times 4} = \sqrt{2} \times \sqrt{4} = 2\sqrt{2}$

- الف) $\sqrt{32}$ ب) $\sqrt{20}$ پ) $\sqrt{37}$ ت) $\sqrt{52}$
 ث) $\sqrt{72}$ ج) $\sqrt{36}$ چ) $\sqrt{44}$ ح) $\sqrt{33}$
 خ) $\sqrt{24}$ د) $\sqrt{12}$

۲۰۵) راجع به تساوی $\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n$ با توجه به مثبت یا منفی بودن a و زوج یا فرد بودن n چه می‌توان گفت و این تساوی چه مواقعی برقرار است؟

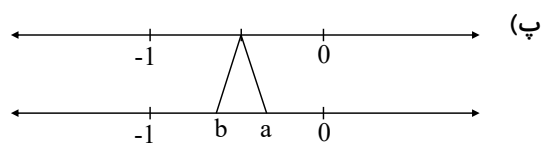
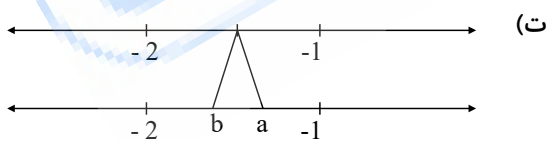
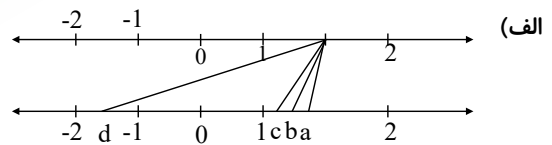
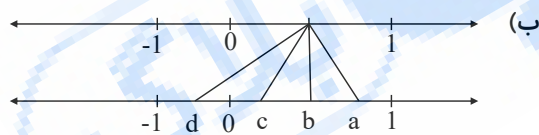
۲۰۶) جاهای خالی را پر کنید.

الف) اعداد ۴ و ریشه‌های چهارم عدد هستند.

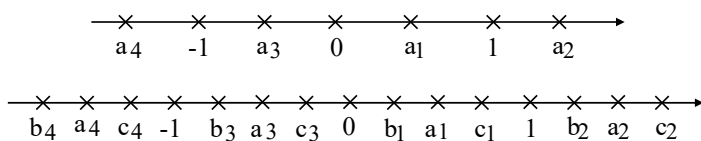
ب) اگر a ریشه‌ی مثبت چهارم عدد ۸۱ باشد، حاصل $a^2 - 7$ برابر است با

۲۰۷) در هر یک از اشکال زیر، نقطه‌ای از محور بالا به ریشه‌های سوم، چهارم و پنجم خود در محور پایین وصل شده است. مشخص کنید هر کدام از

اعداد a و b و c و d مربوط به کدام ریشه است.



۲۰۸) هر یک از اعداد مشخص شده روی محور بالا را به یکی از نقاط مشخص شده روی محور پایین که متناظر با ریشه‌ی سوم آن عدد است وصل کنید.



۲۰۹) مقدار تقریبی هر یک از اعداد زیر را با دو رقم اعشار مشخص کنید. (استفاده از ماشین حساب مجاز است)

- الف) $\sqrt{12}$ ب) $\sqrt[3]{12}$ پ) $\sqrt[4]{12}$ ت) $\sqrt[5]{-12}$
 ث) $\sqrt[3]{25}$ ج) $\sqrt[3]{-27}$ چ) $\sqrt{30}$

۲۱۰) پاسخ عبارات های زیر را بیابید (در صورت صحیح نبودن پاسخ، آن را به صورت دو عدد صحیح که پاسخ حقیقی بین آن دو است، بنویسید. (مثال

: عددی بین ۴ و ۵ $\sqrt{17} = 5$ و $\sqrt{16} = 4$

- | | | | |
|--------------------|-------------------|--------------------|-------------------|
| الف) $\sqrt{30}$ | ب) $-\sqrt{37}$ | پ) $\sqrt{85}$ | ت) $\sqrt[3]{8}$ |
| ث) $\sqrt[3]{-8}$ | ج) $\sqrt[3]{30}$ | چ) $\sqrt[3]{-27}$ | ح) $\sqrt{27}$ |
| خ) $\sqrt[4]{256}$ | د) $\sqrt{256}$ | ذ) $\sqrt[4]{1}$ | ر) $\sqrt[5]{-1}$ |
| ز) $\sqrt{1}$ | ژ) $\sqrt[3]{-1}$ | | |

۲۱۱) اگر یکی از ریشه‌های چهارم عدد مثبت a ، b باشد، آیا a ریشه‌ی چهارم دیگری دارد؟

۲۱۲) شهاب سنگی به صورت مایل در حال سقوط به سطح زمین است که با افق زاویه‌ی 30° می‌سازد و در ارتفاع ۴۰ متری سطح زمین قرار دارد. تا زمانی که این شهاب سنگ با زمین برخورد کند، چند متر در راستای افق به سمت جلو حرکت کرده است؟

۲۱۳) درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

الف) اگر $\alpha + \beta = 90^\circ$ باشد آنگاه $\sin \alpha = \cos \beta$.
 ب) در مثلث قائم‌الزاویه، ضلع روبه‌رو به زاویه‌ی 30° نصف وتر است.

۲۱۴) جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. ($0 < \alpha < 90$)

الف) تنها زاویه α که \sin و \cos برابر دارد است.

ب) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ، تانژانت زاویه‌ی است.

پ) سینوس زاویه‌ی برابر $\cos 30^\circ$ است.

۲۱۵) درستی یا نادرستی گزاره زیر را با یک مثال نشان دهید.

"نسبت‌های مثلثاتی برای هر زاویه یکتاست."

۲۱۶) یک شرکت برای معرفی محصولات خود از این طرح استفاده می‌کند که هر یک از کارکنانش محصول مورد نظر را به ۲ نفر معرفی کنند و هر

یک از آن دو به دو نفر دیگر و... اگر این شرکت ۲۰ نفر کارمند داشته باشد، در دهمین مرتبه اطلاع‌رسانی، چند نفر از محصولات این شرکت مطلع می‌شوند؟

۲۱۷) خطی یا غیر خطی بودن الگوهای زیر را مشخص کنید؟

الف) ۲, ۵, ۸, ...

ب) ۴, ۱۰, ۱۸, ۲۸, ...

۲۱۸) در یک مجتمع فرهنگی ۳۰ نفری، تعداد ۱۲ نفر در کلاس نقاشی ثبت نام کرده‌اند و ۷ نفر در کلاس خط، اگر ۱۳ نفر هنوز در هیچ یک از دو

کلاس ثبت‌نام نکرده باشند چند نفر در هر دو کلاس ثبت‌نام کرده‌اند؟

۲۱۹ هر یک از بازه های ستون چپ، شامل یک یا چند تا از اعداد ستون راست هستند. هر عدد را به بازه ی مربوط به خود وصل کنید.

| بازه ها | اعداد |
|------------------------------|------------------------|
| $(-3, 2]$ | ۵ |
| $(1, +\infty)$ | $\sqrt{7}$ |
| $[0, 2]$ | ۲٫۵ |
| $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ | $6,022 \times 10^{23}$ |
| $(-2, \frac{5}{2})$ | $-\frac{2}{3}$ |
| $(-1, 1)$ | $\sqrt{2}$ |
| $(-\infty, +\infty)$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ |
| | ۱۰۰۰ |
| | -۱۰۰۰ |
| | $-\sqrt{3}$ |
| | $\frac{1}{2}$ |
| | ۰٫۷ |

۲۲۰ درستی یا نادرستی عبارت های زیر را مشخص کنید.

- الف) $\frac{3}{5} \in [\frac{1}{3}, 1)$ ب) $-3 \in (-1, 3)$ پ) $0 \in \{-1, 1\}$
 ت) $0 \in [-1, 1)$ ث) $[-3, 2) \subset (-3, 2]$ ج) $\emptyset \subset [3, +\infty)$
 چ) $\{1, 2\} \in [1, 2]$ ح) $\sqrt{5} \in [-\sqrt{5}, +\sqrt{5})$ خ) $\frac{1}{2} \in (-1, 1)$

۲۲۱ درستی یا نادرستی هر یک از عبارت های زیر را تعیین کنید.

الف) $3, 17$ در بازه $(-3, 2)$ قرار دارد.

ب) مقدار کسینوس کمان 230° عددی منفی است.

پ) همیشه حاصل $C(n, 1)$ معادل n است.

ت) فضای نمونه ای در پرتاب دو تاس با هم به صورت $n(S) = 36$ است.

۲۲۲ صفحه عقربه A را به ۴ قسمت و صفحه عقربه B را به ۵ قسمت تقسیم کرده ایم. عقربه ها را می چرخانیم. احتمال آن که هر دو عقربه سوی ناحیه با اعداد مساوی قرار نگیرد چه قدر است؟

۲۲۳ مجموعه $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ را در نظر بگیرید:

الف. چند زیرمجموعه ۳ عضوی دارد؟

ب. چند زیرمجموعه ۳ عضوی شامل ۴ دارد؟

پ. چند زیرمجموعه ۳ عضوی شامل ۴ و ۵ دارد؟

۲۲۴ اگر $n! = 120 \times 42$ باشد، n کدام است؟

۹ (۴)

۸ (۳)

۷ (۲)

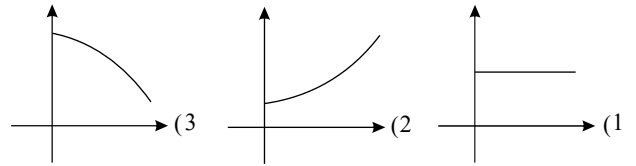
۶ (۱)

۲۲۵) نمودارهای زیر رابطه بین ساعت و میزان درجه حرارت را در یک روز تابستان نشان می‌دهند.

الف) کدام یک می‌تواند به‌طور تقریبی حدفاصل ساعت ۲ تا ۴ بعدازظهر باشد؟

ب) کدام یک می‌تواند حدفاصل ساعت ۱۰ صبح تا ۱ بعدازظهر باشد؟

پ) کدام یک می‌تواند در ساعت ۱۰ شب تا ۲ نیمه‌شب ترسیم شده باشد؟



۲۲۶) به موارد زیر پاسخ دهید.

الف) اگر A و B و C پیشامدهایی از فضای نمونه‌ای S باشند، عبارت زیر را به صورت ریاضی نوشته و با نمودار ون نمایش دهید.

« A یا C رخ بدهند ولی B رخ ندهد.»

ب) اعداد از ۱ تا ۱۲ را روی توپ‌هایی نوشته و درون جعبه‌ای قرار داده‌ایم، سپس دو توپ با هم از این جعبه خارج می‌کنیم، چه قدر احتمال دارد که

حداقل یک توپ عدد اول باشد؟

فان‌بیلدی

پاسخنامه تشریحی

۱ هر مداد ۳ حالت دارد:

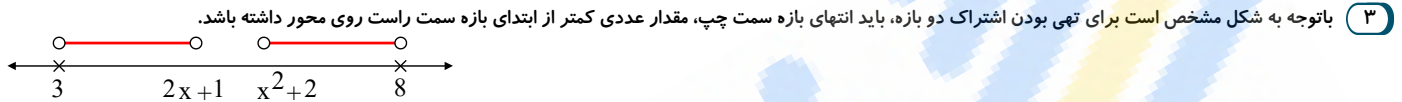
$$\underline{۳}, \underline{۳}, \underline{۳}, \underline{۳} = ۳^۴$$

$$\sin^۲\theta + \cos^۲\theta = 1 \rightarrow \cos^۲\theta = 1 - \frac{۲۴}{۴۹} = \frac{۲۵}{۴۹}$$

$$\rightarrow \cos\theta = \pm \frac{۵}{۷}$$

$$\cos\theta = -\frac{۵}{۷} \rightarrow \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{۲\sqrt{۶}}{۷}}{-\frac{۵}{۷}} = -\frac{۲\sqrt{۶}}{۵}$$

از آن جا که θ در ربع دوم است، کسینوس آن منفی است؛ پس:



بنابراین:

$$\begin{aligned} x^۲ + ۲ > ۲x + 1 &\Rightarrow x^۲ - ۲x + ۲ - 1 > ۰ \\ &\Rightarrow x^۲ - ۲x + 1 > ۰ \Rightarrow (x-1)^۲ > ۰ \\ ۲x + 1 > ۳ &\Rightarrow x > ۱ \\ ۸ > x^۲ + ۲ &\Rightarrow x^۲ < ۶ \Rightarrow -\sqrt{۶} < x < \sqrt{۶} \end{aligned}$$

$$a_1 + a_۴ = ۵۶ \Rightarrow a + ar^۳ = ۵۶ \Rightarrow a(1+r^۳) = ۵۶$$

$$a_۲ + a_۳ = ۲۴ \Rightarrow ar + ar^۲ = ۲۴ \Rightarrow ar(1+r) = ۲۴$$

$$\frac{a(1+r^۳)}{ar(1+r)} = \frac{۵۶}{۲۴} \xrightarrow{\text{مکعبیت}} \frac{(1+r)(1-r+r^۲)}{r(1+r)} \xrightarrow{\text{اتحاد تقاضل}} \frac{1-r+r^۲}{r} \xrightarrow{\text{حل معادله درجه ۲}} r = ۳, \frac{1}{۳}$$

$$\text{حالت اول: } r = \frac{1}{۳} \Rightarrow a\left(\frac{1}{۳}\right)\left(\frac{۴}{۳}\right) = ۲۴ \Rightarrow a = ۵۴ \Rightarrow a_n = ۵۴\left(\frac{1}{۳}\right)^{n-1}$$

$$\text{حالت دوم: } r = ۳ \Rightarrow a(۳)(۴) = ۲۴ \Rightarrow a = ۲ \Rightarrow a_n = ۲(۳)^{n-1}$$

۵

الف) ۷!

$$P(۷, ۴) = \frac{۷!}{۳!} = \frac{۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳!}{۳!} = ۸۴۰ \text{ (ب)}$$

(پ) سه حرف اول و وضعشان مشخص شده است. پس باید جایگشت‌های ۳ حرف دیگر را محاسبه کنیم که حاصل برابر است با $P(۴, ۳)$
 (ت) سه کلمه اول خودشان ۳! حالت دارند و برای سه حرف دیگر $P(۴, ۳)$ حالت داریم و طبق اصل ضرب در مجموع $۳! \times P(۴, ۳)$ حالت داریم.
 (ث) حرف اول ۳ حالت دارد و برای ۵ حرف دیگر $P(۶, ۵)$ حالت داریم و طبق اصل ضرب در مجموع $۳ \times P(۶, ۵)$ حالت داریم.
 (ج) اگر کلمه با حرف "ی" شروع شود برای حرف آخر ۴ حالت و برای سه حرف میانی $P(۵, ۳)$ حالت داریم. یعنی $۱ \times ۴ \times ۶۰$
 حال فرض کنید حرف ابتدایی یکی از حروف "پ" یا "ن" باشد. در این صورت برای حرف آخر ۵ حالت و برای سه حرف میانی $P(۵, ۳)$ حالت داریم. یعنی $۲ \times ۵ \times ۶۰$

$$\text{پس در نتیجه داریم: } ۱ \times ۴ \times ۶۰ + ۲ \times ۵ \times ۶۰ = ۸۴۰$$

۶ الف) برای این که عدد ما بزرگ تر از ۲۱۴۰۰ باشد:

اگر رقم سمت چپ بزرگ تر از ۲ باشد؛ عدد بزرگ تر از ۲۱۴۰۰ می شود

$$\frac{۲}{۳}, \frac{۵}{۳}, \frac{۵}{۳}, \frac{۵}{۳}, \frac{۵}{۳} = ۲ \times ۵ \times ۵ \times ۵ \times ۵ = ۲ \times ۵^۴$$

اگر رقم سمت چپ برابر با ۲ بوده و رقم بعدی بزرگ تر از ۱ باشد

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2} = 1 \times 3 \times 5 \times 5 = 3 \times 5^3$$

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{1}, \frac{1}{4}, \frac{5}{1} \Rightarrow 4 \times 5 = 20$$

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{0}, \frac{4}{1} \Rightarrow 4$$

$$3 \times 5^4 + 3 \times 5^3 + 20 + 4$$

$$\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{3}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \quad 2 \times 4 \times 3 \times 2 = 48$$

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \quad 2 \times 3 \times 2 = 12$$

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{1}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \quad 2 \times 1 = 2$$

$$48 + 12 + 2 = 62$$

$$\binom{4}{1} \binom{3}{1} = 4 \times 3 = 12$$

$$\binom{4}{1} \binom{2}{1} = 4 \times 2 = 8$$

$$\binom{3}{1} \binom{2}{1} = 3 \times 2 = 6$$

$$12 + 8 + 6 = 26$$

$$[-\infty, -2] \sim x \leq -2, [3, +\infty) \sim x \geq 3$$

$$\left. \begin{aligned} x \leq -2 &\rightarrow x - \frac{1}{4} \leq -\frac{4}{4} - \frac{1}{4} \Rightarrow x - \frac{1}{4} \leq -\frac{5}{4} \\ x \geq 3 &\rightarrow x - \frac{1}{4} \geq \frac{12}{4} - \frac{1}{4} \Rightarrow x - \frac{1}{4} \geq \frac{11}{4} \end{aligned} \right\} \rightarrow \left| x - \frac{1}{4} \right| \geq \frac{5}{4}$$

اگر رقم اول ۲ و رقم دوم ۱ و رقم سوم ۴ باشد و رقم چهارم صفر نباشد

اگر رقم اول ۲ و رقم دوم ۱ و رقم سوم ۴ باشد و رقم چهارم صفر نباشد و رقم پنجم صفر نباشد:

پس کل حالات برابر است با:

(ب) برای بزرگ‌تر از ۰۲۱۴۰۰ بودن، اگر رقم سمت چپ ۳ یا ۴ باشد

اگر رقم سمت چپ ۲ باشد و رقم بعدی ۳ یا ۴ باشد:

اگر دو رقم سمت چپ به ترتیب ۲ و ۱ باشند و سومین رقم ۴ باشد:

۷ یا باید رنگ‌های سبز و آبی یا قرمز یا قرمز و سبز را انتخاب کنیم:

سبز و قرمز:

سبز و آبی:

آبی و قرمز:

طبق اصل جمع:

$$|x| \geq a \rightarrow \begin{cases} x \geq a \\ x \leq -a \end{cases}$$

۸

۹ با نوشتن معادله‌ی سهمی و جایگذاری نقطه‌ها در آن داریم:

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$\xrightarrow{(0,2)} 2 = a \times 0 + b \times 0 + c \Rightarrow 2 = c$$

$$\xrightarrow{(1,2)} 2 = a + b + 2 \Rightarrow a + b = 0 \Rightarrow a = -b$$

$$\text{خط تقارن } x = \frac{-b}{2a} \xrightarrow{a=-b} x = \frac{-b}{2(-b)} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

جمله ی عمومی دنباله ی حسابی
 $a_n = a_1 + (n - 1)d$
 قدر نسبت: d , جمله ی اول دنباله: a_1

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$$

$$\frac{a_3 + a_4 + a_5}{3} = a_1 + a_2$$

$$\frac{a_1 + 2d + a_1 + 3d + a_1 + 4d}{3} = a_1 + a_1 + d$$

$$\frac{3a_1 + 9d}{3} = 2a_1 + d$$

$$a_1 + 3d = 2a_1 + d$$

$$2d = a_1$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d + a_1 + 3d + a_1 + 4d = 100$$

$$\xrightarrow{a_1=2d} 5a_1 + 10d = 100 \rightarrow 5 \times 2d + 10d = 100 \quad 10d + 10d = 100$$

$$20d = 100 \Rightarrow d = 5$$

$$a_1 = 2d = 10$$

نحوه ی توزیع نان بین ۵ نفر $\rightarrow 10, 15, 20, 25, 30$

۱۱ الف) دقت کنید چون پاسخ به سؤالات، مرحله به مرحله است و هر کدام از سؤالات چهارگزینه ای، ۴ حالت دارد بنابراین اصل ضرب داریم:

$$4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^{10}$$

و برای سؤال های دو گزینه ای داریم:

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5$$

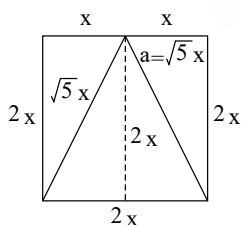
و چون به هر دو سری از سؤالات با هم جواب می دهد تعداد حالات کل برابر است با:

$$4^{10} \times 2^5$$

ب) اگر بتواند به هر سؤال پاسخ بدهد یا ندهد آن وقت برای سؤال های ۴ گزینه ای، ۵ حالت وجود دارد: یکی از ۴ گزینه یا اینکه اصلاً جواب ندهد و برای سؤال های ۲ گزینه ای هم ۳ حالت وجود دارد: یکی از دو گزینه یا جواب ندادن به سؤال پس داریم:

$$5^{10} \times 3^5$$

با نوشتن رابطه ی فیثاغورس در مثلث کناری داریم:



$$a^2 = (2x)^2 + x^2 = 4x^2 + x^2 = 5x^2 \Rightarrow a = \sqrt{5}x$$

$$S_{A\text{ مثلث}} = \frac{2x \times 2x}{2} = 2x^2$$

$$P_{A\text{ مثلث}} = \sqrt{5}x + \sqrt{5}x + 2x = 2(\sqrt{5} + 1)x$$

$$2x^2 + 2(\sqrt{5} + 1)x = 5 - \sqrt{5} \Rightarrow 2x^2 + 2(\sqrt{5} + 1)x + \sqrt{5} - 5 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4(5 + 1 + 2\sqrt{5}) - 4(2)(\sqrt{5} - 5)$$

$$\Rightarrow 4(6 + 2\sqrt{5}) - 4(2\sqrt{5} - 10) = 24 + 8\sqrt{5} - 8\sqrt{5} + 40 = 64$$

$$x_1, x_2 = \frac{-2(\sqrt{5}+1) \pm \sqrt{64}}{2 \times 2} = \frac{-\sqrt{5}-1 \pm 4}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \end{cases} \text{ غرق}$$

$$\text{مساحت مربع} = 4x^2 = 4 \times \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{4 \times (49+5-24\sqrt{5})}{4} = 54 - 14\sqrt{5}$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

۱۳

الف) $a = 3 \quad b = -5 \quad c = 7$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4(3)(7)}}{2 \times 3} = \frac{5 \pm \sqrt{-59}}{6} \Rightarrow \text{معادله جواب ندارد}$$

ب) $2x^2 + 3x - 5 - 8 = 0$

دقت کنید رابطه‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ برای معادله‌ی $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ برقرار است.

بنابراین ابتدا معادله را استانداردسازی می‌کنیم:

$$2x^2 + 3x - 13 = 0$$

$$\left. \begin{matrix} a = 2 \\ b = 3 \\ c = -13 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4(2)(-13) = 9 + 104 = 113$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{113}}{4}$$

ب) $4x^2 - 3x + 2 = 1 \rightarrow 4x^2 - 3x + 1 = 0$

$$\left. \begin{matrix} a = 4 \\ b = -3 \\ c = 1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \Delta = 9 - 4(4)(1) = 9 - 16 = -7 \xrightarrow{\Delta < 0} \text{معادله جواب ندارد}$$

ت) $3x^2 - 3x + \frac{3}{4} = 0$

$$\left. \begin{matrix} a = 3 \\ b = -3 \\ c = \frac{3}{4} \end{matrix} \right\} \rightarrow \Delta = 9 - 4(3)\left(\frac{3}{4}\right) = 9 - 9 = 0 \xrightarrow{\Delta = 0} \text{یک جواب} \quad x_1 = x_2 = \frac{3}{2 \times 3} = \frac{1}{2}$$

ریشه‌ی مضاعف

۱۴

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{mn}} = \sqrt[mn]{a}$$

الف) $\sqrt[2]{\sqrt[3]{2^6}} = \sqrt[2]{2^2} = \left(2^{\frac{2}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{2}{4}} = \sqrt[4]{2^2} = \sqrt[4]{4}$

ب) $\sqrt{\sqrt{256}} = \sqrt{\sqrt{2^8}} = \sqrt{2^4} = \left(2^{\frac{4}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{4}{4}} = 2^1 = 2$

ج) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{2048}} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{2^{11}}} = \sqrt[4]{2^{\frac{11}{3}}} = \left(2^{\frac{11}{3}}\right)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{11}{12}} = \sqrt[12]{2^{11}}$

راه دوم: تمام فرجه‌ها را در هم ضرب کرده و به صورت یک رادیکال می‌نویسیم: $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

الف) $\sqrt[2]{\sqrt[3]{2^6}} = \sqrt[2]{2^2} = 2^{\frac{2}{2}} = 2^1 = 2$

ب) $\sqrt{\sqrt{256}} = \sqrt{\sqrt{2^8}} = \sqrt{2^4} = 2^{\frac{4}{2}} = 2^2 = 4$

$$ج) \sqrt[4]{\sqrt[3]{2048}} = \sqrt[12]{2048} = \sqrt[12]{2^{11}}$$

۱۵

جمله ی عمومی دنباله ی حسابی

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

قدر نسبت: d , جمله ی اول دنباله: a_1

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = 21 \\ d = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a_n = a_1 + (n - 1)d = 21 + (n - 1) \times -3 = 21 - 3n + 3 = 24 - 3n \\ a_n < 0 \Rightarrow 24 - 3n < 0 \Rightarrow 24 < 3n \xrightarrow{\div 3} 8 < n \end{array}$$

$n > 8 \Rightarrow n \geq 9$ از جمله هشتم به بعد دنباله منفی می شود، یعنی اولین جمله منفی دنباله نهمین جمله آن است.

۱۶ قطعاً A یک مجموعه نامتناهی است که توانسته یک زیرمجموعه نامتناهی را در بر بگیرد.

۱۷

$$y = \frac{15}{8}x^2 - 30x + 200 > 110 \Rightarrow \frac{15}{8}x^2 - 30x + 200 - 110 > 0$$

$$\Rightarrow \frac{15}{8}x^2 - 30x + 90 > 0 \xrightarrow{\times \frac{8}{15}} x^2 - 16x + 48 > 0 \Rightarrow (x - 12)(x - 4) > 0$$

| | | | |
|------------------|---|----|---|
| | 4 | 12 | |
| $x - 12$ | - | - | + |
| $x - 4$ | - | + | + |
| $x^2 - 16x + 48$ | + | - | + |

$\Rightarrow x \in (-\infty, 4) \cup (12, +\infty) \xrightarrow{x > 0} x \in (0, 4) \cup (12, +\infty)$

جواب بدست آمده از نظر ریاضیاتی قابل قبول است اما مورد قبول واقع شدن یا نشدن آن از نظر پزشکی و فیزیولوژیکی نیازمند نظرات متخصصان فن است!!!

۱۸ کلیه ی اعداد ۵ رقمی را منهای اعداد ۵ رقمی بدون تکرار می کنیم:

اعداد ۵ رقمی با تکرار ارقام $5^5 = 5, 5, 5, 5, 5$

اعداد ۵ رقمی بدون تکرار ارقام $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

اعداد ۵ رقمی که در آن ها ارقام تکراری به چشم می خورد $5^5 - 120 = 120$

1, 2, 3, 4, 5
a, b, c, d, e, f

اگر ابتدا عدد باشد:

$$\text{عدد, حرف, عدد} = 5 \times 6 \times 5 = 150$$

اگر ابتدا حرف باشد

$$\text{حرف, عدد, حرف} = 6 \times 5 \times 6 = 180$$

در مجموع طبق اصل جمع داریم:

$$150 + 180 = 330$$

۲۰

$$x^3 + x^2 - x - 1 \xrightarrow{\text{فکتور } x^2} x^2(x+1) - (x+1) \xrightarrow{\text{فکتور } x+1} (x+1)(x^2-1) \\ = (x+1)(x+1)(x-1) = (x+1)^2(x-1)$$

۲۱ طبق رابطه ی تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه داریم:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$14 = 10 + n(B) - 3 \Rightarrow n(B) = 14 - 10 + 3 = 7$$

۲۲

اگر M مجموعه مرجع باشد متمم مجموعه ی A را به صورت $M - A$ تعریف می کنیم و با A' نشان می دهیم.

الف) $A' = \{b, c, d\}$

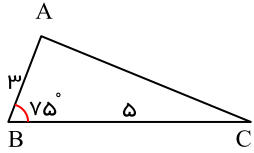
ب) $B' = \{a, d, e\}$

پ) $A \cap B' = \{a, e\} \cap \{a, d, e\} = \{a, e\}$

ت) $A' \cup B = \{b, c, d\} \cup \{b, c\} = \{b, c, d\}$

ث) $A - B' = \{a, e\} - \{a, d, e\} = \emptyset$

۲۳



می‌دانیم: $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times AB \times BC \times \sin \hat{B}$

$$S = \frac{1}{2} \times 3 \times 5 \times \sin 75^\circ = \frac{1}{2} \times 3 \times 5 \times \frac{96}{100} = 7,2 \text{ cm}^2$$

۲۴ از ترکیب هر ۲ رنگ، هر ۳ رنگ و هر ۴ چهار رنگ، رنگ‌های جدید به وجود می‌آید. بنابراین داریم:

$$\binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = \frac{4!}{2!2!} + \frac{4!}{3!1!} + \frac{4!}{4!0!} = 6 + 4 + 1 = 11$$

۱۱ رنگ از ترکیب ۴ رنگ اصلی بوجود می‌آید.
مجموع رنگ‌ها:

۱۵ رنگ = ۴ رنگ اصلی + ۱۱ رنگ ترکیبی

دقت کنید زمانی که نقاشی کشیده می‌شوند؛ خود رنگ‌های ترکیبی و اصلی دوباره با یکدیگر ترکیب می‌شوند و رنگ‌های جدیدتری بوجود می‌آید.
پس در عمل، تعداد رنگ‌ها بیش‌تر از ۱۵ رنگ است.

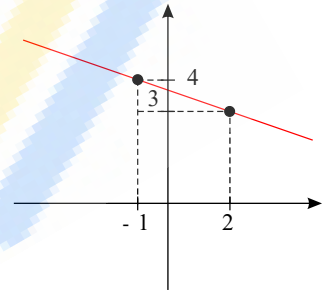
۲۵ $n!$ (فاکتوریل)

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times n = n!$$

۲۶ فرم کلی تابع خطی به شکل $y = ax + b$ است؛ با توجه به سؤال داریم:

$$\begin{cases} f(-1) = 4 \\ f(2) = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 = -a + b \\ 3 = 2a + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 = \frac{1}{3} + b \\ 3 = 2a + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 4 - \frac{1}{3} = \frac{11}{3} \\ 1 = -3a \Rightarrow a = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{11}{3}$$



۲۷ برای اینکه یک رابطه که به صورت زوج مرتب نوشته شده است تابع باشد، باید مؤلفه‌های اول یکسان، مؤلفه‌های دوم یکسان نیز داشته باشند. در واقع زوج مرتب تکراری باشد پس:

الف) $\begin{cases} (3, 2a - b) \\ (\frac{6}{2}, 2a + b) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a - b = 2a + b \\ b = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} (2, 3) \\ (\frac{2}{1}, \frac{3}{a}) \end{cases} \Rightarrow \frac{3}{a} = 3 \Rightarrow a = 1$

ب) $\begin{cases} (b, a) \\ (b, 2a - b) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2a - b \\ a = b \end{cases} \text{ (I)}$ $\begin{cases} (a, a) \\ (a, 2b) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2b \\ a = b = 2b \end{cases} \text{ (II)}$

I, II $\rightarrow a = b = 2b \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$

$AB = 0 \rightarrow A = 0$ یا $B = 0$ یا $A, B = 0$

$$\frac{(1 + \tan^r \alpha)(\cos^r \alpha)}{\cot \alpha} = \frac{\frac{1}{\cos^r \alpha} \times \cos^r \alpha}{\cot \alpha} = \frac{1}{\cot \alpha} = \frac{1}{\cot \alpha} = \tan \alpha$$

۳۰ برای نوشتن معادله‌ی خط، یکی از راه‌ها در دست داشتن شیب خط و یک نقطه از خط است:

$A = \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \end{vmatrix}$ و شیب $m = \tan 45^\circ = 1$

$y = mx + b$

$m=1 \rightarrow y = x + b \rightarrow \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \end{vmatrix} \rightarrow 3 = 2 + b \Rightarrow b = 1 \rightarrow y = x + 1$

$y \stackrel{x=4}{=} 4 + 1 = 5 \quad (4, 5)$

$-1 \leq \sin \theta \leq 1$

$-1 \leq \cos \alpha \leq 1$

$-2 \leq \sin \theta + \cos \alpha \leq 2 \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow 3a - 5b = -6 - 10 = -16$

۲۸

۲۹

۳۱

۳۲

۳۳

جمله ی عمومی دنباله ی حسابی
 $a_n = a_1 + (n - 1)d$
 قدر نسبت : d , جمله ی اول دنباله : a_1
 $a_n = b_n$

سومین جمله $3n - 3 + 5 = 2n - 2 + 7 \Rightarrow n = 3$

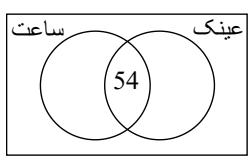
جمله ی عمومی دنباله ی حسابی
 $a_n = a_1 + (n - 1)d$
 قدر نسبت : d , جمله ی اول دنباله : a_1

$a_1 = \frac{a_3}{2} = \frac{a_1 + 2d}{2} \rightarrow 2a_1 = a_1 + 2d \Rightarrow a_1 = 2d$
 $a_{15} = a_1 + 14d = 2d + 14d = 16d$

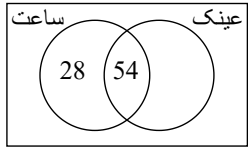
جمله پانزهم، ۱۶ برابر قدر نسبت دنباله است.

۳۴

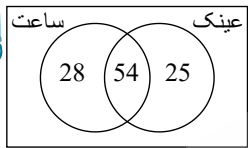
باتوجه به نمودار ون:



۸۲ نفر ساعت دارند که ۵۴ نفرشان عینک هم می‌زنند و $82 - 54 = 28$ نفر فقط ساعت دارند.

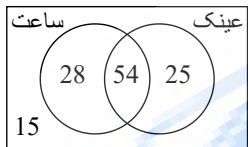


۷۹ نفر عینک می‌زنند که ۵۴ نفرشان ساعت هم دارند و $79 - 54 = 25$ نفر فقط عینک می‌زنند.

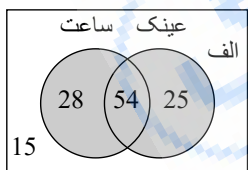


$28 + 54 + 25 = 107$

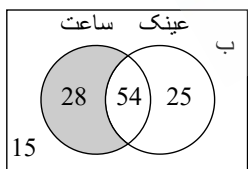
مجموع کسانی که ساعت، عینک یا هر دو را دارند ۱۰۷ نفر است که از ۱۲۲ نفر ۱۵ نفر باقی می‌مانند که نه ساعت دارند نه عینک می‌زنند.



الف) $25 + 28 + 54 = 107$ حداقل یکی یعنی یا ساعت یا عینک یا هر دو

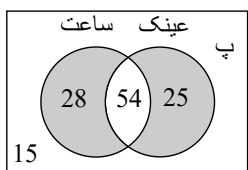


ب) ۲۸

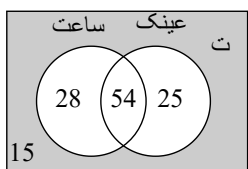


پ) $28 + 25 = 53$

دقیقاً یکی از دو مورد یعنی یا ساعت یا عینک فقط یک کدام (نه هر دو)



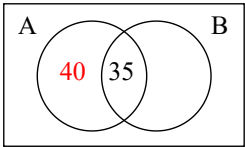
ت) ۱۵ نفر



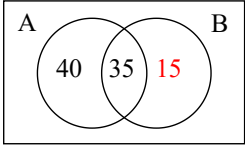
ریاضی پایه دهم رشته ریاضی

باتوجه به نمودار ون داریم: ۳۵

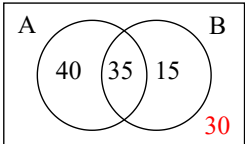
۱- از آنجا که $n(A) = 75$ است و $n(A \cap B) = 35$ نتیجه می‌گیریم که A ، ۴۰ عضو دارد که در $(A \cap B)$ نیست.



۲- با استدلال مشابه برای B داریم:

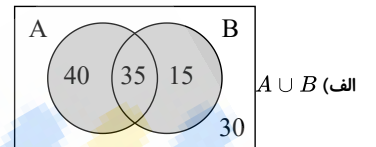


۳- از $n(u) = 120 = 40 + 35 + 15 = 90$ یا اکثرشان نیستند.

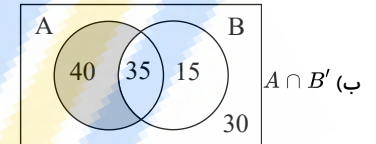


با توجه به نمودار ون:

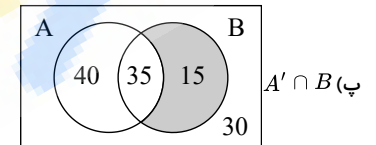
الف) $n(A \cup B) = 90$



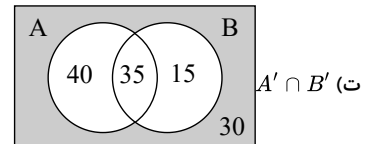
ب) $n(A \cap B') = 40$



پ) $n(A' \cap B) = 15$



ت) $n(A' \cap B') = 30$



۳۶) برای این که دو حرف ل و ی کنار هم باشند آن‌ها را یک حرف در نظر می‌گیریم:

جایگشت م، و، ب، ا، ی، ل، = $5! = 120$

خود ی، ل نیز ۲! حالت دارند که بنابر اصل ضرب در مجموع داریم:

$5! \times 2!$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5! \times 2!}{6!} = \frac{1}{3}$$

۳۷) برای این که کتاب ریاضی در بین کتاب‌ها نباشد، باید ۳ کتاب از بین ۴ کتاب باقی‌مانده انتخاب شوند.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{5}{3}} = \frac{\frac{4!}{3!1!}}{\frac{5!}{3!2!}} = \frac{4}{10} = 40\%$$

۳۸) طبق اصل ضرب داریم:

$8, 7, 6, 5, 4 = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4$

۳۹) رقم سمت چپ نمی‌تواند صفر باشد

$3, 4, 4, 4 = 3 \times 4 \times 4 \times 4 = 3 \times 4^3$

۴۰) اگر نمایش جبری تابع داده شده باشد، ولی دامنه‌ی آن مشخص نباشد، معمولاً دامنه را، بزرگترین مجموعه‌ی ممکن در نظر می‌گیریم. بعنوان مثال در تابع $f(x) = x^2$ ، دامنه را مجموعه ی اعداد حقیقی در نظر می‌گیریم. در غیر این صورت باید دامنه را به طور دقیق مشخص کنیم.

باتوجه به نکته‌ی فوق نمایش الف برای تابع درست است.

دقت کنید که تمام نمایش‌های فوق در دامنه‌های خاصی از مجموعه اعداد حقیقی برای $f(x) = x^2$ صحیح هستند اما از آنجا که دامنه مشخص نشده طبق نکته، نمایش الف درست است.

۴۱) بله؛ دقت کنید که شرط تابع بودن این است که به ازای هر ورودی فقط و فقط یک خروجی داشته باشیم که در این تابع رعایت شده است و تابع است. دقت کنید اگر نتوانیم ضابطه‌ای برای تابعی بدست آوریم، به منزله‌ی تابع نبودن آن نیست.

۴۲) الف) تابع است: مؤلفه‌های اول تمام زوج مرتبها با هم متفاوت است.

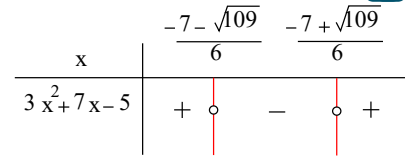
ب) تابع نیست: وجود دو زوج مرتب (۱، ۲) و (۱، ۳)، دو زوج مرتب با مؤلفه‌های اول یکسان و مؤلفه‌های دوم متفاوت را نشان می‌دهد که رابطه را از تابع بودن خارج می‌کند.

پ) تابع است: دقت کنید زوج مرتب (۱، ۱) و (۲، ۲) تنها دو بار نوشته شده‌اند.

ت) تابع است: دقت کنید مؤلفه‌ی دوم زوج مرتبها، تأثیری در تابع بودن یا نبودن رابطه ندارد.

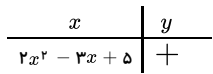
$$\text{الف) } 3x^2 + 7x - 5 = 0 \rightarrow \Delta = 49 - 4(3)(-5) = 49 + 60 = 109$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{109}}{6}$$



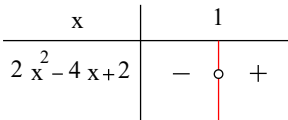
ب) $2x^2 - 3x + 5 = 0 \rightarrow \Delta = 9 - 4(2)(5) = 9 - 40 = -31$

$\Delta < 0$: همواره موافق علامت a



ج) $2x^2 - 4x + 2 = 0 \rightarrow \Delta = 16 - 4(2)(2) = 16 - 16 = 0$

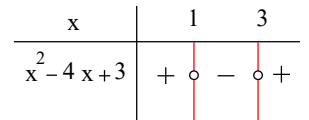
$$x_1 = x_2 = \frac{4}{4} = 1$$



$\Delta = 0$ ← ریشه‌ی مضاعف

د) $x^2 - 4x + 3 = 0 \rightarrow \Delta = 16 - 4(1)(3) = 16 - 12 = 4$

$$x = \frac{4 \pm 2}{2} \begin{cases} \frac{6}{2} = 3 \\ \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

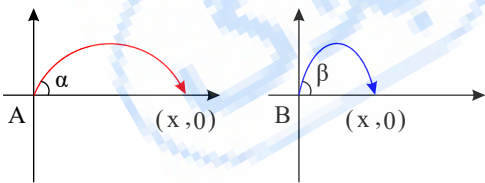


۴۴)

در شکل مقابل:

نیزه در $y = 0$ است، فرود می‌آید.

پس با محاسبه x هایی که برحسب آنها y در دو معادله صفر می‌شود و مقایسه آنها با یکدیگر معلوم می‌شود کدام نیزه جلوتر است و برنده کیست.



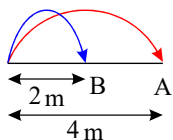
پس:

A: $0 = -x^2 + 3x + 4 \xrightarrow{\Delta = b^2 - 4ac} \Delta = 9 - 4(1)(4) = 9 - 16 = -7$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{-2} = \frac{-3 \pm 5}{-2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-8}{-2} = 4 \\ x_2 = \frac{2}{-2} = -1 \end{cases} \text{ غرق } \leftarrow$$

B: $0 = -4x^2 + 6x + 4 \xrightarrow{\Delta = b^2 - 4ac} \Delta = 36 - 4(-4)(4) = 36 + 64 = 100$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{100}}{-8} = \frac{-6 \pm 10}{-8} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-16}{-8} = 2 \\ x_2 = \frac{4}{-8} = -\frac{1}{2} \end{cases} \text{ غرق } \leftarrow$$



از آنجا که نیزه‌ی A، ۴ متر و نیزه‌ی B، ۲ متر رفته‌اند، برنده A است.

ریاضی پایه دهم رشته ریاضی

۴۵)

$$y = ax^r + bx + c \xrightarrow{(0,3)} 3 = a(0)^r + b(0) + c \Rightarrow \boxed{c = 3}$$

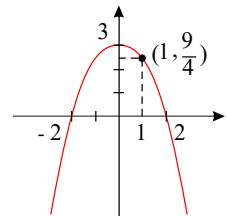
$$\xrightarrow{(2,0)} 0 = a(2)^r + b(2) + 3 \Rightarrow 4a + 2b + 3 = 0 \quad (I)$$

$$\xrightarrow{(-2,0)} 0 = a(-2)^r + b(-2) + 3 \Rightarrow 4a - 2b + 3 = 0 \quad (II)$$

$$\xrightarrow{I, II} 4a + 2b + 3 = 4a - 2b + 3 \Rightarrow 2b = -2b \Rightarrow b = -b \Rightarrow \boxed{b = 0}$$

$$4a + 2b + 3 = 0 \xrightarrow{b=0} 4a + 3 = 0 \Rightarrow 4a = -3 \Rightarrow \boxed{a = \frac{-3}{4}}$$

$$y = \frac{-3}{4}x^2 + 3 \xrightarrow{x=1} y = \frac{-3}{4} + \frac{12}{4} = \frac{9}{4} \Rightarrow \boxed{\left(1, \frac{9}{4}\right)}$$



۴۶ هر چهار مورد صحیح هستند و به صورت کلی داریم: $x^r = a \rightarrow x = \pm\sqrt[r]{a}$

اگر a یک عدد نامنفی (بزرگتر مساوی صفر) باشد ریشه‌های معادله $x^r = a$ باشد عبارتست از $\sqrt[r]{a}$ و $-\sqrt[r]{a}$

۴۷

الف) $x^r - x = 0 \Rightarrow x(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$

ب) $x^r - 16 = 0 \Rightarrow (x-4)(x+4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4 \\ x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4 \end{cases}$

پ) $x^r + 4x - 21 = 0 \Rightarrow (x+7)(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x + 7 = 0 \Rightarrow x = -7 \\ x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \end{cases}$

ت) $x^r - 4x + 4 = 0 \Rightarrow (x-2)^2 = 0 \Rightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

۴۸ می‌دانیم که در هر معادله بزرگترین توان متغیر پس از ساده سازی، درجه‌ی آنرا مشخص می‌کند، پس:

الف) $x^r - 3x + 5 = 2 \xrightarrow{x(2)}$ درجه دوم

ب) $x^r - 4x^2 + 5x + 1 = 0 \xrightarrow{x(3)}$ درجه سوم

پ) $x^r = -1 \xrightarrow{x(2)}$ درجه دوم

دقت کنید با این که می‌دانیم x^r هرگز منفی نمی‌شود، اما معادله‌ی ما صحیح است و معادله‌ی درجه‌ی دومی است که جواب ندارد.

ت) $x = -1 \xrightarrow{x(1)}$ درجه اول. دقت کنید $x = -1$ نیز یک معادله است که شکل استاندارد آن $x + 1 = 0$ است.

ث) $\frac{3x^r}{2} + 1 = 0 \xrightarrow{x(2)}$ درجه دوم

ج) $x - 5 = 4 \xrightarrow{x(1)}$ درجه اول

۴۹

$$a^r - 6a = -1 \Rightarrow a^r + 1 = 6a \Rightarrow \frac{a^r + 1}{a} = 6$$

$$\Rightarrow \frac{a^r}{a} + \frac{1}{a} = 6 \Rightarrow a + \frac{1}{a} = 6$$

$$\frac{a+1}{\sqrt{a}} \times \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{(a+1)\sqrt{a}}{a} = \frac{a\sqrt{a} + \sqrt{a}}{a} = \frac{a\sqrt{a}}{a} + \frac{\sqrt{a}}{a} = \sqrt{a} + \frac{\sqrt{a}}{a}$$

به توان ۲ می‌رسانیم $\xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم}} a + \frac{a}{a^2} + \frac{2\sqrt{a}\sqrt{a}}{a} = a + \frac{1}{a} + \frac{2a}{a} = a + \frac{1}{a} + 2$

$$\frac{a + \frac{1}{a} = 6}{\text{رادیکال}} \quad 6 + 2 = 8 \xrightarrow{\text{رادیکال}} \frac{a+1}{\sqrt{a}} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

۵۰

| | |
|---------|-----------------------|
| زوج n | $\sqrt[n]{a^n} = a $ |
| فرد n | $\sqrt[n]{a^n} = a$ |

$$a^r < 1 \Rightarrow -1 < a < 1 \quad (1)$$

$$\sqrt{a^r} = |a| = -a \Rightarrow a < 0 \quad (2)$$

$$(1), (2) \rightarrow -1 < a < 0$$

$$\rightarrow 1 - a > 0$$

$$a - 1 < 0$$

$$\frac{\sqrt{(1-a)^2}}{\sqrt{(a-1)^2}} = \frac{|1-a|}{|a-1|} \stackrel{1-a>0}{\frac{1-a}{a-1}} \stackrel{a-1<0}{\frac{1-a}{-(a-1)}} = \frac{1-a}{1-a} = 1$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{a^2} + \sqrt{a^2 + 1 - 2a} + \sqrt{a^2 + 4 - 4a} \\ &= \sqrt{a^2} + \sqrt{(a-1)^2} + \sqrt{(a-2)^2} = |a| + |a-1| + |a-2| \\ & \stackrel{-1 < a < 0}{=} -a - (a-1) - (a-2) = -a - a + 1 - a + 2 \\ & \stackrel{a-1 < 0}{=} -3a + 3 = 3(-a+1) = 3(1-a) \end{aligned}$$

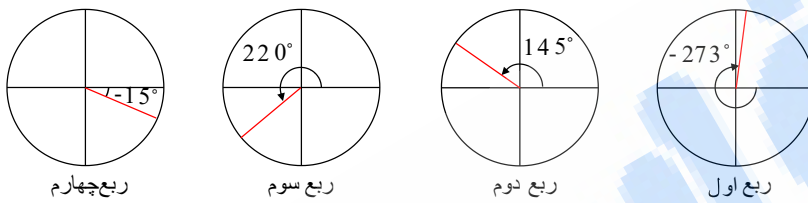
$$\begin{array}{l} \text{زوج } n \quad \sqrt[n]{a^n} = |a| \\ \text{فرد } n \quad \sqrt[n]{a^n} = a \end{array}$$

۵۱

$$\left(\frac{1}{\cos \alpha} + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}\right)(1 - \sin \alpha) = \frac{(1 + \sin \alpha)(1 - \sin \alpha)}{\cos \alpha} = \frac{1 - \sin^2 \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha}{\cos \alpha} = \cos \alpha$$

۵۲

۵۳



۵۴

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \\ \cos \theta &= \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \tan \theta &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \end{aligned}$$

باتوجه به مقادیر بدست آمده، اندازه زاویه θ ، 30° است.

۵۵

جمله ی عمومی دنباله ی حسابی

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

قدر نسبت: d ، جمله ی اول دنباله: a_1

اگر هزینه مودم a_1 و اینترنت مصرفی را با n نشان دهیم داریم:

$$\begin{aligned} \text{پارس آنلاین هزینه ی پارس آنلاین} &: 20 + (n-1) \times 4 \\ \text{شاتل هزینه ی شاتل} &: 30 + (n-1) \times 3 \\ \text{پارس آنلاین برای علی} &: 20 + (5-1) \times 4 = 20 + 4 \times 4 = 20 + 16 = 36 \checkmark \\ \text{شاتل برای علی} &: 30 + (5-1) \times 3 = 30 + 4 \times 3 = 30 + 12 = 42 \\ \text{پارس آنلاین برای حسن} &: 20 + (15-1) \times 4 = 20 + 14 \times 4 = 20 + 56 = 76 \\ \text{شاتل برای حسن} &: 30 + (15-1) \times 3 = 30 + 14 \times 3 = 30 + 42 = 52 \checkmark \end{aligned}$$

برای علی پارس آنلاین و برای حسن شاتل مناسب تر است.

باتوجه به مجموعه های اعداد داریم: ۵۶

$$N = \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$W = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$Q = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in Z, n \neq 0 \right\}$$

مجموعه اعدادی که نمی‌توان آن‌ها را به صورت نسبت دو عدد صحیح نشان داد

$$R = Q \cup Q'$$

{0} (الف)

Q' (ب)

W = {0, 1, 2, 3, ...} (پ)

{ } یا { } (ت)

57

$$\sqrt{7 + 4\sqrt{3}} = \sqrt{4 + 3 + 4\sqrt{3}} = \sqrt{2^2 + (\sqrt{3})^2 + 4\sqrt{3}}$$

$$\sqrt{(2 + \sqrt{3})^2} = |2 + \sqrt{3}| = 2 + \sqrt{3}$$

58

$$1) 2x^r = 250 \Rightarrow x^r = 125 \Rightarrow x = \pm \sqrt[3]{125}$$

$$2) 9 - 6z + z^r = 0 \Rightarrow z^r - 6z + 9 = 0 \Rightarrow (z - 3)^r = 0 \Rightarrow z - 3 = 0 \Rightarrow z = 3$$

$$3) 4a^r + 3a = 1 \Rightarrow 4a^r + 3a - 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 9 - 4(4)(-1) = 9 + 16 = 25 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 5$$

$$a = \frac{-3 \pm 5}{2 \times 4} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{-3 + 5}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \\ a = \frac{-3 - 5}{8} = \frac{-8}{8} = -1 \end{cases}$$

$$4) b^r + \sqrt{2}b - 4 = 0 \Rightarrow \Delta = (\sqrt{2})^r - 4(1)(-\sqrt{2}) = 2 + 16 = 18 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{18}$$

$$b = \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{18}}{2(1)} = \frac{-\sqrt{2} \pm 3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{-\sqrt{2} + 3\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \\ b = \frac{-\sqrt{2} - 3\sqrt{2}}{2} = \frac{-4\sqrt{2}}{2} = -2\sqrt{2} \end{cases}$$

59

$$1) x^r - 6x = 7 \Rightarrow x^r - 6x - 7 = 0 \Rightarrow x^r - 6x - 7 + 16 = 16 \Rightarrow x^r - 6x + 9 = 16$$

$$\Rightarrow (x - 3)^r = 16 \Rightarrow x - 3 = \pm 4 \Rightarrow \begin{cases} x - 3 = 4 \Rightarrow x = 7 \\ x - 3 = -4 \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$

$$2) s^r - 3s + 3 = 0 \Rightarrow s^r - 3s + 3 - \frac{3}{4} = -\frac{3}{4} \Rightarrow s^r - 3s + \frac{9}{4} = -\frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow (s - \frac{3}{2})^r = \frac{-3}{4} \text{ جواب ندارد}$$

$$3) r^r + 4r + 4 = 0 \Rightarrow (r + 2)^r = 0 \Rightarrow r + 2 = 0 \Rightarrow r = -2$$

$$4) 2a^r + 5a - 3 = 0 \Rightarrow a^r + \frac{5}{2}a - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow a^r + \frac{5}{2}a - \frac{3}{2} + \frac{49}{16} = \frac{49}{16}$$

$$\Rightarrow a^r + \frac{5}{2}a + \frac{49 - 24}{16} = \frac{49}{16} \Rightarrow a^r + \frac{5}{2}a + \frac{25}{16} = \frac{49}{16}$$

$$\Rightarrow (a + \frac{5}{4})^r = \frac{49}{16} \Rightarrow a + \frac{5}{4} = \pm \frac{7}{4} \Rightarrow \begin{cases} a + \frac{5}{4} = \frac{7}{4} \Rightarrow a = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \\ a + \frac{5}{4} = -\frac{7}{4} \Rightarrow a = -\frac{12}{4} = -3 \end{cases}$$

60) نداشته، ترکیب r تایی از n شی متمایز، $C(n, r)$ ، $0 \leq r \leq n$ ، $\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!} \cdot \binom{n}{r}$

61) می‌خواهیم 3 نفر از 7 نفر را به ترتیب انتخاب کنیم.

به عبارت دیگر، تعداد جایگشت‌های 3 تایی از 7 شی متمایز:

$$P(7, 3) = \frac{7!}{4!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4!} = 210$$

62) (الف) n!

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}, P(n, r) \text{ (ب)}$$

۶۳

$$\text{الف)} 8 \times 7 \times 6 = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5!} = \frac{8!}{5!}$$

$$\text{ب)} = 3 \times 4 \times 5 = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!} = \frac{5!}{2!}$$

$$\text{پ)} \frac{12 \times 11}{2} = \frac{12 \times 11 \times 10!}{10! \times 2!} = \frac{12!}{10! \cdot 2!}$$

$$\text{ت)} n(n-1) = \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = \frac{n!}{(n-2)!}$$

$$\text{ث)} n^2 + n = n(n+1) = \frac{(n+1) \times n \times (n-1)!}{(n-1)!} = \frac{(n+1)!}{(n-1)!}$$

$$\text{ج)} (n+2) \times (n+1) \times n \times (n-1) = \frac{(n+2) \times (n+1) \times n \times (n-1) \times (n-2)!}{(n-2)!} = \frac{(n+2)!}{(n-2)!}$$

۶۴ از اصل ضرب استفاده می‌کنیم.

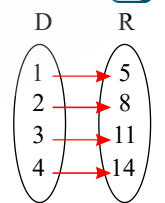
$$\text{حد اقل جمعیت} = 5 \times 7 \times 3 \times 5 \times 2 = 1050$$

$$\text{حداکثر جمعیت} = 5 \times 10 \times 5 \times 10 \times 5 = 12500$$

$$\text{میانگین} = \frac{(\text{حداکثر} + \text{حداقل})}{2} = \frac{1050 + 12500}{2} = \frac{13550}{2} = 6775$$

۶۵ با قرار دادن تک تک اعضای دامنه در ضابطه، برد بدست می‌آید.

$$f(x) = 3x + 2 \begin{cases} x=1 \rightarrow f(1) = 5 \\ x=2 \rightarrow f(2) = 8 \\ x=3 \rightarrow f(3) = 11 \\ x=4 \rightarrow f(4) = 14 \end{cases} \Rightarrow \text{برد } R = \{5, 8, 11, 14\}$$



۶۶

$$\text{الف)} 2x + 2y = 10 \Rightarrow x + y = 5 \rightarrow \begin{cases} x=0 & y=5 \\ x=1 & y=4 \\ x=2 & y=3 \\ x=3 & y=2 \\ x=4 & y=1 \\ x=5 & y=0 \end{cases}$$

تابع است $f(x) = \{(0, 5), (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1), (5, 0)\}$

$$\text{ب)} x^2 + y^2 = 18 \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-3 \end{cases} \\ y^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} y=3 \\ y=-3 \end{cases} \end{cases}$$

تابع نیست $h(x) = \{(3, 3), (3, -3), (-3, 3), (-3, -3)\}$

$$\text{پ)} x + y \leq 3 \rightarrow \begin{cases} x=0 & y=0 \\ y=1 \\ y=2 \\ y=3 \end{cases} \text{ می‌بینیم که به ازای هر } x \text{ بیش از یک } y \text{ هست پس تابع نیست}$$

$$\text{ت)} |x| + |y| = 3 \rightarrow \begin{cases} |x|=3 & |y|=0 \\ |x|=2 & |y|=1 \\ |x|=1 & |y|=2 \\ |x|=0 & |y|=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3, -3 & y=0 \\ x=2, -2 & y=1, -1 \\ x=1, -1 & y=2, -2 \\ x=0 & y=3, -3 \end{cases}$$

$$\mathbb{Z}(x) = \{(-2, 1), (-2, -1), (1, -2), (1, 2), (-1, 2), (-1, -2), (2, 1), (2, -1), (0, 3), (0, -3)\}$$

۶۷ یک تابع از مجموعه‌ی A به مجموعه‌ی B، رابطه‌ای بین این دو مجموعه است که در آن به هر عضو از A دقیقاً یک عضو از B نسبت داده می‌شود.

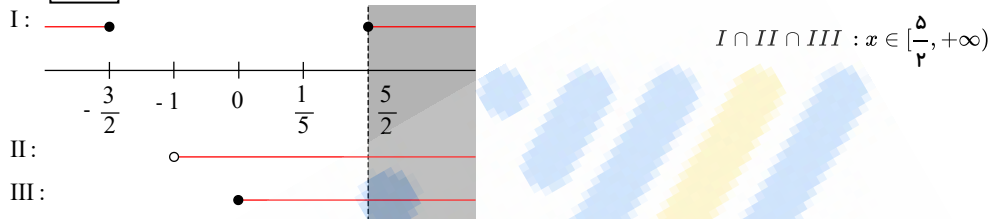
۶۸ ابتدا نامعادله را به شکل نامعادله‌های ساده تفکیک می‌کنیم و سپس بین جواب‌ها اشتراک می‌گیریم:

$$4 \leq |2x - 1| < 3x \rightarrow \begin{cases} |2x - 1| < 3x \rightarrow \begin{cases} 2x - 1 < 3x \\ 2x - 1 > -3x \end{cases} \\ \text{و} \\ |2x - 1| \geq 4 \rightarrow \begin{cases} 2x - 1 \geq 4 \\ 2x - 1 \leq -4 \end{cases} \end{cases}$$

$$(I) \begin{cases} 2x - 1 \geq 4 \Rightarrow 2x \geq 5 \Rightarrow x \geq \frac{5}{2} \\ 2x - 1 \leq -4 \Rightarrow 2x \leq -3 \Rightarrow x \leq \frac{-3}{2} \end{cases}$$

$$(II) \begin{cases} 2x - 1 < 3x \Rightarrow x > -1 \\ 2x - 1 > -3x \Rightarrow 5x > 1 \Rightarrow x > \frac{1}{5} \end{cases}$$

$$(III) |x| < a (a \geq 0) \text{ با توجه به نکته: } 3x \geq 0 \rightarrow x \geq 0$$



$$\begin{cases} |x| > a \rightarrow x < -a, x > a \\ |x| < a \rightarrow -a < x < a \end{cases}$$

۶۹

$$\text{الف) } |x - 2| \leq 3 \Rightarrow -3 \leq x - 2 \leq 3 \xrightarrow{+2} -1 \leq x \leq 5$$

$$\text{ب) } |3x - 1| \geq 1 \Rightarrow \begin{cases} 3x - 1 \geq 1 \Rightarrow 3x \geq 2 \Rightarrow x \geq \frac{2}{3} \\ 3x - 1 \leq -1 \Rightarrow 3x \leq 0 \Rightarrow x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow (-\infty, 0] \cup [\frac{2}{3}, +\infty)$$

۷۰

سه سال بعد اکنون

$$\text{برادر بزرگتر: } x \rightarrow x + 3$$

$$\text{برادر کوچکتر: } x - 3 \rightarrow x$$

$$x(x + 3) = 270 \Rightarrow x^2 + 3x - 270 = 0 \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4(-270)}}{2}$$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{1089}}{2} = \frac{-3 \pm 33}{2} = \begin{cases} \frac{-36}{2} = -18 \text{ غرض} \\ \frac{30}{2} = 15 \end{cases}$$

$$\frac{x}{x - 3} = \frac{15}{11} = \frac{5}{4}$$

$$\begin{cases} (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \end{cases}$$

۷۱

با دیدن عبارت‌های $3x^2$ و $4x^2$ که در آنها x^2 مضرب دارد، دو راه برای حل مسئله به روش مربع کامل خواهیم داشت:

الف) روش اول) در عبارت $a^2 + 2ab + b^2$ را برابر با $2x$ بگیریم که در آن صورت $a^2 = 4x^2$ خواهد بود:

$$(2x)^2 - 2(2x)\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = 0$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین}} (2x)^2 - 2(2x)\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$

$$(2x)^2 - 2(2x)\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$4x^2 - 2x + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

ریاضی پایه دهم رشته ریاضی

$$(2x - \frac{1}{2})^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow (2x - \frac{1}{2}) = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 2x = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \frac{1+\sqrt{3}}{4} \\ 2x - \frac{1}{2} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 2x = \frac{1-\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \frac{1-\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

روش دوم: تمام جملات را تقسیم بر ۴ می‌کنیم:

$$4x^2 - 2x - \frac{1}{2} = 0$$

$$\frac{4x^2}{4} - \frac{2x}{4} - \frac{\frac{1}{2}}{4} = \frac{0}{4} \Rightarrow x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8} = 0$$

از این جا به بعد مانند قبل عمل می‌کنیم:

$$x^2 - 2(\frac{1}{4})x - \frac{1}{8} = 0 \xrightarrow{+\frac{3}{16} \text{ طرفین}} x^2 - 2(\frac{1}{4})x - \frac{1}{8} + \frac{3}{16} = \frac{3}{16}$$

$$x^2 - 2(\frac{1}{4})x + \frac{1}{16} = \frac{3}{16} + \frac{1}{16} \Rightarrow x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$$

$$(x - \frac{1}{4})^2 = \frac{3}{16} \Rightarrow x - \frac{1}{4} = \pm \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1+\sqrt{3}}{4} \\ x = \frac{-\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1-\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

دقت: در هر دو روش، جواب بدست آمده باید یکسان باشد وگرنه در حل معادله اشتباه کرده‌ایم؛ بعلاوه اینکه همواره می‌توانیم با جایگذاری جواب نهائی بدست آمده در معادله‌ی اصلی از صحت جواب بدست آمده مطمئن شویم.

ب) اگر بخواهیم از روش اول استفاده کنیم با $3x^2 = (\sqrt{3}x)^2$ بر می‌خوریم که حل معادله مشکل می‌شود بنابراین از روش دوم بهره می‌گیریم و با تقسیم جملات به ۳، معادله را به شکل استاندارد در می‌آوریم و مانند قبل ادامه می‌دهیم:

$$3x^2 - 6x + 3 = 1 \xrightarrow{\div 3} x^2 - 2x + 1 = \frac{1}{3} \Rightarrow (x-1)^2 = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow x-1 = \pm \sqrt{\frac{1}{3}} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pm \sqrt{3}}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{3} + 1 = \frac{3+\sqrt{3}}{3} \\ x = \frac{-\sqrt{3}}{3} + 1 = \frac{3-\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{matrix} x^2 = a \\ x = \pm \sqrt{a} \end{matrix}} \quad (72)$$

الف) $3x^2 = 27 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$

ب) $4x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{2}$

پ) $t^2 + 1 = 0 \Rightarrow t^2 = -1 \Rightarrow$ (همواره $t^2 \geq 0$ معادله جواب ندارد)

ت) $(a-2)^2 = 0 \Rightarrow (a-2) = 0 \Rightarrow a = 2$

ث) $(x+3)^2 = 16 \Rightarrow x+3 = \pm 4 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 - 3 = 1 \Rightarrow x = 1 \\ x = -4 - 3 = -7 \Rightarrow x = -7 \end{cases}$

ج) $(x-3)^2 = 5 \Rightarrow x-3 = \pm \sqrt{5} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{5} + 3 \Rightarrow x = 3 + \sqrt{5} \\ x = -\sqrt{5} + 3 \Rightarrow x = 3 - \sqrt{5} \end{cases}$

(73)

(I) $\frac{2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{x}+\sqrt{2}}{\sqrt{x}+\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{x}+2\sqrt{2}}{x-2}$

(II) $\frac{3}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2}} \times \frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{2x}+\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{2x}+\sqrt[3]{4}} = \frac{3(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{2x}+\sqrt[3]{4})}{x+2}$

$\xrightarrow{I, II} \frac{2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2}} = \frac{2\sqrt{x}+2\sqrt{2}}{x-2} + \frac{3(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{2x}+\sqrt[3]{4})}{x+2}$

$$= \frac{2(\sqrt{x} + \sqrt{2})(x+2) + 2(x-2)(\sqrt{x^2} - \sqrt{2x} + \sqrt{2})}{(x-2)(x+2)}$$

$$= \frac{2(\sqrt{x} + \sqrt{2})(x+2) + 2(x-2)(\sqrt{x^2} - \sqrt{2x} + \sqrt{2})}{x^2 - 4}$$

۷۴

الف) $x^2 + x^2 - 2x - 2 = x^2(x+1) - 2(x+1) = (x+1)(x^2 - 2)$

$= (x+1)(x-2)(x+2)$

ب) $a^5 - ab^4 = a(a^4 - b^4) = a(a^2 - b^2)(a^2 + b^2)$

$= a(a^2 + b^2)(a - b)(a + b)$

پ) $a^3 - a^2b - ab^2 + b^3 = a^2(a - b) - b^2(a - b) = (a - b)(a^2 - b^2)$

$= (a - b)(a - b)(a + b) = (a - b)^2(a + b)$

ت) $2x^2 + 6x + 4 = 2x^2 + 2x + 4x + 4 = 2x(x+1) + 4(x+1)$

$= (2x+4)(x+1) = 2(x+2)(x+1)$

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[kn]{a^{km}}$$

$a \geq 0, m, n, k \in \mathbb{N}$ ۷۵

$$\sqrt{3} \times \sqrt[3]{2} = 3^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{2}{6}} \times 2^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{3^2} \times \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[6]{3^2 \times 2^2} = \sqrt[6]{3^2 \times 2^2} = \sqrt[6]{108}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

$a \geq 0, m, n \in \mathbb{N}$ ۷۶

ابتدا منفی را از زیر رادیکال خارج می‌کنیم:

$$\sqrt[3]{-3\sqrt{3}} = -\sqrt[3]{3\sqrt{3}} = -\sqrt[3]{3 \times 3^{\frac{1}{2}}} = -\sqrt[3]{3^{\frac{3}{2}}}$$

$$= -(3^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{3}} = -(3^{\frac{3}{2} \times \frac{1}{3}}) = -\sqrt[3]{3^{\frac{3}{2}}} = -\sqrt[3]{3^{\frac{3}{2}}}$$

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

$n \geq 2, a \geq 0$ ۷۷

از داخلی‌ترین شروع می‌کنیم و با تبدیل به رادیکال‌ها به توان و ضرب توان‌ها ادامه می‌دهیم:

$$\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}} = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2} \times 2^{\frac{1}{2}}}} = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2} \times 2^{\frac{1}{2}}}}$$

$$= \sqrt{2\sqrt{2 \times (2^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}}} = \sqrt{2\sqrt{2 \times 2^{\frac{1}{4}}}} = \sqrt{2\sqrt{2 \times 2^{\frac{1}{4}}}}$$

$$\sqrt{2 \times (2^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{2 \times 2^{\frac{1}{8}}} = \sqrt{2^{\frac{16}{8}}} = 2^{\frac{16}{8}} = 2^2 = 4$$

۷۸

| | |
|---------|-----------------------|
| n زوج | $\sqrt[n]{a^n} = a $ |
| n فرد | $\sqrt[n]{a^n} = a$ |

$$\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2} - \sqrt{(\sqrt{3}-2)^4} - \sqrt[5]{(\sqrt{3}-2)^5} =$$

$$(\sqrt{3}-2) - |\sqrt{3}-2| - (\sqrt{3}-2)$$

$$= -|\sqrt{3}-2| \stackrel{\sqrt{3}-2 < 0}{=} -(-(\sqrt{3}-2)) = \sqrt{3}-2$$

۷۹

- | | |
|----------------------------|--|
| الف) $(-0,1)^5 < (-0,1)^4$ | ب) $\sqrt[4]{0,0001} = 0,1$ |
| ب) $(3,2)^2 < (3,2)^3$ | ت) $(-2)^2 > (-2)^5$ |
| ث) $(-1,1)^4 = (1,1)^4$ | ج) $(-2)^5 > (-2)^7$ |
| ج) $2^3 < 3^2$ | د) $(\frac{1}{2})^2 > (\frac{1}{2})^3$ |

$$\sqrt[3]{\frac{1}{8}} > \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{1}{2} > \frac{1}{8} \quad \text{الف) } 0 < a > 1 \quad 80$$

$$\sqrt[3]{-27} > -27 \rightarrow -3 > -27 \quad a < -1 \text{ (ب)}$$

$$\sqrt[3]{1} = 1, \quad \sqrt[3]{0} = 0 \quad a = 0, 1 \text{ (پ)}$$

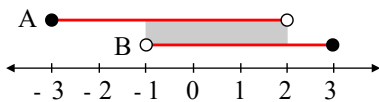
$$\sqrt[3]{-1} = -1 \quad a = -1 \text{ (ت)}$$

$$\sqrt[3]{27} < 27 \Rightarrow 3 < 27 \quad a > 1 \text{ (ث)}$$

$$\sqrt[3]{\frac{-1}{8}} < \frac{-1}{8} \Rightarrow \frac{-1}{2} < \frac{-1}{8} \quad -1 < a < 0 \text{ (ج)}$$

۸۱

باتوجه به محور اعداد داریم:



$$A \cap B = (-1, 2) \Rightarrow (A \cap B)' = (-\infty, -1] \cup [2, +\infty)$$

۸۲

الف) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ متناهی

ب) متناهی

پ) $\mathbb{Z} - \mathbb{W} = \{\dots, -3, -2, -1\}$ نامتناهی

ت) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ متناهی

ث) متناهی: دقت کنید بزرگ بودن یک عدد یا سخت بودن شمارش آن به معنای نامتناهی بودن آن عدد نیست.

ج) نامتناهی: تمام بازه‌های اعداد حقیقی نامتناهی هستند.

چ) متناهی: باتوجه به توضیحات مورد ث، تعداد مورچه‌های هر شهر، هر قدر زیاد هم که باشد در نهایت عددی مشخص است.

۸۳) باتوجه به معلومات سوال ابتدا A_1, A_2, A_3 را تشکیل می‌دهیم:

$$A_1 = \left[\frac{-3}{1}, \frac{1-1}{2} \right) = [-3, 0)$$

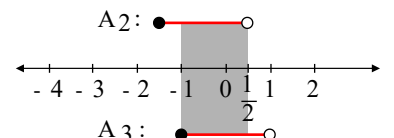
$$A_2 = \left[\frac{-3}{2}, \frac{2-1}{2} \right) = \left[\frac{-3}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

$$A_3 = \left[\frac{-3}{3}, \frac{3-1}{2} \right) = [-1, 1)$$

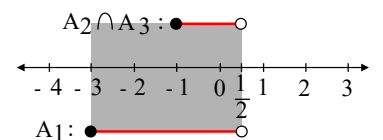
$$A_2 \cap A_3 = \left[-1, \frac{1}{2} \right)$$

$$A_1 \cup (A_2 \cap A_3) = \left[-3, \frac{1}{2} \right)$$

حال $A_2 \cap A_3$ را با استفاده از محور بدست می‌آوریم:



و اجتماع آن را با A_1 رسم می‌کنیم:



اعداد صحیح موجود در این بازه عبارتند از: $-3, -2, -1, 0$

⇐ در این بازه ۴ عدد صحیح موجود است.

۸۴

الف

$$\left(\frac{1}{1 - \cos \theta} - \frac{1}{1 + \cos \theta} \right) \left(\frac{1}{\cos \theta (1 + \cot^2 \theta)} \right) = \left(\frac{1 + \cos \theta - 1 + \cos \theta}{1 - \cos^2 \theta} \right) \left(\frac{1}{\cos \theta} \right) \left(\frac{1}{1 + \cot^2 \theta} \right) \left(\frac{2 \cos \theta}{\sin^2 \theta} \right) \left(\frac{1}{\cos \theta} \right) (\sin^2 \theta) = 2$$

ب

$$\left(\frac{1}{1 - \sin \theta} + \frac{1}{1 + \sin \theta}\right) - 2 \tan^2 \theta = \frac{1 + \sin \theta + 1 - \sin \theta}{1 - \sin^2 \theta} - 2 \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{2}{\cos^2 \theta} - \frac{2 \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{2(1 - \sin^2 \theta)}{\cos^2 \theta} = 2$$

الف) $D = [0, 5]$, $R = [2, 6]$

$$y = ax + b \xrightarrow{(0,2)} 2 = b$$

$$y = ax + 2 \xrightarrow{(5,6)} 6 = 5a + 2 \Rightarrow 5a = 4 \Rightarrow a = \frac{4}{5}$$

$$y = \frac{4}{5}x + 2$$

ب) $D = [-4, 4]$ $R = [0, 4]$

$$-2 \leq x \leq 0 \Rightarrow y = ax + b \begin{cases} \xrightarrow{(0,-1)} -1 = b \\ \xrightarrow{(-2,2)} 2 = -2a - 1 \Rightarrow 3 = -2a \Rightarrow a = \frac{-3}{2} \Rightarrow y = \frac{-3}{2}x - 1 \end{cases}$$

$$0 \leq x \leq 8 \Rightarrow y = ax + b \begin{cases} \xrightarrow{(0,-1)} -1 = b \\ \xrightarrow{(8,7)} 7 = 8a - 1 \Rightarrow 8a = 8 \Rightarrow a = 1 \end{cases} \Rightarrow y = x - 1$$

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{3}{2}x - 1 & -2 \leq x \leq 0 \\ x - 1 & 0 \leq x \leq 8 \end{cases}$$

ب) $D = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ $R = \{-3, -2, 0, 1, 2\}$

ت) $D = [-1, 4]$ $R = [-5, 4]$

ث) $D = \mathbb{R}$ $R = (-\infty, 3]$

ج) $D = [-2, 8]$ $R = [-1, 7]$

۸۶ می‌دانیم: $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$

$$1 + \tan^2 \alpha = 1 + \left(\frac{-4}{3}\right)^2 = 1 + \frac{16}{9} = \frac{25}{9} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{9}{25} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{3}{5}$$

$$\xrightarrow{\substack{\text{ربع چهارم} \\ \cos \alpha > 0}} \cos \alpha = \frac{3}{5}$$

$$\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \pm \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \pm \sqrt{\frac{16}{25}} = \pm \frac{4}{5}$$

$$\xrightarrow{\substack{\text{ربع چهارم} \\ \sin \alpha < 0}} \sin \alpha = \frac{-4}{5}$$

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{1}{-\frac{4}{3}} = \frac{-3}{4}$$

در دنباله حسابی تفاضل هر دو جمله باهم برابر و برابر با قدرنسبت است می‌دانیم:

$$t_n = t_1 + (n - 1)d$$

دنباله حسابی $\rightarrow 24 - 17 = 17 - 10 = 10 - 3 = 7 = d$

$$t_{21} = t_1 + 20d = 3 + 20 \times 7 = 143$$

ب) دنباله غیر حسابی $\rightarrow 8 - 4 \neq 4 - 2 \neq 2 - 1$

دنباله حسابی $\rightarrow \sqrt{3} = d \rightarrow 4\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3} - \sqrt{3} = \sqrt{3} = d$

$$t_{21} = t_1 + 20d = \sqrt{3} + 20 \times \sqrt{3} = 21\sqrt{3}$$

حسابی $\rightarrow 1 - 4 = 4 - 7 = 7 - 10 = -3 = d$

$$t_{21} = t_1 + 20d = 10 + 20 \times (-3) = -50$$

حسابی $\rightarrow 1 - \frac{4}{5} = \frac{4}{5} - \frac{3}{5} = \frac{3}{5} - \frac{2}{5} = \frac{1}{5} = d$

$$t_{21} = t_1 + 20d = \frac{2}{5} + 20 \times \frac{1}{5} = \frac{22}{5}$$

حسابی $\rightarrow 2 - 2 = 2 - 2 = 2 - 2 = 2 - 2 = 0 = d$

$$t_{21} = t_1 + 20d = 2 + 20 \times 0 = 2$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$\Rightarrow 30 = 15 + n(B) - 5 \Rightarrow n(B) = 30 - 15 + 5 = 20$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \quad \text{می دانیم: } (88)$$

(الف) متغیر کیفی ترتیبی (ب) متغیر کیفی اسمی (غیر ترتیبی) (89)

الف) متغیری است که در آن، نوعی ترتیب طبیعی وجود داشته باشد. به عنوان مثال سطح تحصیلات (دیپلم، فوق دیپلم، کارشناسی، کارشناسی ارشد و دکتری)

ب) متغیر کیفی ای است که ترتیبی نیست، مانند جنسیت (زن یا مرد)

(الف) مجموعه ای تمام افراد یا اشیائی که درباره ی یک یا چند ویژگی آن ها، تحقیق صورت گیرد جامعه یا جامعیت نامیده می شود و هر یک از این افراد یا اشیاء را عضو جامعه می نامند.

ب) تعداد اعضای جامعه را اندازه ی جامعه یا حجم جامعه گویند.

به عنوان مثال، دانش آموزان یک مدرسه می توانند یک جامعه باشند و هر یک از دانش آموزان مدرسه عضو این جامعه هستند.

ج) بخشی از جامعه را که برای مطالعه انتخاب شوند، نمونه گویند و هر یک از افراد یا اشیای انتخاب شده را عضو نمونه گویند.

د) تعداد اعضای نمونه را اندازه ی نمونه یا حجم نمونه گویند.

به عنوان مثال دانش آموزان یک کلاس به عنوان یک نمونه از دانش آموزان مدرسه هستند و هر یک از دانش آموزان کلاس، عضو نمونه محسوب می شوند.

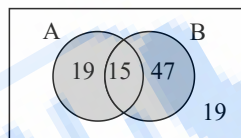
(الف) آمار، مجموعه ای از ارقام، اعداد و اطلاعات است. (91)

ب) علم آمار مجموعه روش هایی است که شامل جمع آوری اعداد و ارقام، سازماندهی و نمایش، تحلیل و تفسیر داده ها و در نهایت نتیجه گیری، قضاوت و پیش بینی مناسب در مورد پدیده ها و

آزمایش های تصادفی می شود.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad \text{راه اول} \quad (92)$$

حداقل یکی از دو کارت یعنی کارت A یا کارت B یا هر دو:



$$P(A \cup B) = \frac{34}{100} + \frac{62}{100} - \frac{15}{100} = 81\%$$

$$P(A) = 1 - P(A') \quad \text{راه دوم}$$

احتمال حداقل یکی از کارت ها برابر است با یک منهای احتمال هیچ کدام از دو کارت

$$P(A \cup B) = 1 - P(A \cup B)' = 1 - \frac{19}{100} = 81\%$$

(93)

$$\text{الف) } 7! = 7 \times \underbrace{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}_{6!} = 7 \times 6!$$

$$\text{ب) } 10! = 10 \times \underbrace{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}_{9!} = 10 \times 9!$$

$$\text{پ) } n! = n \times \underbrace{(n-1) \times (n-2) \times \dots \times 1}_{(n-1)!} = n \times (n-1)!$$

$$\text{ت) } (n-3)! = (n-3) \times \underbrace{(n-4) \times (n-5) \times \dots \times 1}_{(n-4)!} = (n-3)(n-4)!$$

$$\text{ث) } (n+2)! = (n+2) \times \underbrace{(n+1) \times n \times (n-1) \times \dots \times 1}_{(n+1)!} = (n+2)(n+1)!$$

(الف) اصل ضرب: اگر انجام کاری شامل دو مرحله باشد، به طوری که برای انجام مرحله ی اول m انتخاب و برای انجام مرحله ی دوم n انتخاب داشته باشیم، در کل، کار مورد نظر با $m \times n$ روش قابل اجراست. (94)

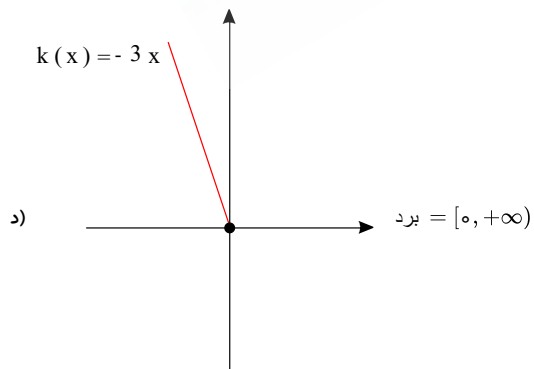
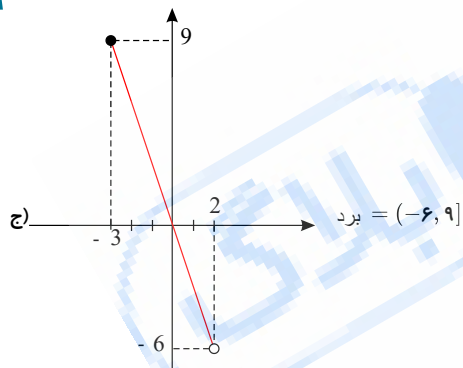
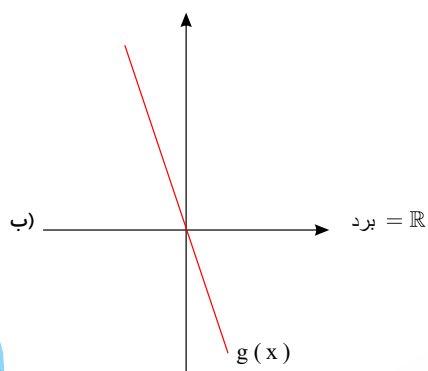
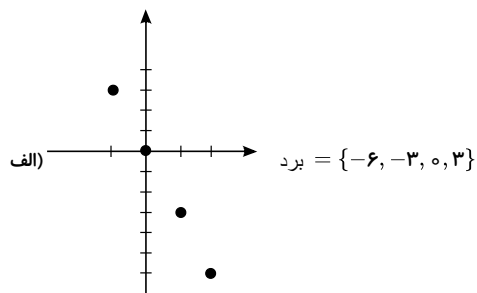
تعمیم اصل ضرب: اگر انجام کاری شامل k مرحله باشد به طوری که در انجام مرحله ی اول m_1 روش، برای انجام مرحله ی دوم m_2 روش، ... و برای انجام مرحله ی k ام m_k روش وجود داشته باشد (با فرض این که در هر مرحله انتخاب تمام روش های آن مرحله ممکن باشد) کار مورد نظر با $m_1 \times m_2 \times \dots \times m_k$ روش قابل انجام است.

۹۵

اصل جمع: اگر کاری را بتوان به دو روش انجام داد، به طوری که در روش اول m انتخاب و در روش دوم n انتخاب وجود داشته باشد، برای انجام کار مورد نظر $m + n$ روش وجود دارد.

تعمیم اصل جمع: اگر کاری را بتوان به x روش انجام داد، به طوری که در روش اول m_1 انتخاب، در روش دوم m_2 انتخاب، و در روش k ام m_k انتخاب وجود داشته باشد برای انجام کار مورد نظر $m_1 + m_2 + \dots + m_k$ روش وجود دارد.

۹۶

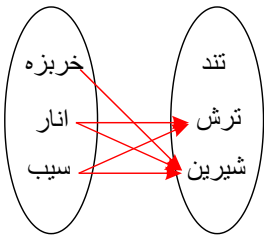


$y = ax + b$

۹۸ الف) در یک تابع که به صورت زوج مرتب نمایش داده شده است؛ مجموعه همهی مؤلفه‌های اول زوج‌های مرتب تشکیل‌دهنده آن را «دامنه» می‌گوییم.
ب) در یک تابع که به صورت زوج مرتب نمایش داده شده است؛ مجموعه همهی مؤلفه‌های دوم زوج‌های مرتب تشکیل‌دهنده آن را «برد» می‌گوییم.

۹۷

ج) اگر رابطه‌ی بین دامنه و برد یک تابع به صورت یک عبارت ریاضی نوشته شود (برای مثال $f(n) = 2n - 1$ $n \in \mathbb{N}$) به این نوع نمایش، نمایش جبری تابع می‌گویند.



خبر تابع نیست، زیرا انار و سیب هر دو می‌توانند ترش یا شیرین باشند و روی نمودار پیکانی از این دو مؤلفه، از هر کدام دو پیکان خارج شده است بنابراین تابع نیست.

۹۹

۱۰۰ جواب‌های زیادی می‌توان داد. برای مثال: A به B :

$$f(x) = \{(a, e), (b, h), (c, e), (d, h)\} \quad g(x) = \{(b, e), (c, e), (d, h), (a, g)\}$$

از B به A :

$$h(x) = \{(e, a), (e, b), (f, c), (f, d)\} \quad z(x) = \{(f, a), (f, b), (e, a), (h, d)\}$$

۱۰۱

الف) روش اول: ابتدا سهمی و سپس خط $y = 4$ را رسم می‌کنیم. x ‌هایی که به ازای آنها عرض سهمی مساوی و یا بالاتر از خط $y = 4$ باشد جواب نامعادله است.

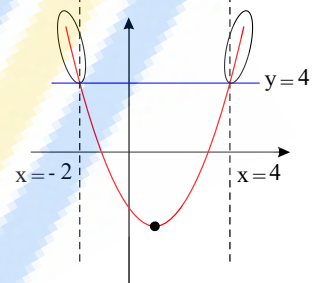
$$y = x^2 - 2x - 4 = 0$$

$$y = 4 = x^2 - 2x - 4$$

$$x^2 - 2x - 8 = 0 \rightarrow \Delta = 4 - 4(1)(-8) = 36$$

$$S \begin{cases} \frac{2}{2} = 1 \\ f(1) = -5 \end{cases}$$

$$x = \frac{2 \pm 6}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -2 \end{cases}$$

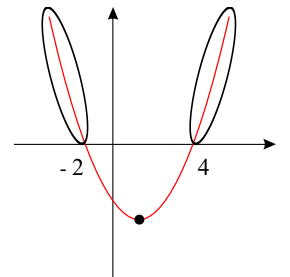


باتوجه به شکل رسم شده جواب به صورت $(-\infty, -2] \cup [4, +\infty)$ است.

الف) روش دوم: معادله را ساده‌سازی می‌کنیم: $x^2 - 2x - 4 \geq 4 \Rightarrow x^2 - 2x - 8 \geq 0$ با رسم سهمی $x^2 - 2x - 8$ ، x ‌هایی که در آنها y مثبت می‌شود، بازه‌ی جواب ماست.

$$x^2 - 2x - 8 = 0 \rightarrow \Delta = 36$$

$$x = \frac{2 \pm 6}{2} = \begin{cases} x = 4 \\ x = -2 \end{cases}$$



باتوجه به شکل بازه‌ی $(-\infty, -2] \cup [4, +\infty)$ جواب ماست.

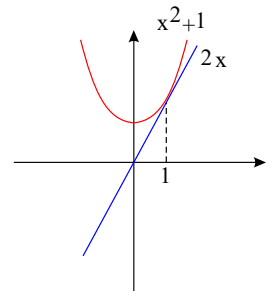
ب) روش اول: ابتدا سهمی و سپس خط $y = 2x$ را رسم می‌کنیم. x ‌هایی که به ازای آنها عرض سهمی پایین‌تر از خط $y = 2x$ یا مساوی با آن باشد، جواب نامعادله است.

$$y = x^2 + 1$$

$$x^2 + 1 = 2x \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$(x - 1)^2 = 0$$

محل تلاقی دو نمودار $x = 1$

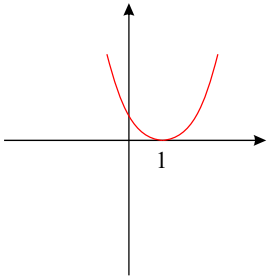


طبق شکل، فقط در $x = 1$ سهمی مقداری برابر با $y = 2x$ دارد و در هیچ جای دیگر، سهمی پایین‌تر قرار نمی‌گیرد پس جواب ما به صورت $\{1\}$ در می‌آید.

ب) روش دوم: معادله را ساده‌سازی می‌کنیم:

$$x^2 + 1 \leq 2x \rightarrow x^2 - 2x + 1 \leq 0 \rightarrow (x - 1)^2 \leq 0 \rightarrow x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$$

می بینیم که سهمی کجا مقداری منفی نمی گیرد و در $x = 1$ مقداری برابر با صفر دارد پس جواب ما به صورت $\{1\}$ در می آید.



هر نفر با همه افراد بجز خودش مبارزه می کند یعنی $n(n-1)$ اما از آنجایی که هر مسابقه ای انجام شده بین دو نفر مشترک است پس در واقع ما به ازای هر نفر یک مسابقه را در نظر گرفته ایم در صورتیکه هر مسابقه بین دو نفر انجام می شود بنابراین رابطه ی بالا به شکل $\frac{n(n-1)}{2}$ در می آید:

$$\frac{n(n-1)}{2} = 36 \Rightarrow n^2 - n = 72$$

$$\Rightarrow n^2 - n - 72 = 0 \Rightarrow (n-9)(n+8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = 9 \\ n = -8 \end{cases} \text{ غرق}$$

$$(-1 \text{ تعداد شرکت کننده}) \times \text{تعداد شرکت کننده} = \frac{\text{تعداد مبارزات}}{2}$$

الف) مربع کامل $(x-1)^2 = 4 \Rightarrow x-1 = \pm 2 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -1 \end{cases}$

$$\Delta: x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow \Delta = 4 - 4(1)(-3) = 16$$

$$x_1, x_2 = \frac{+2 \pm 4}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -1 \end{cases}$$

تجزیه $x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x+1 = 0 \Rightarrow x = -1 \\ x-3 = 0 \Rightarrow x = 3 \end{cases}$

ب) $x^2 - 2x - 1 = 5 \Rightarrow x^2 - 2x - 15 = 0 \Rightarrow (x-5)(x+3) = 0$

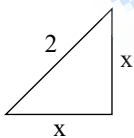
$$\Rightarrow \begin{cases} x-5 = 0 \Rightarrow x = 5 \\ x+3 = 0 \Rightarrow x = -3 \end{cases}$$

مربع کامل $x^2 - 2x - 15 = 0 \Rightarrow x^2 - 2(1)(x) - 15 + 16 = 16$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 16 \Rightarrow (x-1)^2 = 16 \Rightarrow x-1 = \pm 4 \Rightarrow \begin{cases} x-1 = 4 \Rightarrow x = 5 \\ x-1 = -4 \Rightarrow x = -3 \end{cases}$$

$$\Delta: x^2 - 2x - 15 = 0 \Rightarrow \Delta = 4 - 4(1)(-15) = 4 + 60 = 64$$

$$x_1, x_2 = \frac{2 \pm 8}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{10}{2} = 5 \\ x_2 = \frac{-6}{2} = -3 \end{cases}$$



فیثاغورس $x^2 + x^2 = 2^2 \Rightarrow 2x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$ طول نمی تواند منفی باشد

$$x = \sqrt{2}$$

می دانیم تمام اضلاع در مربع با هم برابرند و همچنین تمام زوایا قائمه اند، پس با نوشتن رابطه ی فیثاغورس در یکی از مثلث ها داریم:

۱۰۵ عدد ۱- ریشه ی معادله ی $x+1=0$ و عدد ۳ ریشه ی معادله ی $x-3=0$ است.

پس کفایت معادله را به صورت $(x-3)(x+1) = 0$ بنویسیم:

$$(x-3)(x+1) = 0 \Rightarrow x^2 + (-3+1)x + (-3)(1) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$

$x^2 - 2x - 3 = 0$ معادله ی درجه ی دومی با ریشه های ۱- و ۳ است.

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

۱۰۶

ابتدا عبارت دارای x را ساده می کنیم:
از داخلی ترین رادیکال شروع می کنیم:

$$\sqrt{\sqrt{x^4 x^3 x}} = \sqrt{\sqrt{x^7 x}} = \sqrt{\sqrt{x^8}} = \sqrt{x^4} = x^2$$

$$= \sqrt{\sqrt{\sqrt{x^{\frac{1}{3}}}}} = \sqrt{\sqrt{(x^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{3}}} = \sqrt{x^{\frac{1}{9}}} = (x^{\frac{1}{9}})^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{27}}$$

$$x^{\frac{1}{27}} = y^{\frac{1}{3}} \xrightarrow[\text{به توان ۳}]{\text{طرفین}} (x^{\frac{1}{27}})^3 = (y^{\frac{1}{3}})^3 \Rightarrow x^{\frac{1}{9}} = y \Rightarrow \sqrt[9]{x} = y$$

$$\sqrt[n]{a^n} = a \quad (107)$$

فرد n

$$5\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{5^3} \times \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{5^3 \times 3} = \sqrt[3]{375}$$

(108)

$$\sqrt{ab} = \sqrt{|a|} \times \sqrt{|b|} \quad \sqrt[3]{a^3} = |a|$$

$$\sqrt{a^2 b^2} = \sqrt{a^2} \times \sqrt{b^2} = \sqrt{a^2} \times \sqrt{b^2} \times \sqrt{b} = |a| \times |b| \sqrt{b} = -ab\sqrt{b}$$

از آنجایی که می‌بینیم \sqrt{b} تعریف شده است $\leftarrow b > 0$

$$|a| \times |b| \sqrt{b} = |a| \times b\sqrt{b} = -a \times b\sqrt{b} \Rightarrow |a| = -a$$

(109) در $(\sqrt{a})^2 = a$ ، از آنجا که زیر رادیکال به فرجه‌ی زیر عبارت منفی قرار نمی‌گیرد پس $a \geq 0$ و در نتیجه تساوی همواره برقرار است.

اما در $\sqrt{a^2}$ ، از آنجا که عبارت زیر رادیکال a^2 می‌باشد و a^2 در هر صورت (چه a مثبت باشد، چه منفی) مثبت است، پس ممکن است به ازای یک a که مقداری منفی دارد، شکل بگیرد و پاسخ رادیکال به فرجه‌ی زوج هرگز منفی نخواهد بود که ما را مجبور به استفاده از قدر مطلق می‌کند که اگر احياناً a مقداری منفی بود، باز هم عبارت برقرار باشد مانند $a = -3$

$$\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = |-3| = 3$$

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

$$(\sqrt{a})^2 = a$$

(110) از آنجا که θ زاویه‌ای در ربع دوم است، در می‌یابیم که $\begin{cases} \sin \theta > 0 \\ \cos \theta < 0 \end{cases}$ ربع دوم

قدر مطلق‌ها را برداشته و عبارت را ساده می‌کنیم:

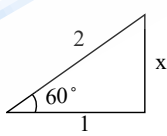
$$\frac{\sin \theta |\cos \theta| - |\sin \theta| \cos \theta}{|\sin \theta \cos \theta|} = \frac{\sin \theta (-\cos \theta) - \sin \theta \cos \theta}{-\sin \theta \cos \theta}$$

$$= \frac{-\sin \theta \cos \theta - \sin \theta \cos \theta}{-\sin \theta \cos \theta} = \frac{-2 \sin \theta \cos \theta}{-\sin \theta \cos \theta} = 2$$

(111)

$$A = \frac{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}{2} - \frac{1}{3} + 1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + 1 = \frac{3}{12} - \frac{2}{12} + \frac{12}{12} = \frac{13}{12} \Rightarrow 2A = \frac{13}{6}$$

$$\Rightarrow 2A - \frac{1}{6} = \frac{13}{6} - \frac{1}{6} = \frac{12}{6} = 2$$



(112) در شکل مقابل داریم:

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{2} \Rightarrow x = \sqrt{3}m$$

(113)

جمله عمومی دنباله هندسی
 $a_n = a_1 r^{n-1}$
 قدر نسبت: r , جمله اول دنباله: a_1

$$12, \circ, \circ, \circ, 192$$

$$a_1 \quad a_5$$

$$a_1 = 12$$

$$a_5 = a_1 r^4 = 192$$

$$12 \times r^4 = 192$$

$$r^4 = \frac{192}{12} = 16$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r = 2 \Rightarrow 12, 24, 48, 96, 192 \\ r = -2 \Rightarrow 12, -24, 48, -96, 192 \end{cases}$$

(114)

جمله ی عمومی دنباله ی حسابی
 $a_n = a_1 + (n - 1)d$
 قدر نسبت: d , جمله ی اول دنباله: a_1
 $32, \circ, \circ, \circ, 68$
 $a_1 \qquad \qquad \qquad a_5$
 $a_5 = a_1 + 4d$
 $68 = 32 + 4d \Rightarrow 4d = 36 \Rightarrow d = 9$
 $32, 41, 50, 59, 68$

جمله ی عمومی دنباله ی حسابی
 $a_n = a_1 + (n - 1)d$
 قدر نسبت: d , جمله ی اول دنباله: a_1
 $a_1 < 0, a_2 < 0, a_3 < 0, a_4 > 0$
 $d > 0$
 $a_3 < 0 \Rightarrow a_1 + 2d < 0$
 $a_4 > 0 \Rightarrow a_1 + 3d > 0$

با فرض $a_1 = -5$ داریم:

$I) -5 + 3d > 0 \Rightarrow d > \frac{5}{3}$

$II) -5 + 2d < 0 \Rightarrow d < \frac{5}{2}$

$\frac{(I),(II)}{6} \rightarrow \frac{10}{6} > d > \frac{15}{6}$

$d = \frac{12}{6} = 2$

$a_1 = -5$

$d = 2$

$-5, -3, -1, 1, 3, \dots$

برای مثال:

جمله ی عمومی دنباله ی حسابی
 $a_n = a_1 + (n - 1)d$
 قدر نسبت: d , جمله ی اول دنباله: a_1
 $\begin{cases} a_{11} = a_1 + 10d = 25 \\ a_{17} = a_1 + 16d = 37 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a_1 - 10d = -25 \\ a_1 + 16d = 37 \end{cases}$
 $6d = 12 \Rightarrow d = 2$
 $a_1 + 10 \times 2 = 25 \Rightarrow a_1 + 20 = 25 \Rightarrow a_1 = 5$
 $a_n = 5 + (n - 1) \times 2$
 $a_n = 5 + 2n - 2 = 2n + 3$

117 اگر کمی دقت کنید می بینید که خود A در A وجود دارد.

$A^2 = 6 + \underbrace{\sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots}}}}_A$

$\Rightarrow A^2 = 6 + A$

$A = 3$

حالا 2 طرف تساوی را به توان 2 می رسانیم:

با حل معادله فوق A را به دست می آوریم:

$S = \left\{ (پ, 1), (پ, 2), (پ, 3), (پ, 4), (پ, 5), (پ, 6) \right\}$
 $\left\{ (ر, ر), (ر, پ), (ر, پ, پ), (ر, ر, ر) \right\}$

(ب)

$$A = \{(پ, ۲), (پ, ۴), (پ, ۶)\}$$

(پ)

$$B = \{(ر, ر, پ), (ر, پ, ر), (ر, ر, ر)\}$$

۱۱۹ اگر عرض آن را x بنامیم داریم:

$$P = ۲(x + (x + ۳)) = ۲(۲x + ۳) = ۴x + ۶$$

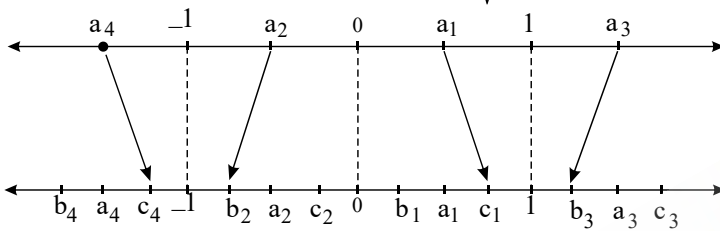
۱۲۰

$a_۳$: هر چه از اعداد بزرگ تر از یک، ریشه بزرگتری بگیریم، کوچک تر می شوند: مثال: $\sqrt[۳]{۸} = ۲ < \sqrt{۸}$

a_1 : هر چه از اعداد بین صفر و یک، ریشه بزرگتری بگیریم، بزرگ تر می شوند: مثال: $\sqrt[۳]{\frac{1}{۸}} = \frac{1}{۲} > \frac{1}{۸}$

$a_۲$: هر چه از اعداد بین صفر و منفی یک، ریشه بزرگتری بگیریم، کوچک تر می شوند: مثال: $\sqrt[۳]{\frac{-1}{۸}} = \frac{-1}{۲} < \frac{-1}{۸}$

$a_۴$: اعداد کوچک تر از منفی یک، هر چه ریشه بزرگتری بگیریم، بزرگ تر می شوند: مثال: $\sqrt[۳]{-۸} = -۲ < -۸$



۱۲۱ برای این که مجموع دو عدد زوج شود هر دو باید فرد باشند یا هر دو باید زوج باشند. به علاوه

چون دو کارت را با هم بیرون می آوریم، پس (b, a) با (a, b) فرقی نمی کند.

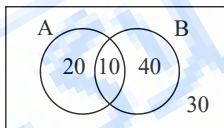
$$n(A) = \left\{ (1, ۳)(1, ۵)(1, ۷)(1, ۹)(۳, ۵)(۳, ۷)(۳, ۹)(۵, ۷)(۵, ۹)(۷, ۹) \right. \\ \left. (۲, ۴)(۲, ۶)(۲, ۸)(۲, ۱۰)(۴, ۶)(۴, ۸)(۴, ۱۰)(۶, ۸)(۶, ۱۰)(۸, ۱۰) \right\}$$

$$n(S) = \binom{10}{۲} = \frac{10!}{۸! ۲!} = \frac{10 \times 9 \times 8!}{8! \times 2} = ۴۵$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۲۰}{۴۵} = \frac{۴}{۹}$$

۱۲۲

باتوجه به نمودار ون مقابل (اعداد روی نمودار بیانگر درصد احتمال هستند) داریم:



الف) احتمال این که حداقل با یکی از دو سلاح تیراندازی کند.

یعنی با A یا با B یا هر دو:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{۳۰}{۱۰۰} + \frac{۵۰}{۱۰۰} - \frac{۱۰}{۱۰۰} = \frac{۷۰}{۱۰۰}$$

ب) باتوجه به نمودار، احتمال این که فقط با سلاح A تیراندازی کند $\frac{۳۰}{۱۰۰}$ است.

ج) احتمال این که با هر دو سلاح تیراندازی کند یعنی $P(A \cap B)$ که باتوجه به نمودار برابر $\frac{۱۰}{۱۰۰}$ است.

۱۲۳

$$\text{الف) } ۳x - ۲ > ۵x + ۷ \Rightarrow -۲ > ۲x + ۷ \Rightarrow ۲x + ۹ < ۰ \Rightarrow ۲x < -۹$$

$$x < \frac{-۹}{۲} \Rightarrow x \in (-\infty, \frac{-۹}{۲})$$

$$\text{ب) } ۲ - ۳x \leq -۳ + ۷x \Rightarrow ۵ \leq ۱۰x \Rightarrow \frac{1}{۲} \leq x \quad x \in [\frac{1}{۲}, +\infty)$$

۱۲۴

$$S = ۲x \times x = ۲x^۲ = ۸$$

$$P = ۲(۲x + x) = ۲(۳x) = ۶x$$

$$۲x^۲ = ۸ \Rightarrow x^۲ = ۴ \Rightarrow x = \pm ۲$$

غرضی زیرا که طول نمی تواند منفی باشد. $x = -۲$

$$P = 6x \xrightarrow{x=2} P = 12$$

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[kn]{a^{km}}$$

$$a \geq 0, n, m, k \in \mathbb{N}$$

۱۲۵

$$\left. \begin{aligned} \sqrt[2]{2} = 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{2}{4}} = \sqrt[4]{2^2} = \sqrt[4]{8} \\ \sqrt[2]{5} = 5^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{2}{4}} = \sqrt[4]{5^2} = \sqrt[4]{25} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sqrt[4]{8} < \sqrt[4]{25} \Rightarrow \sqrt{2} < \sqrt{5}$$

$$\left. \begin{aligned} \sqrt[3]{8} = 8^{\frac{1}{3}} = 8^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{8^2} = \sqrt[6]{64} \\ \sqrt[3]{6} = 6^{\frac{1}{3}} = 6^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{6^2} = \sqrt[6]{36} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sqrt[6]{64} < \sqrt[6]{36} \Rightarrow \sqrt[3]{8} < \sqrt[3]{6}$$

$$\left. \begin{aligned} \sqrt[4]{9} = 9^{\frac{1}{4}} = 9^{\frac{3}{12}} = \sqrt[12]{9^3} = \sqrt[12]{729} \\ \sqrt[4]{12} = 12^{\frac{1}{4}} = 12^{\frac{3}{12}} = \sqrt[12]{12^3} = \sqrt[12]{1728} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sqrt[12]{729} < \sqrt[12]{1728} \Rightarrow \sqrt[4]{9} < \sqrt[4]{12}$$

۱۲۶

$$\frac{\sin^r \alpha - \cos^r \alpha}{\cos \alpha (\tan \alpha - 1)} = \frac{(\sin \alpha - \cos \alpha)(\sin \alpha + \cos \alpha)}{\cos \alpha \left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - 1 \right)}$$

$$= \frac{(\sin \alpha - \cos \alpha)(\sin \alpha + \cos \alpha)}{\cos \alpha \left(\frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\cos \alpha} \right)} = \frac{(\sin \alpha - \cos \alpha)(\sin \alpha + \cos \alpha)}{(\sin \alpha - \cos \alpha)} = \sin \alpha + \cos \alpha$$

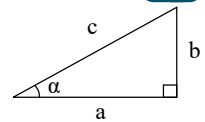
۱۲۷

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{\sin \alpha} - \sin \alpha \right) \cot \alpha}{\cos \alpha}} &= \sqrt{\frac{\left(\frac{1 - \sin^2 \alpha}{\sin \alpha} \right) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}}{\cos \alpha}} = \sqrt{\frac{\cos^2 \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha \cos \alpha}} \\ &= \sqrt{\frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha \cos \alpha}} = \sqrt{\frac{\cos^r \alpha}{\sin^r \alpha}} = \sqrt{\cot^r \alpha} = |\cot \alpha| \end{aligned}$$

۱۲۸

$$\frac{1}{\cos^r \alpha} - 1 = \frac{1 - \cos^r \alpha}{\cos^r \alpha} = \frac{\sin^r \alpha}{\cos^r \alpha} = \tan^r \alpha = \frac{1}{\cot^r \alpha} = \frac{1}{\frac{1}{25}} = 25$$

۱۲۹ با در نظر گرفتن زاویه‌ی بین ضلع a و c بعنوان زاویه‌ی α داریم:



$$\sin \alpha = \frac{b}{c} = \frac{1}{3} \quad 1 + \cot^r \alpha = \frac{1}{\sin^r \alpha} \Rightarrow 1 + \cot^r \alpha = \frac{1}{\frac{1}{9}}$$

$$\cot^r \alpha + 1 = 9 \rightarrow \cot^r \alpha = 8 \rightarrow \cot \alpha = \sqrt[3]{8} = \frac{a}{b}$$

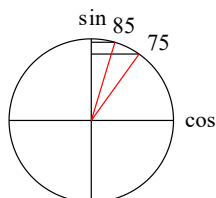
۱۳۰

$$\sin^r \alpha + \cos^r \alpha = 1 \Rightarrow \cos^r \alpha = 1 - \sin^r \alpha$$

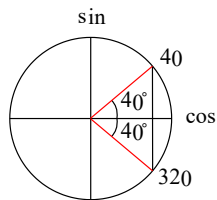
$$\cos^r \alpha = 1 - 0.36 = 0.64 \Rightarrow \cos \alpha = \pm 0.8$$

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \pm \frac{0.8}{0.6} = \pm \frac{4}{3}$$

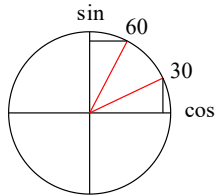
۱۳۱ با توجه به دایره مثلثاتی داریم:



$$\sin 85 > \sin 75 \quad (1)$$

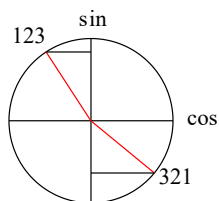


$$\cos 40^\circ = \cos 320^\circ \quad (2)$$



$$\sin 60^\circ = \cos 30^\circ \quad (3)$$

سینوس و کسینوس زوایای متمم با هم برابرند.

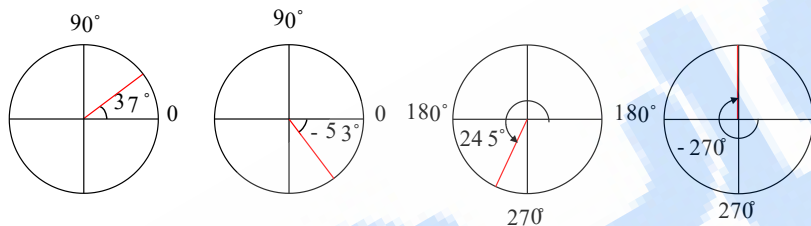


$$\sin 123^\circ > \sin 321^\circ \quad (4)$$

الف و ب هر دو نادرست: ۱۳۲

زوایای ۰، ۹۰، ۲۷۰ و ۳۶۰... در هیچ یک از ربع‌ها نیستند؛ بلکه روی مرز ناحیه‌های مثلثاتی هستند.

۱۳۳



۱۳۴

$$\frac{1}{2} \times AB \times AC \times \sin \theta$$

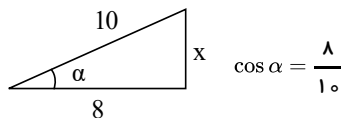
↓
زاویه بین AB و AC

$$\hat{\theta} = \hat{A} = 30^\circ$$

$$\sin \theta = \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \rightarrow S = \frac{1}{2} \times 3 \times 5 \times \frac{1}{2} = \frac{15}{4}$$

۱۳۵

باتوجه به شکل مقابل داریم:



برای بدست آوردن ارتفاع مثلث، از رابطه‌ی فیثاغورس استفاده می‌کنیم:

$$100 = 64 + x^2 \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x = 6$$

$$S = \frac{\text{ارتفاع} \times \text{قاعده}}{2} = \frac{8 \times 6}{2} = 24$$

۱۳۶

جمله عمومی دنباله هندسی

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

قدر نسبت: q ، جمله اول دنباله: a_1

$$t_n = t_1 q^{n-1} \Rightarrow 50 = 200 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \rightarrow \frac{50}{200} = \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \rightarrow n-1 = 1 \Rightarrow n = 2$$

پس از دو روز $n = 2$

۱۳۷

جمله ی عمومی دنباله ی حسابی

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

قدر نسبت: d , جمله ی اول دنباله: a_1

واسطه حسابی بین دو عدد A, B : $\frac{A+B}{2}$

الف) $\frac{11 + 15}{2} = \frac{26}{2} = 13$

ب) $\frac{-1 + 1}{2} = \frac{0}{2} = 0$

پ) $\frac{-3 - 12}{2} = \frac{-15}{2} = -7,5$

جمله ی عمومی دنباله ی حسابی

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

قدر نسبت: d , جمله ی اول دنباله: a_1

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ d = 3 \end{cases} \Rightarrow a_n = a_1 + (n - 1)d = 2 + (n - 1) \times 3 \Rightarrow a_n = 2 + 3n - 3 = 3n - 1$$

الف) حسابی (با توجه به اضافه شدن مقدار ثابت ۳ به تک تک جملات)
ب)

پ) $a_{12} = 3 \times 12 - 1 = 36 - 1 = 35$

ت) هفتمین جمله $a_n = 20 = 3n - 1 \Rightarrow 3n = 21 \Rightarrow n = 7$

۱۳۹ اگر ساعت مراجعه را با h و دقیقه مراجعه را با m نشان دهیم، با توجه به الگوی $2h + \frac{m}{2} = 34$ و با جایگذاری $h = 11$ داریم:

$$2 \times 11 + \frac{m}{2} = 34 \Rightarrow 22 + \frac{m}{2} = 34 \Rightarrow \frac{m}{2} = 12 \Rightarrow m = 24$$

ساعت دقیق مراجعه: ساعت یازده و بیست و چهار دقیقه

۱۴۰

اگر a_n و a_{n+1} را در دو جمله ی متوالی در نظر بگیریم داریم:

$$a_{n+1} - a_n = 28$$

$$(4(n+1)^2 - 1) - (4n^2 - 1) = 28$$

$$(4(n^2 + 2n + 1) - 1) - (4n^2 - 1) = 28$$

$$4n^2 + 8n + 4 - 1 - 4n^2 + 1 = 28$$

$$8n + 4 = 28 \Rightarrow 8n = 24 \Rightarrow n = 3, n + 1 = 4 \text{ جملات سوم و چهارم}$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \quad 141$$

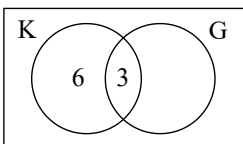
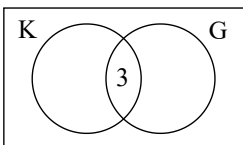
راه اول: اگر آزمایش خون را با K و آزمایش قند را با G نشان دهیم:

$$\begin{cases} n(K) = 9 \\ n(G) = 5 \\ n(K \cap G) = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n(K \cup G) = n(K) + n(G) - n(K \cap G) \\ n(K \cup G) = 9 + 5 - 3 = 11 \end{cases}$$

یازده نفر آزمایش خون یا قند ($K \cup G$) را انجام داده اند.

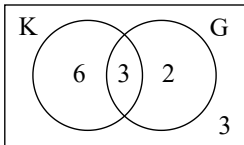
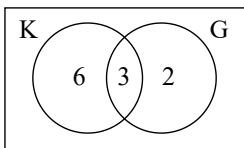
ب) $n(K \cup G)^c = n(u) - n(K \cup G) = 14 - 11 = 3$

راه دوم:



می دانیم در مجموع ۹ نفر آزمایش خون داده اند که ۳ نفر آزمایش قند هم داده اند پس ۶ نفر فقط آزمایش خون داده اند:

با استدلال مشابه در می‌یابیم که ۲ نفر فقط آزمایش قند داده‌اند:



با جمع کردن تعداد نفرات و مقایسه با تمام مراجعه‌کنندگان در می‌یابیم که ۳ نفر در هیچ کدام یک از این دو آزمایش شرکت نکرده‌اند و نمودار ون به شکل زیر کامل می‌گردد:

۱۴۲ بنا به تعریف، دو مجموعه‌ی مجزا به دو مجموعه‌ای که فاقد عضو مشترک باشند گفته می‌شود از این رو اشتراک آن دو مجموعه تهی است و داریم: $n(A \cap B) = 0$

و باتوجه به رابطه اصلی تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه خواهیم داشت:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = n(A) + n(B)$$

۱۴۳ راه اول: ابتدا باتوجه به A ، A' را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$A' = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ یا } x > 3\}$$

و سپس آن را به صورت بازه نمایش می‌دهیم:

$$A' = (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$$

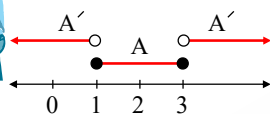
راه دوم: ابتدا A را به صورت بازه می‌نویسیم:

$$A = [1, 3]$$

سپس A' را بدست می‌آوریم:

$$A' = (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$$

راه سوم: با توجه به محور اعداد:



$$A' = (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$$

۱۴۴ A می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد زیرا هم مجموعه‌های متناهی و هم مجموعه‌های نامتناهی توانایی در برگرفتن زیرمجموعه‌ای متناهی را دارند.

۱۴۵ الف) نادرست: از اشتراک دو مجموعه متناهی و نامتناهی، همواره مجموعه‌ای متناهی به دست می‌آید.

ب) درست: برای مثال $N \subseteq W$

پ) نادرست: اگر $A \subseteq B$ و B متناهی باشد، A حتماً متناهی خواهد بود.

ت) درست

ث) نادرست: تهی مجموعه‌ای بدون عضو و متناهی است چرا که تعداد اعضای آن صفر است و صفر عددی متناهی است.

۱۴۶

الف) درست

ب) درست

پ) نادرست

ت) نادرست

۱۴۷

الف

$$x - 1, x = -3, x = 2$$

| x | -3 | -1 | 2 |
|-----------------|----|----|---|
| $(x - 2)^{100}$ | + | + | + |
| $(x + 3)^{101}$ | - | + | + |
| $(x + 1)^{102}$ | + | + | + |
| P | - | + | + |

ب

$$x = \frac{1}{2}, x = -1, x = \frac{1}{3}$$

| x | -1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ |
|-----------------|----|---------------|---------------|
| (1-2x) | + | + | + |
| $3x^2 + 2x - 1$ | + | - | + |
| P | + | - | + |

$x^2 + 8$ همواره مثبت است پس می‌توانیم از آن صرف‌نظر کنیم.

ب

$$\begin{cases} -2x^2 + x - 1 = 0 \\ \Delta = 1 - 4(-2)(-1) < 0 \end{cases} \xrightarrow{a < 0} \text{همواره منفی است} \rightarrow \text{ریشه ندارد}$$

$$(x+1)^2 = 0 \Rightarrow x = -1$$

$$-x^2 + 5x - 6 = 0 \Rightarrow \Delta = 25 - 4(-1)(-6) = 1$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm 1}{-2} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$x^2 + 6x + 9 = 0 \Rightarrow x = -3$$

| x | -3 | -1 | 2 | 3 |
|-----------------|----|----|---|---|
| $-2x^2 + x - 1$ | - | - | - | - |
| $(x+1)^3$ | - | - | + | + |
| $-x^2 + 5x - 6$ | - | - | - | + |
| $x^2 + 6x + 9$ | + | + | + | + |
| P | - | - | + | - |

۱۴۸

نادرست الف

درست ب

۱۴۹

الف

$$\sqrt{6}(\sqrt{2} - \sqrt{3}) + \sqrt{50} = \sqrt{12} - \sqrt{18} + \sqrt{50} = 2\sqrt{3} - 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 2\sqrt{3} + 2\sqrt{2}$$

ب

$$2^0 \sqrt{2^{15}} + 1^0 \sqrt{2^3} - 2^0 2^3 - 2^{\frac{3}{2}} = 2^{\frac{3}{2}} + 2^{1^0} - 2^{1^0} - 2^{\frac{3}{2}} = 0$$

پ

$$[(\sqrt{6} - \sqrt{5})(\sqrt{6} + \sqrt{5})]^f = \left[\underbrace{(\sqrt{6})^2 - (\sqrt{5})^2}_1 \right]^f = 1$$

۱۵۰

الف

$$\frac{2}{(x-1)(x+1)} - \frac{x}{(x-1)(x-2)} = \frac{2(x-2) - x(x+1)}{(x-1)(x+1)(x-2)} = \frac{-x^2 + x - 4}{(x-1)(x+1)(x-2)}$$

ب

$$\frac{x}{x-1} + \frac{3}{x+1} - \frac{4x-2}{(x-1)(x+1)} = \frac{x(x+1) + 3(x-1) - 4x + 2}{(x-1)(x+1)} = \frac{x^2 + x + 3x - 3 - 4x + 2}{(x-1)(x+1)} = \frac{x^2 - 1}{(x-1)(x+1)} = 1$$

پ

$$\frac{(a-b)(a+b)}{b(a-b)} - \frac{b(a-b)}{b^2} = \frac{a+b}{b} - \frac{a-b}{b} = \frac{a+b - a + b}{b} = 2$$

ت

$$\frac{a+1}{a-1} + \frac{a+2}{a+3} - \frac{a+7}{a^2+2a-3} = \frac{(a+1)(a+3) + (a-1)(a+2) - a-7}{(a-1)(a+3)}$$

$$= \frac{a^2+2a+3+a^2+a-2-a-7}{(a-1)(a+3)} = \frac{2a^2+3a-6}{(a-1)(a+3)} = \frac{2(a+3)(a-1)}{(a-1)(a+3)} = 2$$

الف

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x+1} > 0$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \begin{cases} x=1 \\ x=2 \end{cases}$$

$$x+1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

| | | | |
|----------------|----|---|---|
| x | -1 | 1 | 2 |
| $x^2 - 3x + 2$ | + | + | ○ |
| $x+1$ | - | ○ | + |
| | - | + | ○ |

مجموعه جواب: $(-1, 1) \cup (2, +\infty)$

ب

$$-1 < \frac{2x+1}{3x-1} < 2$$

$$I \begin{cases} \frac{2x+1}{3x-1} < 2 \Rightarrow \frac{2x+1-6x+2}{3x-1} < 0 \Rightarrow \frac{-4x+3}{3x-1} < 0 \\ II \frac{2x+1}{3x-1} > -1 \Rightarrow \frac{2x+1+3x-1}{3x-1} > 0 \Rightarrow \frac{5x}{3x-1} > 0 \end{cases}$$

I)

| | | |
|---------|---------------|---------------|
| x | $\frac{1}{3}$ | $\frac{3}{4}$ |
| $-4x+3$ | + | ○ |
| $3x-1$ | - | ○ |
| | - | + |

$\Rightarrow (-\infty, \frac{1}{3}) \cup (\frac{3}{4}, +\infty)$

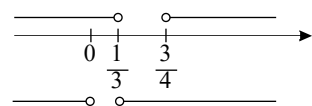
II)

| | | |
|--------|---|---------------|
| x | 0 | $\frac{1}{3}$ |
| $5x$ | - | ○ |
| $3x-1$ | - | ○ |
| | + | - |

$\Rightarrow (-\infty, 0) \cap (\frac{1}{3}, +\infty)$

از دو بازه پاسخ I و II اشتراک می‌گیریم:

$$(-\infty, 0) \cup (\frac{3}{4}, +\infty)$$



پ

$$\frac{3x-4+x^2-8x-1}{3x-4} \leq 0$$

$$\frac{x^2-5x-14}{3x-4} \leq 0 \Rightarrow \frac{(x-7)(x+2)}{3x-4} \leq 0$$

| | | | | |
|--------|----|---------------|---|---|
| x | -2 | $\frac{4}{3}$ | 7 | |
| x - 7 | - | - | - | + |
| x + 2 | - | + | + | + |
| 3x - 4 | - | - | + | + |
| | - | + | - | + |

مجموعه جواب: $(-\infty, -2] \cup (\frac{4}{3}, 7]$

ت

$$2x - 5 \geq 1 \Rightarrow 2x \geq 6 \Rightarrow x \geq 3$$

$$2\left(\frac{x}{2} + 3 \leq 7\right) \Rightarrow x + 6 \leq 14 \Rightarrow x \leq 8 \Rightarrow [3, 8]$$

الف

$$\frac{m(m^2 + m)}{m - 2} > 0 \Rightarrow \frac{m^2(m^2 + 1)}{m - 2} > 0$$

$$m - 2 > 0 \Rightarrow m > 2$$

ب

$$\frac{x^2 + mx + m}{x - x^2 - 3} < 0$$

$$\Delta = 1 - 4(-1)(-3) = -11 < 0 \quad (1)$$

$$a < 0 \quad (2)$$

صورت: $\Delta < 0$

$$\Delta = m^2 - 4(1)(m) < 0 \Rightarrow m^2 - 4m < 0$$

| | | | |
|------------|---|---|---|
| m | 0 | 4 | |
| $m^2 - 4m$ | + | - | + |

$\Rightarrow m \in (0, 4)$

الف

$$D: \mathbb{R}$$

ب

$$D: \mathbb{R} - \{-3\}$$

ب

$$\frac{x - 1}{x^2 - 1} \geq 0$$

| | | | |
|-----------|----|---|---|
| x | -1 | 1 | |
| x - 1 | - | - | + |
| $x^2 - 1$ | + | - | + |

$\Rightarrow D: (-1, +\infty) - \{1\}$

ت

$$\frac{(x + 1)(x - 3)}{x^2 + 5} \geq 0 \quad \text{همواره مثبت است}$$

| | | | |
|------|----|---|---|
| x | -1 | 3 | |
| f(x) | + | - | + |

$\Rightarrow D: (-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$

۱۵۲

صورت نامنفی است، کافیت مخرج مثبت باشد.

طبق (۱) و (۲) مخرج همواره منفی است. پس صورت بایستی مثبت شود.

۱۵۳

ث

$$\begin{cases} 4 - x \geq 0 \Rightarrow 4 \geq x \\ x - 4 \geq 0 \Rightarrow x \geq 4 \end{cases} \rightarrow D = \{4\}$$

ج

$$x^2 - 2x - 3 \neq 0 \Rightarrow (x - 3)(x + 1) \neq 0 \Rightarrow D \mathbb{R} - \{3, -1\}$$

چ

$$\frac{(x-1)^3}{2-x} \geq 0 \Rightarrow$$

| | | | |
|-----------|---|---|---|
| x | 1 | 2 | |
| $(x-1)^3$ | - | + | + |
| $2-x$ | + | + | - |
| $k(x)$ | - | + | - |

$\Rightarrow D: [1, 2)$

پ

$$-4x^2 + 4x - 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 16 - 4(-4)(-1) = 0$$

۱۵۴

الف نادرست

ب نادرست

درست

ت درست

۱۵۵ جامعه: مجموعه تمام افراد یا اشیائی که در مورد یک یا چند ویژگی آنها تحقیق کنیم مثل مردان. نمونه: بخشی از جامعه که برای مطالعه انتخاب می شود مثل مردان ۴۰ ساله.

۱۵۶

| متغیر های دانش آموزان | کمی | کیفی | گسسته | پیوسته | ترکیبی | اسمی |
|------------------------|-----|------|-------|--------|--------|------|
| نمره ریاضی نهم | ? | | ? | | | |
| جنسیت | | ? | | | | ? |
| قد | ? | | | ? | | |
| وزن | ? | | | ? | | |
| هوش (بالا/متوسط/پایین) | | ? | | | ? | |
| رضایت در مدرسه | | ? | | | ? | |
| شاخص توده بدن | ? | | | ? | | |

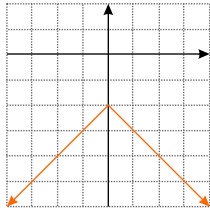
۱۵۷

$$125 = 0,006s^2 - 0,02s + 120 \Rightarrow 0,006s^2 - 0,02s - 5 = 0$$

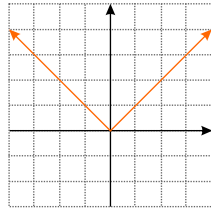
$$\Rightarrow \Delta = (-0,02)^2 - 4(0,006)(-5) = 0,0004 + 0,12 = 0,1204 \Rightarrow \sqrt{\Delta} \approx 0,35$$

$$s = \frac{-(-0,02) \pm 0,35}{2(0,006)} \Rightarrow \begin{cases} s = \frac{0,02 + 0,35}{0,012} \approx 31 \\ s = \frac{0,02 - 0,35}{0,012} < 0 \quad \text{غف} \end{cases}$$

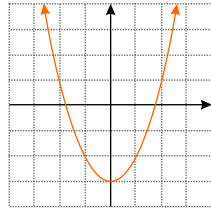
۱۵۸



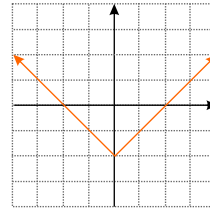
خ



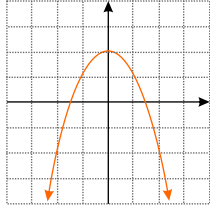
ب



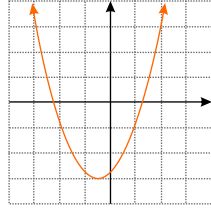
الف



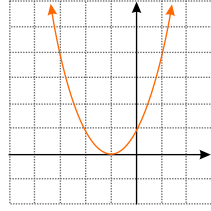
ذ



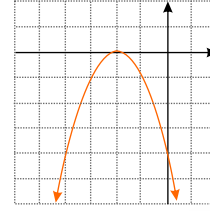
ب



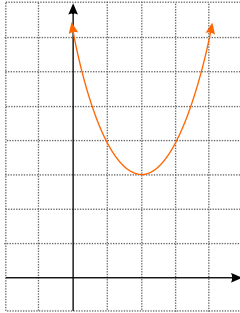
ر



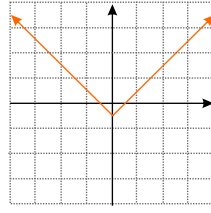
ث



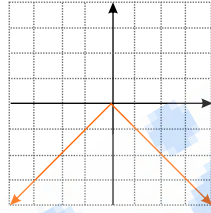
ح



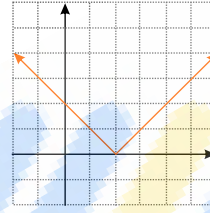
د



ج



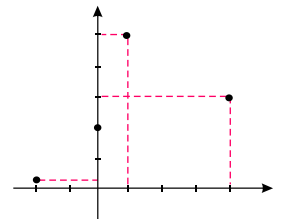
ن



چ

| تابع | دامنه | بردار |
|------|--------------|---------------------------|
| الف | \mathbb{R} | $[-2, +\infty)$ |
| ب | \mathbb{R} | $(-\infty, 2]$ |
| ب | \mathbb{R} | $[0, +\infty)$ |
| ث | \mathbb{R} | $(-\infty, 0]$ |
| ث | \mathbb{R} | $[0, +\infty)$ |
| ج | \mathbb{R} | $[-\frac{1}{3}, +\infty)$ |
| چ | \mathbb{R} | $[0, +\infty)$ |
| ح | \mathbb{R} | $(-\infty, 0]$ |
| خ | \mathbb{R} | $(-\infty, -2]$ |
| د | \mathbb{R} | $[2, +\infty)$ |
| ذ | \mathbb{R} | $[-2, +\infty)$ |
| ر | \mathbb{R} | $[-2, +\infty)$ |

$$g = \left\{ (0, 2), (1, 5), (-2, \frac{1}{3}), (4, 3) \right\}$$



۱۵۹

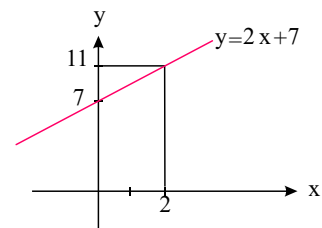
۱۶۰ علی در هر دقیقه ۱٫۰ کیلومتر را طی می‌کند بنابراین نمایش جبری این تابع $f(t) = 0.1t$ است.

۱۶۱ می‌دانیم: تابع خطی به فرم $y = ax + b$ است.

$$f(0) = y \Rightarrow y = b$$

$$f(2) = 11 \Rightarrow 11 = 2a + 7 \Rightarrow 2a = 4 \Rightarrow a = 2$$

$$y = 2x + 7$$

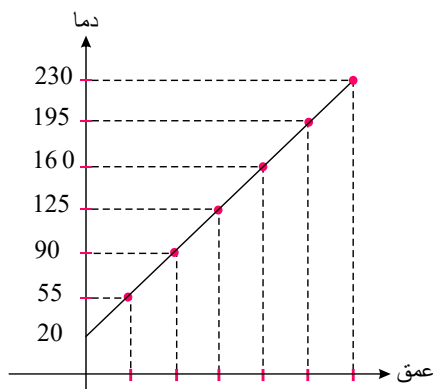


۱۶۲

الف) زیرا به ازای هر عمق تنها یک دما داریم.

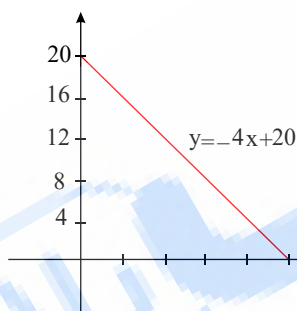
ب) $y = 35x + 20$

پ) $f(10) = 35 \times 10 + 20 = 370^\circ C$



۱۶۳ پس از ۵ ساعت

| | | | | | | |
|------------------|----|----|----|---|---|---|
| x (زمان) | ۰ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ |
| y (ارتفاع شمع) | ۲۰ | ۱۶ | ۱۲ | ۸ | ۴ | ۰ |



زیرا از فرم تابع خطی $(y = ax + b)$ پیروی می‌کند.

۱۶۴

الف) ۳ رأس داریم که هر کدام به ۲ طریق قابل رنگ‌اند: قرمز و آبی. بنابراین داریم: $2 \times 2 \times 2 = 8$

ب) اگر A قرمز باشد، B و C هر دو باید آبی باشند تا با A هم‌رنگ نباشند در حالی که خود B و C هم نباید هم‌رنگ باشند. که امکان‌پذیر نیست اگر A آبی باشند، B و C باید هر دو قرمز باشند تا با A هم‌رنگ نباشند که باز هم امکان ندارد. بنابراین چنین چیزی در کل امکان‌پذیر نیست.

پ) الف: $3 \times 3 \times 3 = 27$

ب: $3 \times 2 \times 1 = 6$
 ↓ ↓ ↓
 رأس اول رأس دوم رأس سوم

$$AB < 0 \Rightarrow \begin{cases} A < 0 \\ B > 0 \end{cases} \text{ یا } \begin{cases} A > 0 \\ B < 0 \end{cases}$$

| | | | |
|--|--|--|--|
| ربع چهارم $\begin{cases} \sin \alpha < 0 \\ \cos \alpha > 0 \end{cases}$ | ربع سوم $\begin{cases} \sin \alpha < 0 \\ \cos \alpha < 0 \end{cases}$ | ربع دوم $\begin{cases} \sin \alpha > 0 \\ \cos \alpha < 0 \end{cases}$ | ربع اول $\begin{cases} \sin \alpha > 0 \\ \cos \alpha > 0 \end{cases}$ |
|--|--|--|--|

۱۶۵ می‌دانیم:

علامت $\sin \alpha$ و $\cos \alpha$ باید مختلف باشند.

I) $\begin{cases} \sin \alpha > 0 \\ \cos \alpha < 0 \end{cases} \Rightarrow$ ربع دوم α

II) $\begin{cases} \sin \alpha < 0 \\ \cos \alpha > 0 \end{cases} \Rightarrow$ ربع چهارم α

| | | | |
|---|--|--|--|
| ربع چهارم α $\begin{cases} \sin \alpha < 0 \\ \cos \alpha > 0 \end{cases}$ | ربع سوم $\begin{cases} \sin \alpha < 0 \\ \cos \alpha < 0 \end{cases}$ | ربع دوم $\begin{cases} \sin \alpha > 0 \\ \cos \alpha < 0 \end{cases}$ | ربع اول $\begin{cases} \sin \alpha > 0 \\ \cos \alpha > 0 \end{cases}$ |
|---|--|--|--|

۱۶۶ می‌دانیم:

الف) $\begin{cases} \sin \theta > 0 \\ \cos \theta > 0 \end{cases} \Rightarrow$ ربع اول θ

ب) $\begin{cases} \sin \theta < 0 \\ \cos \theta > 0 \end{cases} \Rightarrow$ ربع چهارم θ

۱۶۷ الف:

می‌دانیم: اگر a, b, c سه جمله متوالی از یک دنباله حسابی باشند $b = \frac{a+c}{2}$ واسطه حسابی a و c است.

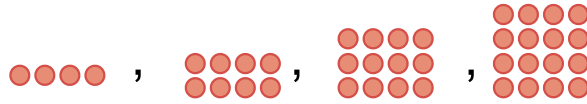
ب: $\frac{11+5}{2} = 8$ واسطه حسابی ۱۱ و ۵

$\frac{20+30}{2} = 25$ واسطه حسابی ۲۰ و ۳۰

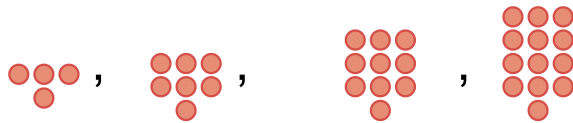
پ: واسطه حسابی هر دو عدد، میانگین آن دو است.

۱۶۸

الف: $a_n = 4n : 4, 8, 12, 16, \dots$



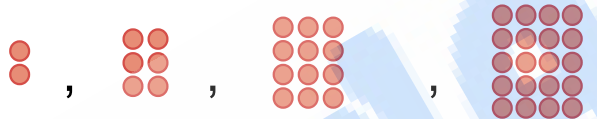
ب: $b_n = 3n + 1 : 4, 7, 10, 13, \dots$



پ: $c_n = n^2 + 2 : 3, 6, 11, 18, \dots$

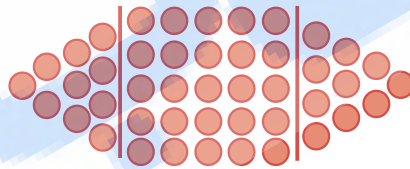


ت: $d_n = n^2 + n : 2, 6, 12, 20, \dots$



۱۶۹

الف: $1, 6, 15, 28, 45, 66, \dots$



شکل (۵)

ب:

$$\begin{cases} n=1 \\ t_n = 1 = 1^2 + 1 \times 0 \end{cases} \quad \begin{cases} n=2 \\ t_n = 6 = 2^2 + 2 \times 1 \end{cases} \quad \begin{cases} n=3 \\ t_n = 15 = 3^2 + 3 \times 2 \end{cases} \quad \begin{cases} n=n \\ t_n = n^2 + n(n-1) = 2n^2 - n \end{cases}$$

پ:

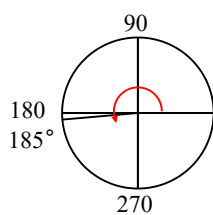
$t_{10} = 2 \times 10^2 - 10 = 2 \times 100 - 10 = 200 - 10 = 190$

می‌دانیم: $0 < \alpha < 90$: ربع اول:
 $90 < \alpha < 180$: ربع دوم:
 $180 < \alpha < 270$: ربع سوم:
 $270 < \alpha < 360$: ربع چهارم:
 خود زوایای $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ هیچ یک از ربع‌ها نیستند.

۱۷۰

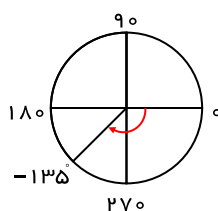
می‌دانیم:

(ت)



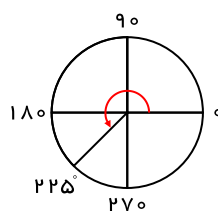
ربع سوم

(پ)



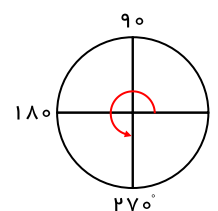
ربع سوم

(ب)



ربع سوم

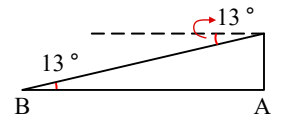
(الف)



هیچ کدام

۱۷۱ می دانیم: $\tan \alpha = \frac{\text{طول ضلع مقابل}}{\text{طول ضلع مجاور}}$

$$\tan 13^\circ = \frac{2}{AB} \Rightarrow 0,23 = \frac{2}{AB} \Rightarrow AB = \frac{2 \times 100}{23} \approx 8,7 \text{ km}$$



۱۷۲

۱۷۳

۱۷۴

$$(-3, 0) \cap [0, 1) = \{0\}$$

الف) $x^x - y^y = (x^x - y^y)(x^y + y^y) = (x - y)(x + y)(x^y + y^y)$

ب) $x^x - y^y = (x^x - y^y)(x^y + y^y) = (x - y)(x^y + xy + y^y)(x + y)(x^y - xy + y^y)$

پ) $8a^3 + 27 = (2a)^3 + 3^3 = (2a + 3)(4a^2 - 6a + 9)$

ت) $a^3 b^6 - 8 = (ab^2)^3 - 2^3 = (ab^2 - 2)(a^2 b^4 + 2ab^2 + 4)$

$$16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} = 4 \quad 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5} \quad 4^{\frac{3}{2}} = \sqrt{4^3}$$

$$3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{2}{2}} = 3^{\frac{1}{2} + \frac{2}{2}} = 3^{\frac{3}{2}} = \sqrt{3^3} = 3$$

$$\left(4^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{2}} = 4^{\frac{1}{2} \times \frac{2}{2}} = 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4}$$

$$4^{\frac{2}{2}} = \sqrt{4^2}$$

$$32^{-\frac{1}{5}} = \frac{1}{32^{\frac{1}{5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{32}} = \frac{1}{2}$$

$$32^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{32^2} = \sqrt[5]{(2^5)^2} = 2^2 = 4$$

$$125^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{125^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{(125)^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{(5^3)^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{(5^2)^3}} = \frac{1}{25}$$

۱۷۵ نقطه‌ی اول را به هر یک از نقاط دیگر وصل می‌کنیم در این صورت ۱۹ وتر پدید می‌آید. با وصل کردن نقطه‌ی دوم به نقاط دیگر به غیر از نقطه‌ی اول ۱۸ وتر به دست می‌آید. سپس نقطه‌ی سوم را به نقاط دیگر غیر از نقاط اول و دوم وصل می‌کنیم ۱۷ وتر حاصل می‌شود. با ادامه‌ی این عمل داریم:

$$19 + 18 + 17 + \dots + 2 + 1 = \frac{19(19 + 1)}{2} = 190$$

یادآوری: $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n + 1)}{2}$

۱۷۶ الف) متغیر کمی پیوسته ب) متغیر کمی گسسته

الف) متغیری است که اگر دو مقدار a و b را بتواند اختیار کند، هر مقدار بین آن‌ها را نیز بتواند اختیار کند. برای مثال وزن یک فرد می‌تواند 67 kg ، 68 kg یا هر عددی بین این دو باشد.
ب) متغیر کمی گسسته، متغیر کمی‌ای است که پیوسته نباشد.
به‌عنوان مثال تعداد فرزندان یک خانواده یک متغیر گسسته است.

۱۷۷ متغیرهایی که قابل اندازه‌گیری نیستند، متغیرهای کیفی می‌گویند. به‌عنوان مثال گروه خونی افراد و پاسخ سؤال «میزان لذت بردن از آشپزی» متغیرهای کیفی‌اند.

۱۷۸ متغیرهایی که قابل اندازه‌گیری‌اند، متغیرهای کمی می‌گویند. به‌عنوان مثال تعداد فرزندان خانواده و وزن افراد متغیرهای کمی‌اند.

۱۷۹ متغیر، ویژگی خاصی از اعضای یک جامعه است که بررسی و مطالعه می‌شود و معمولاً از یک عضو به عضو دیگر تغییر می‌کند.

عدد را که به این ویژگی یک عضو نسبت داده می‌شود، مقدار متغیر می‌گویند.

برای مثال در یک مدرسه، وزن و قد دانش یک دانش‌آموز به عنوان متغیر مربوط به دانش‌آموز است و برای مثال مقدار آن برای علی، 70 kg و 180 cm است.

۱۸۰ الف) نادرست: اندازه‌ی جامعه، بیش‌تر از اندازه‌ی نمونه است.

ب) درست

ج) درست

۱۸۱ الف) درست

ب) درست

(ج) نادرست: آمار، مجموعه‌ای از اعداد، ارقام و اطلاعات است.

۱۸۲

$$S = \left\{ \begin{array}{l} (۱, ۱), (۱, ۲), (۱, ۳), (۱, ۴), (۱, ۵), (۱, ۶) \\ (۲, ۱), (۲, ۲), (۲, ۳), (۲, ۴), (۲, ۵), (۲, ۶) \\ (۳, ۱), (۳, ۲), (۳, ۳), (۳, ۴), (۳, ۵), (۳, ۶) \\ (۴, ۱), (۴, ۲), (۴, ۳), (۴, ۴), (۴, ۵), (۴, ۶) \\ (۵, ۱), (۵, ۲), (۵, ۳), (۵, ۴), (۵, ۵), (۵, ۶) \\ (۶, ۱), (۶, ۲), (۶, ۳), (۶, ۴), (۶, ۵), (۶, ۶) \end{array} \right\}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۲}{۱۶} = \frac{۱}{۸}$$

۱۸۳ فضای نمونه‌ای عبارت است از:

$$S = \{ (۱, ۱), (۱, ۲), (۱, ۳), (۱, ۴), (۱, ۵), (۱, ۶), (۲, ۱), (۲, ۲), (۲, ۳), (۲, ۴), (۲, ۵), (۲, ۶), (۳, ۱), (۳, ۲), (۳, ۳), (۳, ۴), (۳, ۵), (۳, ۶), (۴, ۱), (۴, ۲), (۴, ۳), (۴, ۴), (۴, ۵), (۴, ۶), (۵, ۱), (۵, ۲), (۵, ۳), (۵, ۴), (۵, ۵), (۵, ۶), (۶, ۱), (۶, ۲), (۶, ۳), (۶, ۴), (۶, ۵), (۶, ۶) \}$$

الف) اگر پیشامد زوج آمدن تاس را A بنامیم:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۶}{۱۲} = \frac{۱}{۲}$$

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲}$$

بالتبع پیشامد فرد آمدن تاس، A' است و برابر است با $\frac{۱}{۲}$

ب) اگر پیشامد رو آمدن سکه را B بنامیم:

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{۶}{۱۲} = \frac{۱}{۲}$$

$$P(B') = 1 - P(B) = \frac{۱}{۲}$$

بالتبع پیشامد پشت آمدن سکه، B' است و برابر است با: $\frac{۱}{۲}$

(ج) پیشامد تاس فرد و سکه پشت بیاید یعنی $(A' \cap B')$

$$P(A' \cap B') = \frac{n(A' \cap B')}{n(S)} = \frac{۳}{۱۲}$$

(د) پیشامد تاس فرد یا سکه پشت بیاید یعنی $(A' \cup B')$

$$P(A' \cup B') = P(A') + P(B') - P(A' \cap B') = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} - \frac{۳}{۱۲} = \frac{۹}{۱۲} = \frac{۳}{۴}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} \quad 184$$

انتخاب دومین کالا انتخاب A

$$P(A) = \frac{\binom{۱}{۱} \times \binom{۴}{۱}}{\binom{۵}{۲}} = \frac{۴}{۱۰}$$

الف)

$$P(B) = \frac{\binom{۳}{۲}}{\binom{۵}{۲}} = \frac{۳}{۱۰}$$

ب)

انتخاب دومین کالا انتخاب C

$$P(C) = \frac{\binom{۱}{۱} \times \binom{۳}{۱}}{\binom{۵}{۲}} = \frac{۳}{۱۰}$$

پ)

۱۸۵

$$S = \{ (۱, ۱), (۱, ۲), (۱, ۳), (۱, ۴), (۱, ۵), (۱, ۶), (۲, ۱), (۲, ۲), (۲, ۳), (۲, ۴), (۲, ۵), (۲, ۶), (۳, ۱), (۳, ۲), (۳, ۳), (۳, ۴), (۳, ۵), (۳, ۶), (۴, ۱), (۴, ۲), (۴, ۳), (۴, ۴), (۴, ۵), (۴, ۶), (۵, ۱), (۵, ۲), (۵, ۳), (۵, ۴), (۵, ۵), (۵, ۶), (۶, ۱), (۶, ۲), (۶, ۳), (۶, ۴), (۶, ۵), (۶, ۶) \}$$

$$A = \{ (۱, ۲), (۱, ۴), (۱, ۶) \}$$

$$B = \{ (۱, ۱), (۱, ۲), (۱, ۳), (۱, ۴), (۱, ۵), (۱, ۶) \}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} \quad 186$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{۷}{۴} \binom{۱۰}{۵} \binom{۸}{۶}}{\binom{۲۵}{۱۵}} = \frac{۷!}{۴!۳!} \times \frac{۱۰!}{۵!۵!} \times \frac{۸!}{۶!۲!} = \frac{۲۴۶۹۶۰}{۳۶۲۸۷۶۰} \approx \frac{۷}{۱۰۰}$$

۱۸۷ الف) برای تاس آبی ۶ حالت و برای تاس قرمز هم ۶ حالت وجود دارد (باتوجه به متفاوت بودن رنگها) طبق اصل ضرب (چون باهم پرتاب می‌شوند) $۶ \times ۶ = ۳۶$ حالت دارد پس

تعداد اعضای فضای نمونه‌ای برابر ۳۶ است.

ب) با فرض این که مؤلفه اول، تاس آبی باشد:

$$A = \{(1, 1)(1, 3)(1, 5)(3, 1)(3, 3)(3, 5)(5, 1)(5, 3)(5, 5)\}$$

$$B = \left\{ \begin{array}{l} (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6) \\ (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6) \\ (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6) \end{array} \right\}$$

$$C = \left\{ \begin{array}{l} (1, 6), (2, 5), (2, 6), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 2), (5, 3) \\ (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6) \end{array} \right\}$$

$$A - B = \{(1, 1)(1, 3)(1, 5)(3, 1)(3, 3)(3, 5)(5, 1)(5, 3)(5, 5)\} = A$$

$$A \cap C = \{(3, 5)(5, 3)(5, 5)\}$$

$$B \cup C = \left\{ \begin{array}{l} (1, 6)(2, 1)(2, 2)(2, 3)(2, 4)(2, 5)(2, 6)(3, 4)(3, 5)(3, 6)(4, 1)(4, 2) \\ (4, 3)(4, 4)(4, 5)(4, 6)(5, 2)(5, 3)(5, 4)(5, 5)(5, 6)(6, 1)(6, 2)(6, 3)(6, 4) \\ (6, 5)(6, 6) \end{array} \right\}$$

$$A' = S - A = \left\{ \begin{array}{l} (1, 2)(1, 4)(1, 6)(2, 1)(2, 2)(2, 3)(2, 4)(2, 5)(2, 6) \\ (3, 2)(3, 4)(3, 6)(4, 1)(4, 2)(4, 3)(4, 4)(4, 5)(4, 6) \\ (5, 2)(5, 4)(5, 6)(6, 1)(6, 2)(6, 3)(6, 4)(6, 5)(6, 6) \end{array} \right\}$$

$$B' = S - B = \left\{ \begin{array}{l} (1, 1)(1, 2)(1, 3)(1, 4)(1, 5)(1, 6)(3, 1)(3, 2)(3, 3)(3, 4)(3, 5)(3, 6) \\ (5, 1)(5, 2)(5, 3)(5, 4)(5, 5)(5, 6) \end{array} \right\}$$

$$A' - B' = \left\{ \begin{array}{l} (1, 2)(1, 4)(1, 6)(2, 1)(2, 2)(2, 3)(2, 4)(2, 5)(2, 6) \\ (3, 2)(3, 4)(3, 6)(4, 1)(4, 2)(4, 3)(4, 4)(4, 5)(4, 6) \\ (5, 2)(5, 4)(5, 6)(6, 1)(6, 2)(6, 3)(6, 4)(6, 5)(6, 6) \end{array} \right\} = A'$$

$$A' \cap C = \left\{ \begin{array}{l} (1, 6)(2, 5)(2, 6)(3, 4)(3, 5)(4, 3)(4, 4)(4, 5)(4, 6) \\ (5, 2)(5, 4)(5, 6)(6, 1)(6, 2)(6, 3)(6, 4) \\ (6, 5)(6, 6) \end{array} \right\}$$

پ

ت

$$A, (A - B) : A \cap (A - B) = A \cap A = A \neq \emptyset$$

$$B, (A - B) : B \cap (A - B) = B \cap A = \emptyset$$

$$C, (A - B) : C \cap (A - B) = C \cap A \neq \emptyset$$

$$A, (A \cap C) : A \cap (A \cap C) = A \cap C \neq \emptyset$$

$$B, (A \cap C) : B \cap (A \cap C) = \emptyset$$

$$C, (A \cap C) : C \cap (A \cap C) \neq \emptyset$$

$$A, (B \cup C) : A \cap (B \cup C) \neq \emptyset$$

$$B, (B \cup C) : B \cap (B \cup C) = B \neq \emptyset$$

$$C, (B \cup C) : C \cap (B \cup C) = C \neq \emptyset$$

$$A, (A' - B') : A \cap (A' - B') = A \cap A' = \emptyset$$

$$B, (A' - B') : B \cap (A' - B') = B \cap A' \neq \emptyset$$

$$C, (A' - B') : C \cap (A' - B') = C \cap A' \neq \emptyset$$

$$A, (A' \cap C) : A \cap (A' \cap C) = \emptyset$$

$$B, (A' \cap C) : B \cap (A' \cap C) \neq \emptyset$$

$$C, (A' \cap C) : C \cap (A' \cap C) \neq \emptyset$$

سازگار

ناسازگار

سازگار

سازگار

ناسازگار

سازگار

سازگار

سازگار

سازگار

ناسازگار

سازگار

سازگار

ناسازگار

سازگار

سازگار

سازگار

سازگار

۱۸۸ دو پیشامد A, C در شکل سمت راست ناسازگارند چرا که اشتراک آن‌ها تهی است. اجتماع آن‌ها برابر است با:

$$A \cup C = \{1, 2\} \cup \{4, 5\} = \{1, 2, 4, 5\}$$

باتوجه به شکل سمت چپ، $\{1, 2, 4, 5\}$ اشتراک دو پیشامد D و E است.

$$D \cap E = \{1, 2, 4, 5\}$$

۱۸۹ مجموعه‌ی شامل همه‌ی حالت‌های ممکن برای یک آزمایش را، فضای نمونه‌ای می‌نامند.

اگر این مجموعه را S بنامیم، هر زیر مجموعه‌ی S مانند A را یک پیشامد تصادفی در S می‌نامیم.

۱۹۰ چون تعداد برابر است پس یک بار با کتاب ریاضی و بار دیگر با کتاب فیزیک شروع می‌کنیم:

طبق اصل جمع:

$$4! \text{ ر ف ر ف ر ف ر ف} = 4! \times 4!$$

$$4! \text{ ر ف ر ف ر ف ر ف} = 4! \times 4! \times 4! + 4! \times 4! = 4! \times 4! \times 2$$

$$3! \text{ ر ف ر ف ر ف ر ف} = 4! \times 3!$$

۱۹۱ چون تعداد کتاب ریاضی بیش تر است پس باید با آن شروع کنیم:

۱۹۲

$$\text{الف) } \frac{2n}{n!} - \frac{1}{(n-1)!} = \frac{2n}{n(n-1)!} - \frac{1}{(n-1)!} = \frac{2n-n}{n(n-1)!} = \frac{n}{n(n-1)!} = \frac{1}{(n-1)!}$$

$$\text{ب) } \frac{3}{4!} + \frac{5}{5!} = \frac{3}{4!} + \frac{5}{5 \times 4!} = \frac{3}{4!} + \frac{1}{4!} = \frac{4}{4!} = \frac{4}{4 \times 3!} = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$$

$$\text{پ) } (n+2)! - (n+1)! = (n+2)(n+1)! - (n+1)! = (n+1)!((n+2) - 1) = (n+1)(n+1)!$$

$$\text{ت) } \frac{1}{12}(10! + 11!) = \frac{1}{12}(10! + 11 \times 10!) = \frac{1}{12}(10!(1 + 11)) = \frac{1}{12}(12 \times 10!) = 10! = 3628800$$

۱۹۳

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$(0, -3) : -3 = c$$

$$(1, -4) : a + b - 3 = -4 \Rightarrow a + b = -1 \Rightarrow 2a + 2b = -2$$

$$(2, -3) : 4a + 2b - 3 = -3 \Rightarrow 4a + 2b = 0$$

$$\begin{cases} 2a + 2b = -2 \\ 4a + 2b = 0 \end{cases}$$

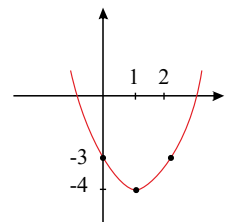
$$-2a = -2 \Rightarrow a = 1$$

$$2a + 2b = -2 \Rightarrow 2 + 2b = -2 \Rightarrow 2b = -4 \Rightarrow b = -2$$

$$y = x^2 - 2x - 3$$

$$\text{دامنه} = \mathbb{R}$$

$$\text{برد} = [-4, +\infty)$$



$$b = 3$$

$$3 + a = 8 \Rightarrow a = 5$$

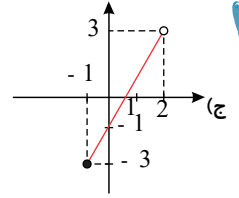
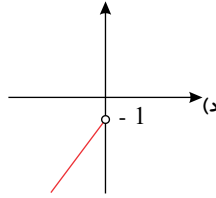
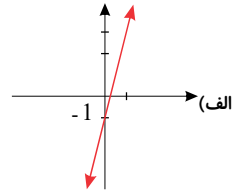
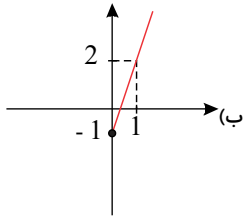
$$2a + b = 2 \times 5 + 3 = 10 + 3 = 13$$

۱۹۴ می‌دانیم دامنه، مجموعه همه مؤلفه‌های اول زوج‌های مرتب تشکیل‌دهنده تابع است؛ پس:

و تابع به شکل $\{(2, a)(3, 3+a)(7, 20)(4, 11)\}$ در می‌آید.

برد تابع، مجموعه همه مؤلفه‌های دوم زوج‌های مرتب تشکیل‌دهنده تابع است؛ پس:

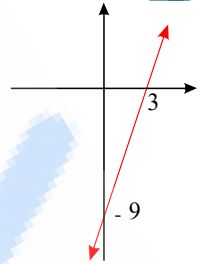
۱۹۵



۱۹۶ با جایگذاری نقطه‌ی مورد نظر در ضابطه تابع داریم:

$$f(x) = 3x - b \xrightarrow{(2, -3)} f(2) = 3(2) - b$$

$$\Rightarrow -3 = 6 - b \Rightarrow -b = -9 \Rightarrow b = 9 \quad \boxed{f(x) = 3x - 9}$$



۱۹۷

باتوجه به شکل قابل داریم:

$$P = x + 3 + x + 3 + x = 3x + 6$$

$$\boxed{P = 3x + 6}$$

۱۹۸ الف) فاصله‌ی آنها از مبدأ مختصات کمتر از ۳ واحد باشد یعنی $(-3, 3)$

ب) فاصله‌ی آنها از مبدأ مختصات بیشتر از ۳ واحد باشد یعنی $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$

۱۹۹ دو نامعادله حل می‌کنیم و جواب‌ها را اشتراک می‌گیریم:

$$\underbrace{\frac{x-1}{x} > \frac{x+1}{x+2} > \frac{x+3}{x+4}}_{II}$$

$$(I): \frac{x+1}{x+2} > \frac{x+3}{x+4} \Rightarrow \frac{x+1}{x+2} - \frac{x+3}{x+4} > 0 \Rightarrow \frac{(x+1)(x+4) - (x+3)(x+2)}{(x+2)(x+4)} > 0$$

$$\frac{x^2 + 5x + 4 - (x^2 + 5x + 6)}{(x+2)(x+4)} > 0 \Rightarrow \frac{x^2 + 5x + 4 - x^2 - 5x - 6}{(x+2)(x+4)} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{-2}{(x+2)(x+4)} > 0 \quad \begin{array}{l} \text{صورت منفی} \\ \text{مخرج منفی} \\ \text{عبارت مثبت} \end{array}$$

| x | -4 | -2 |
|------------|----|----|
| x+2 | - | - |
| x+4 | - | + |
| (x+2)(x+4) | + | - |

$$\Rightarrow -4 < x < -2$$

$$(II): \frac{x-1}{x} > \frac{x+1}{x+2} \Rightarrow \frac{x-1}{x} - \frac{x+1}{x+2} > 0 \Rightarrow \frac{(x-1)(x+2) - x(x+1)}{x(x+2)} > 0$$

$$\frac{x^2 + x - 2 - (x^2 + x)}{x(x+2)} > 0 \Rightarrow \frac{x^2 + x - 2 - x^2 - x}{x(x+2)} > 0 \Rightarrow \frac{-2}{x(x+2)} > 0 \quad \begin{array}{l} \text{صورت منفی} \\ \text{مخرج منفی} \\ \text{عبارت مثبت} \end{array}$$

| | | | | | |
|--------|----|---|---|---|---|
| x | -2 | 0 | | | |
| x | - | - | o | + | |
| (x+2) | - | o | + | + | |
| x(x+2) | + | o | - | o | + |

$$-2 < x < 0$$

$$I \cap II = (-4, -2) \cap (-2, 0) = \emptyset \quad \text{نامعادله جواب ندارد}$$

$$\begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \quad \text{می دانیم عبارت } y = ax^2 + bx + c \text{ زمانی همواره منفی خواهد بود که:}$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\begin{cases} a < 0 \quad (I) \\ (a-1)^2 - 4(a)\left(\frac{-1}{a} + \frac{1}{2a}\right) = a^2 - 2a + 1 + \frac{4a}{2} - \frac{4a}{2a} < 0 \\ a^2 - 2a + 1 + 2a - 2 < 0 \Rightarrow a^2 - 1 < 0 \\ a^2 - 1 = 0 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1 \end{cases}$$

| | | | | | |
|-----|----|---|---|---|---|
| a | -1 | 1 | | | |
| a-1 | + | o | - | o | + |

$$\Rightarrow -1 < a < 1 \quad (II)$$

$$I, II \Rightarrow -1 < a < 0$$

$$\begin{aligned} 18 < C < 25 &\xrightarrow{C = \frac{\Delta}{9}(F-32)} 18 < \frac{\Delta}{9}(F-32) < 25 \\ \xrightarrow{\times 9} 162 < \Delta F - 160 < 225 &\xrightarrow{+160} 322 < \Delta F < 385 \xrightarrow{\div \Delta} \frac{322}{\Delta} < F < \frac{385}{\Delta} \\ \Rightarrow 64,4 < F < 77 \end{aligned}$$

به هر معادله‌ای که پس از ساده‌سازی، بزرگترین توان متغیر آن دو باشد، معادله‌ی درجه‌ی دوم گویند. ۲۰۲

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad (a \neq 0), \quad (a, b, c \in \mathbb{R})$$

معادله‌ی درجه‌ی دوم

$$\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \quad \text{زوج } n \in \mathbb{N} \quad a, b \geq 0$$

$$\sqrt[kn]{a^{km}} = \sqrt[n]{a^m} \quad a \geq 0 \quad n, m, k \in \mathbb{N}$$

ابتدا فرجه‌ها را یکسان می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \sqrt{(\sqrt{2}-1)} &= \sqrt[2 \times 2]{(\sqrt{2}-1)^2} = \sqrt[4]{(\sqrt{2}-1)^2} \\ &= \sqrt[4]{2+1-2\sqrt{2}} = \sqrt[4]{3-2\sqrt{2}} \\ \sqrt{(2-1)} \sqrt[4]{3+2\sqrt{2}} &= \sqrt[4]{3-2\sqrt{2}} \sqrt[4]{3+2\sqrt{2}} = \sqrt[4]{(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})} \\ &= \sqrt[4]{9-8} = \sqrt[4]{1} = 1 \end{aligned}$$

۲۰۴

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} \quad \text{و} \quad \sqrt[n]{a^x} = a \quad \text{که اگر } n \text{ زوج بود } \leftarrow a \geq 0$$

الف) $\sqrt{32} = \sqrt{4 \times 8} = \sqrt{4 \times 4 \times 2} = \sqrt{4} \times \sqrt{4} \times \sqrt{2} = 2 \times 2 \times \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

$$\sqrt{32} = \sqrt{16 \times 2} = \sqrt{16} \times \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

یا می‌توان نوشت

ب) $\sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = \sqrt{4} \times \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$

پ) $\sqrt{37} = \sqrt{37}$

ت) $\sqrt{52} = \sqrt{4 \times 13} = \sqrt{4} \times \sqrt{13} = 2\sqrt{13}$

ث) $\sqrt{72} = \sqrt{2 \times 36} = \sqrt{2} \times \sqrt{36} = 6\sqrt{2}$

ج) $\sqrt{36} = 6$

چ) $\sqrt{44} = \sqrt{4 \times 11} = \sqrt{4} \times \sqrt{11} = 2\sqrt{11}$

ح) $\sqrt{33} = \sqrt{3 \times 11} = \sqrt{33}$

۳۷ عدد اول است و نمی‌توان آن‌را به صورت حاصل ضرب یک عدد مربع کامل در عددی دیگر نوشت.

می بینیم 33 به شکل ساده‌تری قابل نوشتن نیست چرا که با تجزیه‌ی آن به 11×3 به دو عدد اول که مربع کامل نیستند بر می‌خوریم و در نتیجه:

$$\sqrt{33} = \sqrt{33}$$

$$\text{خ) } \sqrt{24} = \sqrt{4 \times 6} = \sqrt{4} \times \sqrt{6} = 2\sqrt{6}$$

$$\text{د) } \sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = 2\sqrt{3}$$

باتوجه به مثال‌های بالا درمی‌یابیم برای ساده‌سازی یک عدد زیر رادیکال به فرجه‌ی 2 باید آن را به صورت حاصل ضرب عددی در یک عدد مربع کامل نوشت و بخش مربع کامل آن را از زیر رادیکال خارج کرد.

۲۰۵

اگر n فرد باشد:

$$(\sqrt[n]{a})^n = \underbrace{\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{a} \times \dots \times \sqrt[n]{a}}_{n \text{ بار}} = \sqrt[n]{a^n} = a$$

$$*: \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

علامت a اهمیتی ندارد.

اگر n زوج باشد و $a \geq 0$

باتوجه به اینکه زیر رادیکال با فرجه‌ی زوج تنها اعداد بزرگتر مساوی صفر قرار می‌گیرند.

$$(\sqrt[n]{a})^n = \sqrt[n]{a^n} = |a| \stackrel{a \geq 0}{=} a \quad a \geq 0$$

پس می‌توان گفت:

در صورت فرد بودن فرجه تساوی همواره برقرار است.

اما اگر فرجه زوج بود، a باید بزرگتر مساوی صفر باشد تا تساوی برقرار شود.

۲۰۶ الف) $256, -4$

$$4^4 = 256 \rightarrow \sqrt[4]{256} = 4$$

$$-\sqrt[4]{256} = -4$$

ب) ۲

$$\sqrt[4]{81} = 3 \rightarrow a = 3 \Rightarrow a^2 - 7 = 9 - 7 = 2$$

۲۰۷ الف) $a: 3 \quad b: 4 \quad c: 5 \quad d: 4$

اعداد مثبت بزرگتر از یک هر چه زیر رادیکال با فرجه‌ی بزرگتری قرار بگیرند (ریشه بزرگتر)، عدد کوچکتری حاصل می‌کنند.

و همچنین، دو ریشه چهارم قرینه یکدیگر دارند.

ب) $a: 5 \quad b: 4 \quad c: 3 \quad d: 4$

اعداد مثبت بین صفر و یک، هر چه رادیکال با فرجه‌ی بزرگتری از آنها بگیریم (ریشه بزرگتر) عددی بزرگتر حاصل می‌شود.

و همچنین، دو ریشه چهارم قرینه یکدیگر دارند.

پ) $a: 3 \quad b: 5$

اعداد بین صفر و منفی یک، هر چه زیر رادیکال با فرجه‌ی فرد بزرگتری قرار بگیرند (ریشه بزرگتر) عدد کوچکتری حاصل می‌کنند.

و در اعداد منفی هر چه به سمت چپ روی محور حرکت کنیم، عدد کوچکتر می‌شود. ضمن اینکه اعداد منفی، تنها ریشه‌های فرد دارند.

ت) $a: 5 \quad b: 3$

اعداد منفی کوچکتر از منفی یک هر چه رادیکال با فرجه‌ی بزرگتری از آنها بگیریم (ریشه بزرگتر)، عدد بزرگتری حاصل می‌کنند.

با توجه به اینکه هر چه روی محور اعداد منفی به سمت چپ حرکت کنیم عدد ما کوچکتر می‌شود و اعداد منفی تنها ریشه‌های فرد دارند.

۲۰۸ $a_1: a_1$ عددی است بین صفر و یک

ریشه‌ی سوم a_1 باید بزرگتر از خودش و کوچکتر از ۱ باشد. در نتیجه ریشه‌ی سوم a_1 ، c_1 خواهد بود.

(اعداد بین صفر و یک، هر چه به توان بزرگتری برسند کوچکتر می‌شوند.)

مثال:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{2} > \frac{1}{4} > \frac{1}{8} > \frac{1}{2^n} \quad (n \geq 3)$$

a_n : عددی بزرگتر از یک است.

ریشه‌ی سوم a_n ، باشد بزرگتر از یک و کوچکتر از a_n باشد یعنی b_n .

a_n : هر چه یک عدد بین صفر و منفی یک به توان فرد بزرگتری برسد، عدد منفی نزدیک‌تری به صفر به وجود می‌آورد (عددی بزرگتر)

پس ریشه سوم عددی بین صفر و منفی یک، باید از خودش کوچکتر باشد (از صفر دورتر باشد) (می‌دانیم هر چه در اعداد منفی روی محور به سمت چپ حرکت کنیم عدد کوچکتر می‌شود)

به‌عنوان مثال: $(-3 < -2)$

در نتیجه ریشه‌ی سوم a_p ، b_p می‌شود که از خودش کوچک‌تر است.
 a_p : عددی منفی و کوچک‌تر از منفی یک است پس ریشه‌ی سومش از خودش بزرگ‌تر می‌شود.
 (می‌دانیم که در محور اعداد منفی هرچه به سمت صفر پیش برویم عددمان بزرگ‌تر می‌شود).
 فلذا ریشه‌ی سوم a_p ، c_p می‌شود که از خودش بزرگ‌تر است.

۲۰۹

الف) $\sqrt{12} = 3,46$ ب) $\sqrt[3]{12} = 2,28$ پ) $\sqrt[4]{12} = 1,86$ ت) $\sqrt[5]{-12} = -1,64$
 ث) $\sqrt[3]{25} = 2,92$ ج) $\sqrt[3]{-27} = -3$ چ) $\sqrt[3]{30} = 5,47$

۲۱۰

عددی بین ۵ و ۶ : $6 < \sqrt{30} < 5 \rightarrow \sqrt{36} > \sqrt{30} > \sqrt{25}$ (الف)

عددی بین ۶ و ۷ : $-\sqrt{37}$ (ب)

عددی بین ۹ و ۱۰ : $\sqrt{85}$ (پ)

ت) $\sqrt[3]{8} = 2$

عددی بین ۳ و ۴ : $\sqrt[3]{30}$ (ج)

ث) $\sqrt{-8} = -2$

عددی بین ۵ و ۶ : $\sqrt[3]{27}$ (ح)

چ) $\sqrt[3]{-27} = -3$

د) $\sqrt[4]{256} = 16$

خ) $\sqrt[4]{256} = 4$

ر) $\sqrt[5]{-1} = -1$

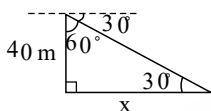
ذ) $\sqrt[3]{1} = 1$

ز) $\sqrt[3]{-1} = -1$

ز) $\sqrt[3]{1} = 1$

۲۱۱) بله، هر عدد مثبت دو ریشه‌ی چهارم دارد که قرینه‌ی یکدیگرند، عدد a دارای دو ریشه‌ی چهارم است، یکی از آنها b و با توجه به آنچه گفته شد، دیگری $-b$ است.

۲۱۲) با توجه به شکل داریم:



$$\tan 30^\circ = \frac{40}{x} = \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow x = \frac{120\sqrt{3}}{3} = 40\sqrt{3}$$

۲۱۳

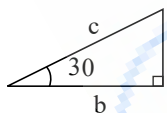
الف) درست: اگر $\alpha = 30^\circ$ و $\beta = 60^\circ$ باشد:

$$\sin \alpha = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\sin \alpha = \cos \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

یا اگر $\beta = \alpha = 45^\circ$ باشد:

ب) درست:



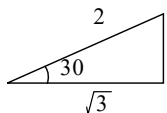
$$\sin 30^\circ = \frac{a}{c} = \frac{1}{2} \rightarrow a = \frac{c}{2}$$

پ) 60°

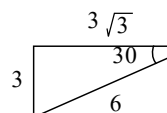
ب) 30°

۲۱۴) الف) 45°

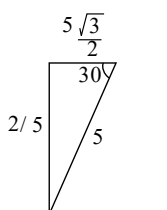
۲۱۵) با در نظر گرفتن زاویه‌ی 30° در سه مثلث مختلف و مقایسه نسبت‌های مثلثاتی این زاویه داریم:



$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$



$$\sin 30^\circ = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$



$$\sin 30^\circ = \frac{2,5}{5} = \frac{1}{2}$$

نسبت‌های مثلثاتی برای هر زاویه یکتاست.

۲۱۶

جمله عمومی دنباله هندسی

$$a_n = a_1 a^{n-1}$$

قدر نسبت: q , جمله اول دنباله: a_1

$$t_n = t_1 r^{n-1} \Rightarrow t_n = 20 \times 2^{10-1} = 20 \times 2^9 = 2^{10} \times 10 = 10240$$

۲۱۷

الف) $a_1 = 3 \times 1 - 1 = 2$

$$a_2 = 3 \times 2 - 1 = 5$$

$$a_3 = 3 \times 3 - 1 = 8$$

باتوجه به درجه یک بودن جملهی عمومی، الگو خطی است $a_n = 3n - 1$

ب) $a_1 = 1^2 + 3 \times 1 = 4$

$$a_2 = 2^2 + 3 \times 2 = 10$$

$$a_3 = 3^2 + 3 \times 3 = 18$$

$$a_4 = 4^2 + 3 \times 4 = 28$$

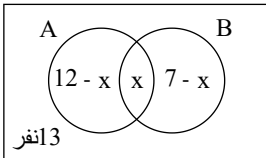
$$a_n = n^2 + 3n$$

باتوجه به درجه دو بودن جمله عمومی، الگو غیر خطی است.

۲۱۸

اگر کلاس نقاشی را A ، کلاس خط را B و تعداد افرادی که در هر دو کلاس شرکت کرده اند را x فرض کنیم. باتوجه به نمودار ون مقابل و اینکه ۱۳ نفر در هیچ یک از دو کلاس ثبت نام نکرده اند داریم:

$$n(A \cup B) = 17$$



$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

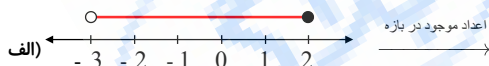
$$17 = 12 + 7 - n(A \cap B)$$

$$17 = 19 - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = 2$$

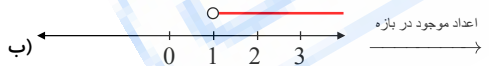
دو نفر در هر دو کلاس ثبت نام کرده اند.

۲۱۹

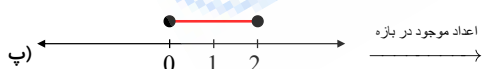
باتوجه به شکل هر بازه و مقادیر تقریبی هر عدد داریم: $\sqrt{7} \approx 2,6$, $\sqrt{2} = 1,4$, $\frac{\sqrt{2}}{2} = 0,7$, $-\sqrt{3} = -1,7$



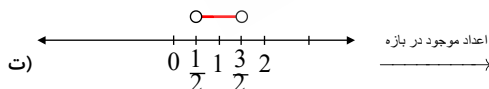
$$-\frac{2}{3}, \sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{3}, \frac{1}{2}, 0,7$$



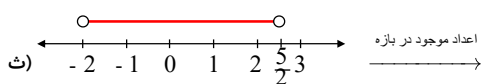
$$5, \sqrt{7}, 2,5, 6, 22 \times 10^{23}, \sqrt{2}, 1000$$



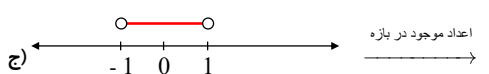
$$\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, 0,7$$



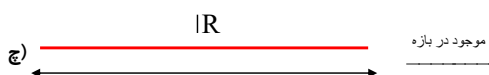
$$\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0,7$$



$$-\frac{2}{3}, \sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{3}, \frac{1}{2}, 0,7$$



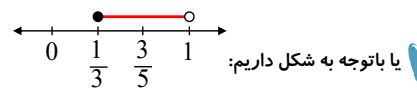
$$-\frac{2}{3}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, 0,7$$



تمام اعداد داده شده

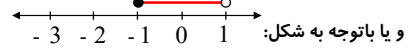
۲۲۰ الف) درست: با مقایسه دو عدد $\frac{3}{5}$, $\frac{1}{3}$ داریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{3}{5} = \frac{9}{15} \\ \frac{1}{3} = \frac{5}{15} \\ 1 = \frac{15}{15} \end{array} \right. \Rightarrow 1 > \frac{3}{5} > \frac{1}{3}$$



پس الف درست است.

(ب) نادرست: با استدلال مشابه داریم: $-3 < -1$



پس ب نادرست است.

(پ) نادرست: توجه کنید که $\{-1, 1\}$ مجموعه‌ای است شامل دو عضو $-1, 1$ اما $(-1, 1)$ بازه‌ای باز است از -1 تا 1 همچنین $[-1, 1]$ بازه‌ای بسته است از -1 تا 1 که هر دو بازه شامل تمام اعداد حقیقی بین -1 تا 1 هستند.

پس صفر جزء $\{-1, 1\}$ نیست اما جزء $(-1, 1)$ یا $[-1, 1]$ هست.

(ت) درست: باتوجه به توضیحات مورد پ

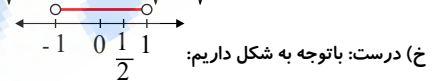
(ث) نادرست: بازه نیم باز $[-3, 2)$ شامل عدد -3 است و شامل عدد 2 نیست و بازه نیم باز $(-3, 2]$ شامل عدد -3 نیست و شامل عدد 2 است. و از آنجا که در بازه‌ی اول عددی (-3) هست که در بازه‌ی دوم نیست، پس بازه‌ی اول زیر مجموعه‌ای از بازه‌ی دوم نیست.

توجه شود که نبودن عدد 2 در بازه‌ی اول و بودن آن در بازه‌ی دوم مشکلی برای مسئله ایجاد نمی‌کند و شرط لازم و کافی برای اینکه بازه‌ای زیرمجموعه بازه‌ی دیگر باشد فقط و فقط این است که هرچه در بازه‌ی اول هست در بازه‌ی دوم نیز باشد.

(ج) درست: تهی زیرمجموعه‌ی همه مجموعه‌هاست.

(چ) درست: $\{1, 2\}$ فقط شامل دو عدد 1 و 2 است که در بازه‌ی بسته‌ی $[1, 2]$ نیز موجود است پس $\{1, 2\} \subset [1, 2]$

(ح) نادرست: بازه‌ی نیم باز $(-\sqrt{5}, \sqrt{5})$ شامل عدد $\sqrt{5}$ نیست.



۲۲۱

الف نادرست

ب درست

پ درست

ت درست

۲۲۲

$$1, 1 \quad \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$$

$$2, 2 \quad \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$$

$$3, 3 \quad \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$$

$$4, 4 \quad \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$$

$$1 - \frac{4}{20} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$$

۲۲۳ الف. $\left(\frac{5}{3}\right)$

ب. $\left(\frac{4}{2}\right)$

پ. $\left(\frac{3}{1}\right)$

۲۲۴ گزینه ۲

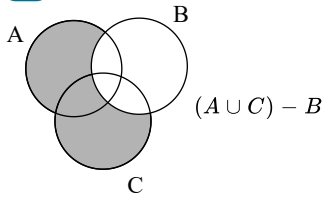
$$42 \times 120 = n!$$

$$6 \times 7 \times 3 \times 4 \times 2 \times 5 = 7!$$

ب: ۲

پ: ۳

الف



ب

$\underbrace{۲, ۳, ۵, ۷, ۱۱, ۱۲}_{\text{اول}}, \underbrace{۱, ۴, ۶, ۸, ۹, ۱۰, ۱۲}_{\text{غیر اول}}$

$$n(S) = \binom{۱۲}{۲} = \frac{۱۲ \times ۱۱}{۲} = ۶۶$$

$$n(A) = \underbrace{\binom{۵}{۱} \binom{۷}{۱}}_{\text{یکی اول و یکی غیر اول}} + \underbrace{\binom{۵}{۲}}_{\text{هر ۲ اول}} = ۳۵ + ۱۰ = ۴۵ \rightarrow P(A) = \frac{۴۵}{۶۶} = \frac{۱۵}{۲۲}$$

فایبلیتی